ΦΥΣΙΚΗ.— Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik*, *von* ***A. Papapetrou.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Für ein isoliertes materielles System besagt der Schwerpunktsatz, dass der Schwerpunkt des Systems sich geradlinig gleichförmig bewegt; und der Drehimpulssatz, dass der Drehimpuls in bezug auf einen beliebigen Punkt konstant bleibt. Mit derselben Formulierung bleiben beide Sätze auch in der relativistischen Mechanik gültig[1].

In der Newtonschen Mechanik ist der Schwerpunkt und seine Bahn absolut bestimmt, ohne irgendeinen Einfluss des Koordinatensystems, in welchem die Bewegung des materiellen Systems beschrieben wird. Es entsteht nun die Frage, ob diese Unabhängigkeit auch in der relativistischen Mechanik existiert. Die Beantwortung dieser Frage bildet im wesentlichen das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Es werden zunächst Schwerpunkt- und Drehimpulssatz in einem gemeinsamen Erhaltungssatz zusammengefasst. Daraus wird sich dann ergeben, dass der Schwerpunkt sich bei Koordinatentransformationen im allgemeinen ändert, wenn das betrachtete materielle System einen inneren Drehimpuls (d. h. in bezug auf seinen Schwerpunkt) besitzt; ferner wird sich daraus auch das Verhalten dieses inneren Drehimpulses bei Koordinatentransformationen ergeben.

2. Der Beweis wird ähnlich wie die Aufstellung des Energie-Impulssatzes verlaufen; deshalb wollen wir zunächst kurz erinnern, wie man letzteren Satz beweist. Man geht von den Gleichungen aus, denen der Materietensor T_α^β in der speziellen Relativität genügt:

$$\frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} = 0, \tag{1}$$

und integriert sie auf einer Hyperebene $x_4 = ict = \text{const.}$ Nimmt man dann an, dass das materielle System endliche Raumdimensionen besitzt, so verschwinden bei der Integration die den drei räumlichen Koordinaten x^β ($\beta = 1, 2, 3$) entsprechenden Terme von (1), und es bleibt schliesslich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_\alpha^4 dv = 0, \qquad dv = dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{2}$$

Der Satz wird durch die auf Grund des Gausschen Satzes zu beweisende

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ.– Κινητικὴ ροπὴ καὶ κέντρον βάρους εἰς τὴν εἰδικὴν σχετικότητα.

[1] Vgl. M. VON LAUE, Die Relativitätstheorie, **1**, S. 227, Vieweg 1921. Ähnlich lässt sich auch der Schwerpunktsatz beweisen.

Eigenschaft ergänzt, dass die Integrale in (2) sich bei Koordinatentransformationen wie die kovarianten Komponenten eines Vierervektors verhalten:

$$\int T_\alpha^4 \, dv = i c G_\alpha. \tag{3}$$

Dabei stellen die drei ersten Koordinaten G_α den Impuls dar, während die vierte der Energie entspricht:

$$(G_1, G_2, G_3) = \vec{G}, \qquad G_4 = i \frac{E}{c}. \tag{3a}$$

3. Man kann nun einen Tensor dritten Ranges einführen, welcher ebenfalls Gleichungen der Form (1) genügt. Man wähle einen festen Bezugspunkt, sei es den Punkt (ξ_α), und ordne dann jedem Weltpunkt (x_α) den Vektor

$$l_\alpha = x_\alpha - \xi_\alpha \tag{4}$$

zu. Bildet man jetzt mit l_α und T_α^β den Tensor

$$F_{\alpha\beta}^\gamma = l_\alpha T_\beta^\gamma - l_\beta T_\alpha^\gamma, \tag{5}$$

so gilt für ihn nach (1) und (4):

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} = 0. \tag{6}$$

Es folgt nun aus (6) genau wie bei dem Energie-Impulssatz, dass die für $t = \text{const.}$ berechneten Grössen

$$J_{\alpha\beta} = -\frac{i}{c} \int \left(l_\alpha T_\beta^4 - l_\beta T_\alpha^4 \right) dv \tag{7}$$

von der Zeit unabhängig sind:

$$\frac{\partial J_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Sie sind also bei festgelegtem Koordinatensystem nur vom Bezugspunkt (ξ_α) abhängig. Ferner lässt sich ebenfalls wie im Falle des Energie-Impulssatzes beweisen, dass die Grössen $J_{\alpha\beta}$ sich bei Koordinatentransformationen wie die kovarianten Komponenten eines Tensors zweiten Ranges verhalten. Letztere Eigenschaft wurde schon in (7) durch die Verwendung der üblichen Tensorbezeichnung berücksichtigt. Der Faktor $-\frac{i}{c}$ wurde in (7) um zweckmässigere Gestaltung der folgenden Ergebnisse eingeführt.

