ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.— Ἐπὶ θεμάτων τινῶν τῆς ἀπροσδιορίστου Ἀναλύσεως*, *ὑπὸ τοῦ κ. Κωνσταντίνου Χ. Γεωργικοπούλου.*

Τὴν σύγχρονον ἔρευναν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ P. de Fermat, χαρακτηρίζει τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐνῷ γίνεται χρῆσις λίαν ἐξειλιγμένων μεθόδων, ἀπορρεουσῶν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν σωμάτων καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἰδεωδῶν, αἵτινες δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσι γνωσταὶ παρὰ τῷ Fermat, οὐδαμοῦ ἐμφανίζεται ἡ προσφιλὴς εἰς τὸν Fermat μέθοδος τῆς ἀτέρμονος καθόδου (τῆς descente infinie), ἐφ' ἧς κατὰ τεκμήριον ἐστήριξεν ὁ μαθηματικὸς οὗτος τὴν demonstrationem mirabilem τοῦ θεωρήματός του[1]. Συνάγομεν ἐκ τούτου ὅτι ἄγνωστον μὲν εἶναι πόσον πλησίον πρὸς μίαν πλήρη ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, πάντως ὅμως εὑρισκόμεθα πολὺ

* **CONST. GEORGIKOPOULOS.—Sur quelques questions d'Analyse indéfinie.**

[1] Ὡς γνωστόν, τὸ θεώρημα τοῦ P. de Fermat εὑρίσκεται ἐν τῇ Λατινικῇ ἐκδόσει τῶν διοφαντείων ἀριθμητικῶν, ὑπὸ τὸν τίτλον:

Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus, cum commentariis C. G. Bacheti et observationibus D. P. de Fermat, senatoris Tolosani.

Ἡ ἔκδοσις αὕτη ἐγένετο ἐπιμελείᾳ τοῦ υἱοῦ του, ἐν ἔτει 1670, ὀλίγον δηλ. μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Pierre de Fermat, περιλαμβάνει δὲ ὡς ἐκ τοῦ τίτλου δηλοῦται, παρατηρήσεις αὐτοῦ, εὑρεθείσας ὡς σημειώσεις ἐπὶ τοῦ περιθωρίου μιᾶς προγενεστέρας ἐκδόσεως τῆς διοφαντείου συγγραφῆς. Ἡ δὲ σχετικὴ πρὸς τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα παρατήρησις ἔχει ὡς ἑξῆς:

Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Ἡ ἔλλειψις ἐπαρκοῦς περιθωρίου ἐν τῇ πρώτῃ Λατινικῇ ἐκδόσει τοῦ Διοφάντου ἐστέρησεν οὕτω τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην τῆς θαυμαστῆς ἀποδείξεως τοῦ Fermat, ματαία δὲ ἀπέβη μέχρι τοῦ νῦν ἡ ἀναζήτησις εἴτε νέας τινὸς ἀποδείξεως εἴτε μιᾶς ἔστω περιπτώσεως, καθ' ἣν τὸ θεώρημα τοῦ Fermat ἠδύνατο ν' ἀποδειχθῇ σφαλερόν. Περὶ τῶν προσπαθειῶν τούτων λέγει ὁ Bachmann (Das Fermatproblem): «Ἐὰν ρίψωμεν ἓν βλέμμα ἐπὶ τῶν ἀναπτύξεών μας, *πρέπει νὰ καταπλαγῶμεν διὰ τὴν τεραστίαν ἀνάλωσιν πνευματικῆς ἐργασίας, ἣν ἐστοίχισε τὸ πρόβλημα τοῦ Fermat, χωρὶς νὰ φθάσωμεν εἰς λύσιν*. . . . Εἶναι λίαν ἀξιοσημείωτον ὅτι εἰς τὰς προσπαθείας ταύτας *οὐδαμοῦ παρέχεται εὐκαιρία τις, μία κἂν λαβή, πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς descente infinie*, ἣν ἐχρησιμοποίει ὁ Fermat μὲ ἰδιαιτέραν στοργὴν *καὶ τὴν ὁποίαν κατὰ μεγίστην πιθανότητα ἠκολούθησεν ἐν προκειμένῳ*. Ἡ ἀπόδειξίς του θὰ ἔπρεπεν ὑπὸ τοιούτους ὅρους, ἂν μὴ ἐσφαλμένη, νὰ ἦναι ὄντως ἀξιοθαύμαστος, *εἴτε νὰ στηρίζηται ἐπὶ ἄλλων ἀρχῶν, ἀπὸ τὰς μέχρι σήμερον ἐφαρμοσθείσας*».

