ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 27ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1944

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΑΜΑΝΤΟΥ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Sur une correspondance des complexes de courbes. Note de M. - *C. P. Papaïoannou**, présentée par M. - *P. Zervos*.

L'objet de ce travail est de montrer comment on peut faire correspondre à un complexe de courbes quelconque un complexe des caractéristiques d'une équation $F=0$ aux dérivées partielles du premier ordre[1]. Cette correspondance nous permettra, comme nous le verrons (§ 3), d'associer à un complexe de courbes quelconque une congruence, que j'appellerai congruence focale du complexe. Nous terminons en montrant (§ 4) comment les resultats en question peuvent être étendus aux espaces à plus de trois dimensions.

1. Considerons d'abord une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q)=0. \tag{1,1}$$

Si l'intégrale complète de $F=0$ est

$$W(x, y, z, c_1, c_2)=0 \tag{1,2}$$

et que l'on pose $c_3=dc_2 : dc_1$, le complexe des caractéristiques de $F=0$ sera représenté par les équations

$$W=0, \frac{\partial w}{\partial c_1}+\frac{\partial w}{\partial c_2}c_3=0. \tag{1,3}$$

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐπὶ μιᾶς ἀντιστοιχίας τῶν συμπλεγμάτων καμπύλων. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Π. Ζερβοῦ.

[1] *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Συμπλέγματα καμπύλων καὶ συμπλέγματα εὐθειῶν, κεφ. IV. Διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, 1930.

Nous dirons que le complexe (1,3) est *un complexe spécial*[1]. Ce complexe est associé à l'équation $F=0$. Soit

$$c_3\,dc_1 - dc_2 = 0, \tag{1,4}$$

l'équation de Pfaff, qui est associée au complexe spécial (1,3). Cette équation exprime que

$$c_2 = c_2(c_1)\,,\quad c_3 = c'_2(c_1). \tag{1,5}$$

Les fonctions (1,5) sont telles que les courbes de la famille partielle k [(1,3), (1,5)] ont une enveloppe.

Les équations d'une famille k sont

$$W=0\,,\ \frac{dw}{dc_1}=0\,,\quad [c_2=c_2(c_1)] \tag{1,6}$$

et les équations de l'enveloppe L de cette famille sont[2]

$$W=0\,,\ \frac{dw}{dc_1}=0\,,\ \frac{d^2w}{dc_1^2}=0\quad [c_2=c_2(c_1)]. \tag{1,7}$$

L'ensemble des enveloppes des familles k constitue une congruence [L] dont les courbes L sont de courbes intégrales (en dehors de l'intégrale singulière) de l'équation (1,1). Cette congruence est représentée par les équations (1,7), $c_2=c_2(c_1)$ étant une fonction arbitraire de c_1. D'après une proprieté bien connue[3], on peut conclure la proposition suivante :

La surface focale d'une congruence quelconque d'un complexe des caractéristiques d'une équation $F=0$ est une surface de la congruence des courbes intégrales de $F=0$.

De là résulte le nom *de congruence focale* du complexe (1,3), que je vais attribuer à la congruence (1,7).

2. Considerons maintenant un complexe de courbes quelconque

$$\begin{cases} f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0\,, \\ g(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0 \end{cases} \tag{2,1}$$

et soit

$$H_1\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{d\beta}{d\alpha},\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=0, \tag{2,2}$$

l'équation de Monge qui est associée a ce complexe[4]. Cette équation de Monge est associée aussi à une équation

---

[1] Pour les complexes de droites, voir : *E. Vessiot*, Leçons de Géom. supérieure, chap. IX, 1919.

[2] *P. Zervos*, Le problème de Monge, chap. I, § 1. Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule LIII, 1932.

[3] *N. Χατζιδάκη*, Σμήνη καὶ συμπλέγματα καμπύλων καὶ ἐπιφανειῶν, § 18, 1928.

[4] *Fr. Engel*, Neue Methode in d. Invariantheorie d. Differentialgleichungen. Berichte der K. Sächs. - Gesellschaft d. Wiss. Math. - Phys. Klasse, 1905, Bd. LVII. § 7

$$(2.3) \qquad H(\alpha, \beta, \gamma, p, q) = 0,$$

qu'on obtient si l'on élimine $d\beta : d\alpha$ entre les deux équations

$$(2,4) \qquad H_1\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{d\beta}{d\alpha}, p + q\frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \frac{d\beta}{d\alpha}} = 0.$$

Nous dirons que l'équation (2,3) est associée au complexe (2,1). Si

$$(2,5) \qquad W(\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2) = 0$$

est l'intégrale complète de (2,3), le complexe des caractéristiques est définie par les équations

$$(2,6) \qquad W = 0, \frac{\partial w}{\partial c_1} + \frac{\partial w}{\partial c_2} c_3 = 0.$$

Donc :

A chaque complexe on peut faire correspondre un complexe spécial. On établie cette correspondance par l'équation $H = 0$ qui est associée aux deux complexes.

