αἵτινες διὰ τοῦ ἐρεθισμοῦ, ὃν προκαλοῦσιν ἐπὶ τῶν ἱστῶν τοῦ βλαστοῦ, ἐξαναγκάζουσιν εἰς σχηματισμὸν ψευδοφθαλμῶν (βλαστομανία). Οὕτω ἑκάστη σχαδὼν καταλαμβάνει θέσιν εἰς τὴν βάσιν ἑκάστου ψευδοοφθαλμοῦ (σχ. 2ς). Ἐν τῇ θέσει ταύτῃ παραμένουσιν αἱ προνύμφαι μέχρι τοῦ τέλους Μαρτίου, ὁπότε μεταμορφοῦνται εἰς νύμφας (εἰκ. 2^{κ}), κατὰ δὲ τὰς ἀρχὰς Ἀπριλίου εἰς τέλεια ἔντομα (εἰκ. 2^{α}). Ἤτοι τὸ ἔντομον ἔχει μίαν γενεὰν ἐν τῷ ἔτει.

Τεχνητὰ μέσα καταπολεμήσεως. — Ὡς ἀνεφέραμεν, τὸ ἔντομον προτιμᾷ ὡρισμένας ποικιλίας ἀμυγδαλῆς καὶ ἐκ τῶν ἐπιδεκτικῶν τούτων τὰς εὑρισκομένας εἰς ὡρισμένην κατάστασιν βλαστήσεως. Πᾶσα συνεπῶς ἐργασία, ἥτις θὰ ἐξησφάλιζεν εὐρωστίαν εἰς τὰ δένδρα κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ᾠοτοκίας τοῦ ἐντόμου, θὰ συνετέλει εἰς τὴν καταπολέμησιν τοῦ ἐχθροῦ. Ἐπιβάλλεται ὅθεν πρὸς καταπολέμησιν τοῦ ἐντόμου λῆψις τῶν κάτωθι μέτρων: α′) Λίπανσις τῶν δένδρων δι᾽ ἀζωτούχων καὶ ἀνοργάνων λιπασμάτων, β′) ἀραίωσις τῆς βλαστήσεως δι᾽ ἀφαιρέσεως τὸν χειμῶνα κατὰ προτίμησιν τῶν προσβεβλημένων μερῶν, ἵνα ἐξοικονομηθῇ ἐνέργεια, γ′) προτίμησις πρωΐμων ποικιλιῶν, δ′) προτίμησις ἀνθεκτικῶν ποικιλιῶν καὶ ε′) μετατροπὴ δι᾽ ἐμβολιασμοῦ τῶν εὐπαθῶν ποικιλιῶν εἰς ἀνθεκτικὰς τοιαύτας.

Φυσικὰ μέσα καταπολεμήσεως τοῦ ἐντόμου. — Εὑρεθὲν παράσιτον ὑμενόπτερον, κατὰ τὰς παρατηρήσεις μας προσβάλλον τὰς προνύμφας τῆς κηκιδομυίας, προξενεῖ βεβαίως σοβαρὰς ζημίας ἐπὶ τοῦ ἐντόμου, πλὴν αἱ ἐκφεύγουσαι τὴν προσβολὴν προνύμφαι πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ἱκαναί, ὅπως προξενήσωσι σοβαρὰς ζημίας εἰς τὰ δένδρα καὶ μὴ θεωρηθῇ ἡ φυσικὴ αὕτη καταπολέμησις ἐπαρκής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. - **Sur l'intégration des équations de Monge***.

Par M. ***A. Tsortsis.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

---

1. Dans une Note récente aux C. R.[1] en utilisant une méthode de M. Goursat, concernant le problème d'intégration d'un système de Monge d'une forme particulière, j'ai communiqué quelques résultats relatifs au problème d'intégration d'une seule équation de Monge.

Je me propose d'indiquer, dans cette Note, quelques cas où les conditions d'intégration se présentent sous une forme très simple.

* Α. ΤΖΩΡΤΖΗ. - Περὶ τῆς ὁλοκληρώσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ Monge.

[1] *Comptes Rendus*, **189**, 1929, p. 561, (Séance du 16 Septembre).