4. Wir gehen zur Deutung des Tensors $J_{\alpha\beta}$ über. Es handelt sich nach (7) um einen antisymmetrischen Tensor, mit drei rein räumlichen und drei

gemischten (raumzeitlichen) Komponenten. Bei den räumlichen treten in (7) die gemischten Komponenten T_α^4 des Materietensors ein, welche mit der Impulsdichte zusammenhängen:

$$T_\alpha^4 = i c g_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Es ergibt sich z. B. für J_{23}:

$$J_{23} = \int (l_2 g_3 - l_3 g_2)\, dv = \int [\vec{l}\,\vec{g}]_x\, dv.$$

Die drei räumlichen Komponenten $J_{\alpha\beta}$ sind also mit den Komponenten des gewöhnlichen 3-dimensionalen Drehimpulsvektors des materiellen Systems (für den gewählten Bezugspunkt ξ_α) identisch:

$$(J_{23}, J_{31}, J_{12}) = \int [\vec{l}\,\vec{g}]\, dv = \vec{J}. \tag{9}$$

Für die Deutung der gemischten Komponenten setzen wir

$$\xi_4 = i c \tau,$$

und führen noch die Massendichte ϱ und die Gesamtmasse μ des Systems ein:

$$\varrho = -\frac{T_4^4}{c^2}, \quad \mu = \int \varrho\, dv = \frac{E}{c^2}. \tag{10}$$

Es ergibt sich:

$$J_{\alpha 4} = i c \left[\int \varrho\, x_\alpha\, dv - \xi_\alpha \mu - (t - \tau)\, G_\alpha\right]. \tag{11}$$

Das Integral in der Klammer hängt mit der Koordinate s_α des Schwerpunktes zusammen:

$$\int \varrho x_\alpha dv = s_\alpha \mu, \qquad s_\alpha = s_\alpha(t). \tag{12}$$

Es wird also schliesslich:

$$J_{\alpha 4} = i c \left[(s_\alpha - \xi_\alpha)\, \mu - (t - \tau)\, G_\alpha\right], \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{13}$$

oder symmetrischer:

$$\left.\begin{aligned} J_{\alpha 4} &= (s_\alpha - \xi_\alpha)\, G_4 - (s_4 - \xi_4)\, G_\alpha; \\ G_4 &= i c \mu, \quad s_4 = i c t. \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Nimmt man $t = \tau$ an, so folgt z. B. aus (11):

$$J_{\alpha 4} = i c \int \varrho\, (x_\alpha - \xi_\alpha)\, dv = i c M_\alpha. \tag{14}$$

Die gemischten Komponenten $J_{\alpha 4}$ sind also, bis auf den Faktor ic, mit den statischen Momenten M_α des materiellen Systems für den Bezugspunkt (ξ_α) und den Zeitpunkt $t = \tau$ identisch. Den Ergebnissen (9) und (14) entsprechend werden wir $J_{\alpha\beta}$ als den *Momententensor* des materiellen Systems bezeichnen.

Wendet man nun den Erhaltungssatz (8) zunächst auf (9) an, so folgt, dass der Drehimpuls des materiellen Systems konstant bleibt:

$$\vec{J} = \int [\vec{l}\,\vec{g}]\, dv = \text{const.} \tag{15}$$

Dann folgt aus (13), da auf der rechten Seite nur die Grösse s_α von t abhängt:

$$\mu \frac{ds_\alpha}{dt} = G_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{16}$$

welche Beziehungen den Schwerpunktsatz darstellen. Es ist dadurch gezeigt, dass im Erhaltungssatz (8) gleichzeitig Drehimpuls- und Schwerpunktsatz enthalten sind.

5. Gln. (16) zusammen mit

$$\mu \frac{ds_4}{dt} = i c \mu - G_4$$

zeigen, dass sich der Schwerpunkt auf einer dem Viererverktor G_α parallelen Gerade bewegt, die man als Schwerpunktslinie des materiellen Systems bezeichnen kann. Sei nun als Bezugspunkt ein Punkt der Schwerpunktslinie gewählt:

$$\xi_\alpha = s_\alpha^* .$$

Dann wird für $t = t^*$:

$$s_\alpha = s_\alpha^* = \xi_\alpha ;$$

folglich nach (13a):

