ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— **Sur les transformations de Bäcklund.***

Par M. ***A. Tsortsis,*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. La lecture d'un Mémoire de M. Zervos à propos du Congrès de Strasbourg en 1920, ainsi que de sa Note aux *Comptes rendus*[1] m'avait amené à poser autrefois[2] un problème en rapport avec les transformations de contact.

Dans les lignes qui suivent, je reprends cette question sous une autre forme plus générale. Je me propose de communiquer à l'Académie l'énoncé de ce problème et les résultats principaux auxquels je suis parvenu.

On sait[3] qu'un système de deux équations de Pfaff avec un nombre quelconque de variables peut se ramener, comme dans le cas de six variables, aux autres systèmes plus simples dans lesquels le nombre croît avec celui des variables. Ce sont les systèmes que nous appellerons désormais, d'une manière analogue au cas de six variables, des formes réduites (D) du système primitif.

2. On pourrait alors poser le problème suivant:

Soient trois espaces à $n+1$ *dimensions d'éléments de Lie* e, e', E; *on se donne un système de* s *relations entre les éléments de ces espaces de la forme:*

$$(1) \qquad F_h\,(x_i, z, p_i;\, x'_i, z', p'_i;\, a_i, c_i, b_i) = 0$$
$$(h = 1, \ldots .. s;\ i = 1, \ldots .. n)$$

avec $s \leqq 2n+1$, *et une des formes réduites* (D) *d'un système de deux équations de Pfaff à* $2(2n+1)-s$ *variables; établir entre les éléments de deux de ces espaces une correspondance de contact* T, *de façon que le système des équations* (1), *après la réduction avec un des systèmes aux différentielles totales qui forment deux des équations suivantes:*

$$(2) \qquad dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0, \quad dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i dx'_i = 0, \quad dc - \sum_{i=1}^{n} b_i da_i = 0$$

déterminent une correspondance de Bäcklund dont la classe corresponde à la forme réduite (D).

* A. ΤΖΩΡΤΖΗ.— Περὶ τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ **Bäcklund.**

[1] 171, 1920, p. 781

[2] A. ΤΖΩΡΤΖΗ, Περὶ τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Bäcklund, ἐναίσιμος ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβή, 1928, σ. 27.

[3] E. GOURSAT, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, 10, 1918, ch. IV.

On dit alors que le système de s équations aux dérivées partielles (1), admet par rapport à la forme de Pfaff (D), la transformation de contact T.

3. On résout, sans difficulté, ce problème en demandant une détermination convenable de m ($\angle$n) fonctions ψ_h; ψ_h désignant des fonctions de deux groupes des variables, (x_i,z), (x_i',z'), (a_i,c), de sorte que le système formé par les relations:

$$\Psi_h = 0, \quad \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \frac{\partial \Psi_h}{\partial x_i} + p_i \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \frac{\partial \Psi_h}{\partial z} = 0, \quad \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \frac{\partial \Psi_h}{\partial a_i} + b_i \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \frac{\partial \Psi_h}{\partial c} = 0$$

$$(h = 1, \ldots . m;\ i = 1, \ldots . . n)$$

après l'élimination des λ_h, détermine une transformation de contact telle que si l'on envisage les équations (1), le système formé par les deux premières des équations (2) se ramène à la forme de Pfaff (D).

On y arrive en substituant quelques-unes des variables x_i, z, p_i; x_i', z_i', p_i; a_i, c, b_i par les coefficients $\lambda_1, \ldots \lambda_m$.

4. Supposons qu'on a effectué une transformation de contact T entre les éléments des espaces e et E; alors à chaque multiplicité d'éléments unis à n dimensions m de l'espace e, les relations T font correspondre une multiplicité d'éléments unis à n dimensions M de l'espace E et, grâce aux formules, (1) on a, en général, de même pour l'espace e'; par conséquent nous pouvons former trois familles de multiplicités d'éléments unis m_i, M_i, m_i'. Ces familles jouissent de la propriété suivante: on peut passer de m_i à M_i par une transformation de contact et de m_i ou M_i à m_i' par une transformation de Bäcklund. Et comme ces familles sont, d'après un résultat connu, des intégrales générales, sauf dans des cas exceptionnels, de trois systèmes σ_i, Σ_i, σ_i' des équations aux dérivées partielles, on voit que, si la transformation de contact T est bien déterminée, l'étude d'un système σ de l'espace e vis-à-vis du système correspondant σ' de l'espace e' pour une transformation de Bäcklund peut se ramener à l'étude du système Σ de l'espace E qui correspond à σ pour la transformation T, vis-à-vis de σ'.

5. Ainsi on pourrait par exemple étudier la question suivante:

Y a-t-il une transformation de contact T_1 bien déterminée qui fasse correspondre le système σ à σ' et réciproquement?

L'étude de ce problème, qui en général n'est pas résolu, se simplifie quelquefois, si l'on considère au lieu du système σ, le système correspondant Σ.

M. Cartan[1], en s'appuyant sur quelques considérations relatives aux formes bilinéaires alternées, a démontré que dans le cas où $s=2n+1$, c'est-à-dire dans le cas où les formules (1) après la réduction font correspondre à tout élément de l'espace e un élément bien déterminé de e' et réciproquement, le problème est toujours possible.

Le problème nous fournit un renseignement pour le cas de $s<2n+1$ en faisant une détermination convenable de transformation T.

On voit, finalement, qu'on pourrait poser également un problème analogue à celui du § 2 lorsque le nombre des espaces dépasse 3.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ κ. Τζώρτζης ἔχων ὡς ἀφετηρίαν τὴν σχετικὴν ἐργασίαν τοῦ κ. Π. Ζερβοῦ ἔθεσεν ἄλλοτε ἓν πρόβλημα μετασχηματισμῶν τοῦ Bäcklund ἐν σχέσει πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς ἐπαφῆς.

Ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει ὁ κ. Τζώρτζης ἐπανερχόμενος εἰς τὸ θέμα τοῦτο δίδει γενικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος καὶ χαράσσει τὴν πορείαν τῆς λύσεώς του ἀνευρίσκει δὲ τὰς συνεπείας, τὰς ὁποίας τοῦτο ἔχει εἰς τὰ ὑπ' αὐτοῦ ἀναφερόμενα σχετικὰ πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς τοῦ Bäcklund ζητήματα.

K. A. Kς

[1] E. CARTAN, Sur les transformations de Bäcklund, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1915.