2. Considérons une équation de Monge de la forme:

$$(1) \qquad f\left(x_1, \ldots x_n; \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1};$$

J'ai démontré[1] que, si l'on adjoint à cette équation $n-2$ équations nouvelles de la forme

$$(2) \qquad \frac{dx_\lambda}{dx_1} = \varphi_\lambda\left(x_1, \ldots x_n; \frac{dx_2}{dx_1}\right); \qquad (\lambda = 3, \ldots n)$$

telles que l'on ait

$$\Delta \left\| \frac{\partial^\varrho \varphi_3}{\partial \alpha^\varrho} \cdots \frac{\partial^\varrho \varphi_n}{\partial \alpha^\varrho} \right\| \neq 0; \qquad (\varrho = 2, \ldots n-1)$$

avec $\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha$, et si les fonctions φ_λ vérifient les conditions:

$$(3) \qquad \frac{d\Psi_i}{dx_k} = \frac{d\Psi_k}{dx_i} \qquad (i \neq k = 1, \ldots n)$$

pour

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x} + \sum_{\varrho_1=1}^{n-1} \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial^{\varrho_1} \varphi_\mu}{\partial \alpha_{\varrho_1}}\right)} \cdot \frac{\partial^{\varrho_1+1} \varphi_\mu}{\partial \alpha^{\varrho_1} \partial x}$$

avec

$$\Psi_1 = f - \alpha \frac{df}{d\alpha} - \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\Lambda_\mu}{\Delta}\left(\varphi_\mu - \alpha \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha}\right), \quad \Psi_2 = \frac{df}{d\alpha} - \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\Lambda_\mu}{\Delta} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha}$$

$$\Psi_\lambda = \frac{\Lambda_\lambda}{\Delta} \qquad (\lambda = 3, \ldots n)$$

et $\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha}$, Λ_λ désignant les déterminantes que l'on obtient en remplaçant les éléments de chaque colonne de Δ successivement par les quantités $\frac{d^2 f}{d\alpha^2} \cdots \frac{d^{n-1} f}{d\alpha^{n-1}}$; alors, dans ces conditions, on obtient l'intégrale de l'équation (1) en appliquant la méthode de M. Goursat au système de Monge (1), (2).

3. Soit d'abord une équation de Monge de la forme:

$$(4) \qquad f\left(x_1; \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1};$$

[1] Loc. cit., p. 562.

adjoignons les n—2 équations suivantes:

$$\frac{dx_\lambda}{dx_1} = \varphi_\lambda\left(x_1, \frac{dx_2}{dx_1}\right). \qquad (\lambda = 3, \ldots n)$$

Alors les conditions (3) se réduisent aux:

$$\frac{d\Psi_j}{dx_1} = 0 \quad . \qquad (j = 2, \ldots n)$$

et, en tenant compte des valeurs des Ψ_j, il vient

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{df}{d\alpha} - \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\alpha}\frac{\Lambda_\mu}{\Delta}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\Lambda_\lambda}{\Delta}\right) = 0\,. \quad (\lambda = 3, \ldots n)$$

Comme l'on a

$$\Lambda_\lambda = \sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho}\frac{d^\varrho f}{d\alpha^\varrho}\;; \qquad (\lambda = 3, \ldots n)$$

où $N_{\lambda,r}$ sont les mineures que l'on obtient de Δ en retranchant les éléments de $\lambda - 2$ colonne et de $r - 1$ ligne; on en déduit

$$(6)\begin{cases} (\mathrm{I}) & \dfrac{df}{d\alpha} = A(\alpha) + \displaystyle\sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\alpha} B_\mu(\alpha) \\ (\mathrm{II}) & \displaystyle\sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho}\frac{d^{\varrho-1}A}{d\alpha^{\varrho-1}} + \sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho}\frac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}}\left[\sum_{\mu=3}^{n}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\alpha}B_\mu(\alpha)\right] = \Delta B_\lambda(\alpha);\ (\lambda=3,\ldots n) \end{cases}$$

les fonctions de α: A, B_λ étant arbitraires.