$$J_{\alpha 4} = 0, \tag{17}$$

was dann wegen (8) auch für alle t gilt. Sind umgekehrt Gln. (17) für einen Bezugspunkt (ξ_α) erfüllt, dann liegt dieser auf der Schwerpunktslinie. Nimmt man nämlich $t = \tau$, dann wird zunächst

$$i c \tau = i c t, \qquad \text{d. h. } s_4 = \xi_4,$$

während andererseits wegen der Annahme (17) nach (13):

$$s_\alpha = \xi_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3;$$

(ξ_α) ist also die Lage des Schwerpunktes am Zeitpunkt $t = \tau$. Wir kommen somit zu dem Satz: Die Schwerpunktslinie ist der geometrische Ort der Weltpunkte, in bezug auf welche die gemischten Komponenten des Momententensors verschwinden. Die Bedingungen (17) sind also den Gleichungen der Schwerpunktslinie gleichwertig.

Wir verfolgen noch, wie sich die Komponenten $J_{\alpha\beta}$ mit dem Bezugspunkt (ξ_α) ändern. Sei $(\xi_\alpha + \delta\xi_\alpha)$ der neue Bezugspunkt. Es ergibt sich unmittelbar aus (7):

$$J_{\alpha\beta}(\xi + \delta\xi) = J_{\alpha\beta}(\xi) + G_\alpha \delta\xi_\beta - G_\beta \delta\xi_\alpha. \tag{18}$$

Daraus folgt, dass für eine dem Vektor (G_α) parallele Verschiebung $(\delta\xi_\alpha)$ die Änderungen $\delta J_{\alpha\beta}$ verschwinden: Auf einer beliebigen, dem Vektor (G_α) parallelen Gerade bleibt der Momententensor unverändert. Durch diesen Satz lässt sich die vorher aufgestellte, durch (17) ausgedrückte Eigenschaft der Schwerpunktslinie wie folgt ergänzen: Auf der Schwerpunktslinie bleibt der Drehimpuls unverändert.

Sei x_o das Koordinatensystem, in welchem der Impuls des materiellen Systems verschwindet[1]:

$$G_{o1} = G_{o2} = G_{o3} = 0, \qquad G_{o4} = i\frac{E_o}{c} = i\mu c. \tag{19}$$

In x_o ruht also das materielle System als ganzes, und führt nur eine innere Bewegung aus. Es folgt nun unmittelbar aus (18), dass bei dieser Bewegung der Drehimpuls des Systems vom Bezugspunkt unabhängig ist:

$$\vec{J}(\xi + \delta\xi) = \vec{J}(\xi) = \vec{J}_o. \tag{20}$$

Dieser rein *innere Drehimpuls* wird für die folgenden Betrachtungen von Bedeutung.

6. Wir kommen schliesslich zur Untersuchung der Frage, wie sich der Schwerpunkt und der Drehimpuls bei Koordinatentransformationen verhalten. Dafür genügt es offenbar, den Übergang vom Ruhsystem x_o zu einem System x zu untersuchen, in bezug auf welchen sich das Ruhsystem x_o mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ bewegt. Einfachheitshalber werden wir annehmen, dass der Anfangspunkt von x_o mit dem Schwerpunkt des materiellen Systems zusammenfällt. Dann ist die Schwerpunktslinie in x_o mit der x_{o4}- Achse identisch, so dass für einen beliebigen Punkt dieser Achse der Momententensor wegen (17) von der Form

$$J_{23} = J_{ox}, \quad J_{31} = J_{oy}, \quad J_{12} = J_{oz}, \quad \text{sonst } J_{\alpha\beta} = 0 \tag{21}$$

[1] Die Existenz von x_o ist der Forderung eines zeitartigen (G_α) gleichwertig:

$$G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 - \frac{E^2}{c^2} < 0, \tag{α}$$

und dies ist die Bedingung dafür, dass die Energie in irgendeinem Koordinatensystem positiv bleibt. Auch der zu (α) entgegengesetzte Fall scheint mit Gln. (1) verträglich zu sein, hat aber wahrscheinlich keine physikalische Bedeutung.

sein wird. Wir berechnen nun den Momententensor für denselben Bezugspunkt im Koordinatensystem x. Die Transformationsformeln lauten:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = \frac{x_{01} - i\beta x_{04}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2 = x_{02}, \quad x_3 = x_{03}, \\ & x_4 = \frac{i\beta x_{01} + x_{04}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Daraus folgt für die Grössen (21), die sich wie die Produkte der entsprechenden Koordinaten transformieren:

$$\left.\begin{aligned} & J_{23} = J_{ox}, \quad J_{31} = \frac{J_{oy}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad J_{12} = \frac{J_{oz}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ & J_{14} = 0, \quad J_{24} = -\frac{i\beta J_{oz}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad J_{34} = +\frac{i\beta J_{oy}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right| \tag{23}$$