3. Les équations de la congruence focale du complexe (2,6) sont

$$(3,1) \qquad W = 0, \frac{dw}{dc_1} = 0, \frac{d^2w}{dc_1^2} = 0.$$

Une courbe L de cette congruence est définie paramétriquement par les équations

$$(3,2) \qquad \alpha = \alpha(c_1), \quad \beta = \beta(c_1), \quad \gamma = \gamma(c_1).$$

En éliminant c_1 entre ces équations, on aura les fonctions

$$(3,3) \qquad \beta = \beta_1(\alpha), \quad \gamma = \gamma_1(\alpha),$$

qui verifient l'équation de Monge (2,2). Or, les fonctions (3,3) déterminent une famille de courbes du complexe (2,1) ayant une enveloppe. Soit C cette enveloppe. On voit donc qu'à chaque courbe L de la congruence (3,1) correspond une courbe C, qui est l'enveloppe d'une famille de courbes du complexe (2,1). L'ensemble des courbes C constitue une congruence [c]. Une surface quelconque de [c] est une nappe de la surface focale d'une congruence du complexe (2,1). Je vais attribuer à la congruence [c] le nom de congruence focale du complexe (2,1).

En résumé :

a) La congruence focale [c] d'un complexe quelconque correspond à la congruence focale [L] d'un complexe spécial par l'équation de Monge (2,2).

b) La congruence [L] est représentée par le système d'équation

(3,1). Au contraire, dans le cas d'un complexe non spécial, il n'y a pas un système de la forme (3,1) définissant la congruence [c]. Dans ce cas là on peut déduire les courbes C des courbes L au moyen des fonctions (3,3).

4. On peut chercher d'étendre les résultats précédents aux complexes de courbes d'un espace d'ordre n. Il faudrait, pour cela, s'assurer qu'étant donné un complexe de courbes quelconque P dans l'espace R_n on peut trouver une équation associée

$$H(x_1, x_2, \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}) = 0.$$

L'ensemble des courbes caractéristiques de $H=0$ constituera le complexe spécial correspondant au complexe P.

M. P. Zervos[1] a étudié la correspondance entre l'équation $H=0$ et une équation de Monge

$$H_1\left(x_1, x_2, \cdots x_n, \frac{dx_2}{dx_1}, \cdots \frac{dx_n}{dx_1}\right) = 0.$$

D'autre part Botasso[2] donna les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille simplement infinie des caractéristiques de $H=0$ admette une enveloppe L. L'ensemble des courbes L constituera la congruence focale du complexe spécial.

On remarquera que la recherche de $H=0$ comprend le problème de la recherche des courbes C dont l'ensemble définira la congruence focale du complexe P.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ κ. Παπαϊωάννου ἠρεύνησε καὶ ἄλλοτε, εἰς τὴν ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβήν του (1930) καὶ εἰς ἀνακοίνωσίν του εἰς τὸ διεθνὲς συνέδριον τῶν μαθηματικῶν ἐν Oslo (1936), προβλήματα τῆς θεωρίας τῶν συμπλεγμάτων καμπύλων, ἥτις εἶναι εἰσέτι πολὺ ἀτελῶς γνωστή.

Ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει δεικνύει οὗτος, πῶς εἶναι δυνατὸν εἰς τυχὸν σύμπλεγμα καμπύλων νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, μέσῳ μιᾶς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, τὸ σύμπλεγμα τῶν χαρακτηριστικῶν καμπύλων τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀντιστοιχίας ταύτης εἰσάγει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἑστιακοῦ σμήνους τυχόντος συμπλέγματος καμπύλων· προχωρῶν δὲ θίγει τὸ ζήτημα τῆς ἐπεκτάσεως σχετικῶν ἐξαγομένων εἰς διάστημα πλειόνων τῶν τριῶν διαστάσεων.

[1] l. c. Chap. I, § 5.

[2] *M. Botasso*, Sur une solution du problème de Monge relatif à l'équation $f(dx_1, dx_2, \cdots dx_n) = 0$ à coefficients variables. C. R. Acad. de Sc. t. 140, 1905, p. 1579.