Si l'on pose $A = C$, $B_\lambda = C_\lambda$: C, C_λ désignant des constantes, les équations (II) de (6) peuvent se mettre sous la forme

$$\sum_{\varrho=2}^{n-1}\sum_{\mu=3}^{n} N_{\lambda,\varrho}\frac{\partial^\varrho\varphi_\mu}{\partial\alpha^\varrho}C_\mu = \Delta C_\lambda \quad . \quad (\lambda = 3, \ldots n)$$

Or ces conditions sont verifiées car nous avons

$$\sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho}\frac{\partial^\varrho\varphi_\lambda}{\partial\alpha^\varrho} = \Delta\,, \quad \sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho}\frac{\partial^\varrho\varphi_\mu}{\partial\alpha^\varrho} = 0 \quad . \quad (\lambda \neq \mu = 3, \ldots n)$$

On en conclut que, la condition suffisante pour que l'on puisse intégrer l'équation (4), suivant la méthode indiquée, s'exprime, dans ce cas, par la relation (I) des (6).

4. Ce résultat peut être généralisé.

En effet, soit une équation de Monge prise sous la forme générale:

$$(7) \qquad f\left(x_1, \ldots x_\nu; \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1} \quad . \quad (\nu < n)$$

En joignant à cette équation les n-2 équations de la forme:

$$(8) \qquad \frac{dx_\lambda}{dx_1} = \varphi_\lambda\left(x_1, \ldots x_\nu; \frac{dx_2}{dx_1}\right) \qquad (\lambda = 3, \ldots n)$$

on voit que les conditions (3) correspondantes, relatives au système de Monge (7), (8) sont les suivantes:

$$\frac{d\Psi_1}{dx_u} = \frac{d\Psi_u}{dx_1}\ , \quad \frac{d\Psi_\vartheta}{dx_1} = 0\ . \qquad (1 \neq u = 1, \ldots \nu;\ \vartheta = \nu + 1, \ldots n)$$

Ces conditions sont évidemment verifiées suivant que:

$$(9) \quad \begin{cases} f - \alpha A_2 - \left[\sum\limits_{\mu_1=3}^{\nu} \varphi_{\mu_1} A_{\mu_1} + \sum\limits_{\mu_2=\nu+1}^{n} \varphi_{\mu_2} B_{\mu_2}\right] = A_1 \\ \dfrac{df}{d\alpha} - \left[\sum\limits_{\mu_1=3}^{\nu} \dfrac{\partial\varphi_{\mu_1}}{\partial\alpha} A_{\mu_1} + \sum\limits_{\mu_2=\nu+1}^{n} \dfrac{\partial\varphi_{\mu_2}}{\partial\alpha} B_{\mu_2}\right] = A_2 \\ \Lambda_\xi = \Delta A_\xi\ , \quad \Lambda_\vartheta = \Delta B_\vartheta \qquad (\xi = 3, \ldots \nu;\ \vartheta = \nu + 1, \ldots n) \end{cases}$$

A_u ($u = 1, \ldots \nu$) désignant des fonctions arbitraires des x_u et de α et B_ϑ ($\vartheta = \nu + 1, \ldots n$) des fonctions arbitraires de α.

Les relations (9) peuvent encore s'écrire comme il suit:

$$(10) \quad \begin{cases} f - A_1 - \alpha A_2 - \left[\sum\limits_{\mu_1=3}^{\nu} \varphi_{\mu_1} A_{\mu_1} + \sum\limits_{\mu_2=\nu+1}^{n} \varphi_{\mu_2} B_{\mu_2}\right] = 0 \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha} + \alpha \dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha} + \sum\limits_{\mu_1=3}^{\nu} \varphi_{\mu_1} \dfrac{\partial A_{\mu_1}}{\partial\alpha} + \sum\limits_{\mu_2=\nu+1}^{n} \varphi_{\mu_2} B'_{\mu_2} = 0 \\ \sum\limits_{\varrho=2}^{n-1} N_{h,\varrho} \dfrac{\partial^{\varrho-1} A_2}{\partial\alpha^{\varrho-1}} + \sum\limits_{\varrho=2}^{n-1} N_{h,\varrho} \dfrac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}} \left(\sum\limits_{\mu_1=3}^{\nu} \dfrac{\partial\varphi_{\mu_1}}{\partial\alpha} A_{\mu_1}\right) + \\ \sum\limits_{\varrho=2}^{n-1} N_{h,\varrho} \dfrac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}} \left(\sum\limits_{\mu_2=\nu+1}^{n} \dfrac{\partial\varphi_{\mu_2}}{\partial\alpha} B_{\mu_2}\right) = \Delta H_h \end{cases}$$