Die Komponenten $J_{\alpha 4}$ sind jetzt im allgemeinen von Null verschieden, die Schwerpunktslinie in x_o ist also von der Schwerpunktslinie in x verschieden: *Es gibt keine bestimmte Weltlinie, welche die Bewegung des Schwerpunktes beschreiben würde.*

Man kann nun leicht die Schwerpunktslinie für das Koordinatensystem x bestimmen. Es genügt dafür eine Verschiebung $(\delta\xi_\alpha)$ anzugeben, welche die Komponenten $J_{\alpha 4}$ nach (18) zum Verschwinden bringt. Berücksichtigt man, dass nach (19) und (22)

$$G_1 = \frac{\mu_o v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad G_2 = G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{i\mu_o c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24}$$

ist, so wird aus (18) und (23):

$$J_{14}(\delta\xi) = -\delta\xi_1 G_4 + G_1 \delta\xi_4,$$

$$J_{24}(\delta\xi) = -\frac{i\beta J_{oz}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \delta\xi_2 G_4, \quad J_{34} = +\frac{i\beta J_{oy}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \delta\xi_3 G_4.$$

Man kann also die Bedingungen $J_{\alpha 4} = 0$ durch folgende Verschiebung erfüllen:

$$\delta\xi_2 = s_y = -\frac{v J_{oz}}{\mu_o c^2}, \quad \delta\xi_3 = s_z = +\frac{v J_{oy}}{\mu_o c^2}, \quad (\delta\xi_1 = \delta\xi_4 = 0). \tag{25}$$

Die Schwerpunktslinie in x geht durch den Punkt (25) und ist dem Vektor (G_α) parallel. Nun ist aber die Verschiebung (25) zu (G_α) nach (24) senkrecht, so dass (25) unmittelbar die wirkliche Verschiebung der Schwerpunktslinie beim Übergang $x_o \rightarrow x$ darstellt. Man kann (25) auch vektoriell schreiben:

$$\vec{s} = \frac{[\vec{v}\,\vec{J}_o]}{E_o}. \tag{25a}$$

Wir berechnen noch die Änderung des Drehimpulses bei der Verschiebung (25), mit anderen Worten den *inneren* Drehimpuls im Koordinatensystem x. Es ergibt sich nach (18) und (23):

$$\left.\begin{aligned} J_{23}(\delta\xi) = J_{ox}, \quad J_{31}(\delta\xi) = \frac{J_{oy}}{\sqrt{1-\beta^2}} - s_z G_1 = J_{oy}\sqrt{1-\beta^2}\,, \\ J_{12}(\delta\xi) = J_{oz}\sqrt{1-\beta^2}\,. \end{aligned}\right| \qquad (26)$$

Diese Formeln lassen sich übersichtlicher schreiben, wenn man den inneren Drehimpuls in Komponenten senkrecht und parallel zu $\vec{v}$ zerlegt:

$$J_{\parallel} = J_{o\parallel}\,, \quad J_{\perp} = J_{o\perp}\sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (26a)$$

7. Formel (25a) zeigt, dass bei gegebenem v die grösste Verschiebung der Schwerpunktslinie dem Fall $\vec{v} \perp \vec{J}_o$ entspricht, wobei gilt:

$$s = \frac{v J_o}{\mu_o c^2}\,, \quad \vec{s} \perp \vec{J}_o\,.$$

Berücksichtigt man noch, dass $v \leqslant c$ ist[1], so ergibt sich der Satz: Alle möglichen Schwerpunktslinien eines gegebenen materiellen Systems füllen einen Zylinder aus, dessen Achse die Schwerpunktslinie der rein inneren Bewegung (d. h. die x_{o4}-Achse) ist, während die Grundfläche im dreidimensionalen Raum senkrecht zu $\vec{J}_o$ liegt und folgenden Radius hat:

$$r = \frac{J_o}{\mu_o c}\,. \qquad (27)$$

Besitzt das materielle System keinen inneren Drehimpuls, J_o 0, so folgt aus (27), oder auch unmittelbar aus (25a), dass sein Schwerpunkt vom Koordinatensystem unabhängig ist: Seine Bewegung wird durch eine bestimmte Weltlinie beschrieben. In jedem anderen Fall ist ein durch die

---

[1] Sind die Geschwindigkeiten innerhalb des Systems von der Grössenordnung v, und die linearen Dimensionen des Systems von der Grössenordnung R, so gilt:

$$J_o \approx \mu_o v R\,, \quad s \approx \frac{v^2}{c^2} R = \beta^2 R\,.$$

Ist also $\beta \ll 1$, so wird die Verschiebung s des Schwerpunktes wie β^2 gegen Null streben; und dasselbe gilt nach (26) auch für die Änderung des inneren Drehimpulses. Diese Bemerkung liefert den Anschluss an die Newtonsche Mechanik, wobei Schwerpunkt und Drehimpuls vom Koordinatensystem unabhängig sind.