où $h = \xi, \vartheta$ ($\xi = 3, \ldots \nu$; $\vartheta = \nu + 1, \ldots n$), $H_\xi \equiv A_\xi$, $H_\vartheta \equiv B_\vartheta$, $N_{h,r}$ ayant la signification mentionnée ci-dessus.

Donc lorsque les fonctions $\varphi_{\lambda 2}$ vérifient la première des relations (10) alors en posant $A_u(x_u, \alpha) \equiv X_u(x_u)$, $B_\vartheta(\alpha) \equiv C_\vartheta$, C_ϑ étant des constantes, les relations en question se trouvent vérifiées.

5. Si l'on considère l'équation (7) en supposant que $\nu = n$ un procédé analogue à celui du § 4 nous conduit au même résultat.

En effet, on doit avoir dans ce cas les conditions (3) et les relations (9) correspondantes sont les suivantes:

$$f - \alpha A_2(x_2, \alpha) - \sum_{\mu=3}^{n} \varphi_\mu A_\mu(x_\mu, \alpha) = A_1(x_1, \alpha)$$

$$\frac{df}{d\alpha} - \sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha} A_\mu(x_\mu, \alpha) = A_2(x_2, \alpha), \quad \Lambda_\lambda = \Delta A_\lambda(x_\lambda, \alpha) \quad ; \quad (\lambda = 3, \ldots n)$$

ou bien

$$f - A_1 - \alpha A_2 - \sum_{\mu=3}^{n} \varphi_\mu A_\mu = 0$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + \sum_{\mu=3}^{n} \varphi_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial \alpha} = 0$$

$$\sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho} \frac{\partial^{\varrho-1} A_2}{\partial \alpha^{\varrho-1}} + \sum_{\varrho=2}^{n-1} N_{\lambda,\varrho} \frac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}} \left(\sum_{\mu=3}^{n} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha} A_\mu \right) = \Delta A_\lambda \; .$$

Si l'on pose $A_i(x_i, \alpha) \equiv X_i(x_i)$ pour $i = 1, \ldots n$ ces relations se trouvent vérifiées pourvu que la première seulement existe.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ κ. Τζώρτζης ἐθεώρησεν ἐξίσωσιν τοῦ Monge μορφῆς

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n; \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1},$$

καὶ ἀπέδειξεν, εἰς μίαν τελευταίως δημοσιευθεῖσαν ἀνακοίνωσίν του εἰς τὰ πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων, ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσίς της δύναται νὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ τῆς κλασικῆς μεθόδου τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ κ. Goursat, ἂν προσαρτήσωμεν εἰς αὐτὴν $n-2$ βοηθητικὰς ἐξισώσεις πληρούσας ὡρισμένας συνθήκας, ἃς ὁ συγγραφεὺς δίδει εἰς τὴν ἐν λόγῳ ἀνακοίνωσίν του.

Ἐπειδὴ ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως τοῦ Monge ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν συνθηκῶν, ἃς αἱ βοηθητικαὶ ἐξισώσεις πληροῦσιν, ὁ κ. Τζώρτζης ἐζήτησε καὶ ἐπέτυχεν ἁπλούστευσιν τῶν ἐν λόγῳ συνθηκῶν, ἃς ἀνακοινοῖ εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν του.

Οὕτω πως δυνάμεθα δεδομένης μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ Monge νὰ διακρίνωμεν κατὰ πόσον ἡ μέθοδος τοῦ κ. Goursat εἶναι ἐφαρμόσιμος καὶ συνεπῶς ἡ ὁλοκλήρωσίς της δυνατή.

Κ. Α. Κς