Länge (27) charakterisierter Spielraum für die Lage des Schwerpunktes vorhanden.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Οἱ νόμοι τοῦ κέντρου βάρους καὶ τῆς κινητικῆς ροπῆς ἰσχύουν καὶ ἐν τῇ μηχανικῇ τῆς εἰδικῆς σχετικότητος. Εἰς μεμονωμένον ὑλικὸν σύστημα τὸ κέντρον βάρους κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς, ἡ δὲ κινητικὴ ροπὴ παραμένει σταθερά. Ἀποδεικνύεται ἤδη, ὅτι οἱ δύο αὐτοὶ νόμοι δύνανται νὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἀκόλουθον ἑνιαίαν διατύπωσιν: Ὑπάρχει εἷς τανυστὴς β΄ τάξεως, ὁ *τανυστὴς ροπῶν* τοῦ ὑλικοῦ συστήματος, ὁ ὁποῖος παραμένει σταθερὸς ἐν τῷ χρόνῳ. Οὗτος εἶναι εἷς ἀντισυμμετρικὸς τανυστής, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς καθαρῶς χωρικαὶ συνιστῶσαι ταυτίζονται μὲ τὰς τοῦ διανύσματος τῆς κινητικῆς ροπῆς, ἐνῷ αἱ τρεῖς μικταὶ συνιστῶσαι σχετίζονται μὲ τὰς στατικὰς ροπὰς τοῦ συστήματος καὶ ὁδηγοῦν εἰς τοὺς νόμους τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους.

Ἡ περαιτέρω διερεύνησις δεικνύει, ὅτι τὸ κέντρον βάρους δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀναφορᾶς, ἀλλὰ μεταβάλλεται ἐν γένει ὅταν μεταβῶμεν ἀπὸ ἓν σύστημα ἀναφορᾶς εἰς ἄλλο. Μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἐσωτερικὴ κινητικὴ ροπὴ τοῦ ὑλικοῦ συστήματος εἶναι μηδενική, τὸ κέντρον βάρους εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.—Προσδιορισμὸς τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος εἰς τὰ γλεύκη διὰ τῆς ἠλεκτρικῆς ἀγωγιμότητος*, *ὑπὸ* ***Ἀθανασίου Δ. Λακκοπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Ζέγγελη.

Ἡ ἀνίχνευσις καὶ ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος εἰς τὰ γλεύκη καὶ τοὺς οἴνους ἐνεργεῖται συνήθως διὰ τῆς μεθόδου Denigés ἥτις τυγχάνει καὶ ἐπίσημος μέθοδος. Ὁ ποσοτικὸς προσδιορισμὸς τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐνεργεῖται διὰ παραβολῆς πρὸς διαλύματα γνωστῆς περιεκτικότητος εἰς κιτρικὸν ὀξύ. Ἑτέρα μέθοδος πρὸς ἀνίχνευσιν τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος εἶναι ἡ μέθοδος Stahre τροποποιηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Kunz καθ' ἣν ἡ παρουσία τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος ἐλέγχεται ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ πενταβρωμακετόνης. Ἡ μέθοδος αὕτη κατὰ τροποποίησιν ὑπὸ τοῦ O. Krug χρησιμοποιεῖται καὶ πρὸς ποσοτικὸν προσδιορισμόν. Ἐπίσης μέθοδος πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος εἶναι ἡ μέθοδος Mösslinger, τροποποιηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Krüg, καθ' ἣν τὸ κιτρικὸν ὀξὺ μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ τρυγικοῦ, καταβυθίζεται διὰ κεκορεσμένου διαλύματος ὀξεικοῦ μολύβδου. Περαιτέρω τροποποίησις τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κιτρικοῦ ὀξέος ὡς κιτρικοῦ ἀσβεστίου.

Ὁ Muttelet ἐπρότεινεν ἰδίαν μέθοδον σταθμικοῦ προσδιορισμοῦ μετὰ τὴν ἀπο-

* **ATHAN. D. LAKKOPOULOS.—Dosage de l'acide citrique dans les moûts par la méthode des conductibilités électriques.**