Πράγματι, ἂν καὶ οὐδὲν ἴχνος ὑπάρχει, ἐν οἷς ὁ Fermat κατέλιπε, περὶ τῆς συγκεκριμένης μορφῆς τῆς ἀποδείξεώς του, ἐν τούτοις ἐν ἐπιστολῇ πρὸς τὸν Carcavi ὁμιλεῖ οὗτος ἐκτενῶς περὶ τῆς μεθόδου, ἣν καλεῖ descente infinie προσθέτων: «Ἐδοκίμασα κατόπιν θέματά τινα, ἅτινα καίτοι περιεχομένου ἀρνητικοῦ, δὲν παύουν νὰ ἐμφανίζουν μεγίστην δυσκολίαν, la methode pour y pratiquer la descende étant tout à fait diverse» *μεταξὺ δὲ τῶν θεμάτων τούτων ἀναφέρει εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ ἐν λόγῳ θεωρήματος*. Ἐξ ἄλλου ἐν σημειώσει 45ῃ ἐν τῷ περιθωρίῳ τοῦ διοφαντείου ἔργου *ἀναφέρει ἑτέραν ἐφαρμογὴν τῆς αὐτῆς μεθόδου ἐπὶ ἄλλης εἰδικῆς περιπτώσεως τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος*, μὲ τὴν προσθήκην: «θέλω δώσει ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης, ἣν ἀνεκάλυψα καὶ δὲν ἀνεκάλυψα αὐτὴν χωρὶς ἐργώδη καὶ ἐπίπονον προσπάθειαν».

μακρὰν τῶν μεθόδων, δι' ὧν ὁ Fermat ἀνεκάλυψε τὴν «θαυμαστὴν» ἀπόδειξίν του. Ἡ παροῦσα ἐργασία προχωρεῖ πρὸς μίαν κατεύθυνσιν (καθόσον τοὐλάχιστον γνωρίζω μήπω δοκιμασθεῖσαν), ἥτις, καὶ ἐφ' ὅσον ἀναπτύσσεται ἐνταῦθα καὶ ἐφ' ὅσον θέλει ἐφεξῆς ἀναπτυχθῇ, βασίζεται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ἀτέρμονος καθόδου καὶ ἴσως ἐκ τοῦ λόγου τούτου εὑρίσκεται ἐγγύτερον τῶν ἀποδεικτικῶν μέσων τοῦ P. de Fermat.

Ἡ σύγχρονος ἔρευνα ἀναχωρεῖ γενικῶς ἀπὸ τῆς ἀκολούθου σκέψεως:

Ἂν ἡ ἰσότης:

$$x^n + y^n + z^n = 0 \qquad 1$$

πληροῦται διὰ σύστημά τι ἀκεραίων $x, y, z \lesseqgtr 0$, πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ n πρῶτον > 2, ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων:

$$y^n + z^n, \qquad z^n + x^n, \qquad x^n + y^n$$

θὰ εἶναι μία n δύναμις ἀκεραίου.

Ἀλλά:

$$y^n + z^n = (y+z)\,\frac{y^n + z^n}{y+z}$$

Ἐπειδὴ δὲ—ὑπὸ τὰς τεθείσας προϋποθέσεις—μεταξὺ τῶν παραγόντων $y+z$ καὶ $\frac{y^n + z^n}{y+z}$ οὐδεὶς ὑπάρχει κοινὸς παράγων, πλὴν ἐνδεχομένως τοῦ n, συμπεραίνεται ὅτι εἴτε ὁ ἀριθμὸς $y+z$, εἴτε ὁ $\frac{1}{n^{kn-1}}(y+z)$ εἶναι μία n δύναμις ἀκεραίου καὶ ὁμοίως ὁ $\frac{y^n + z^n}{y+z}$ εἴτε ἀντιστοίχως ὁ $n^{kn-1} \cdot \frac{y^n + z^u}{y+z}$.

Ὡς πρὸς τὸν παράγοντα $\frac{y^n + z^n}{y+z}$ εἶναι περαιτέρω γνωστὸν ὅτι δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἐν τῇ δυαδικῇ τετραγώνῳ μορφῇ:

$$\frac{1}{4}\left(Y^2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n.\, Z^2\right) \qquad 2$$

ἔνθα Y καὶ Z ἀκέραιαι εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς συναρτήσεις τῶν y καὶ z, ὅτι δὲ ἐπὶ πλέον ἡ τελευταία ἔκφρασις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς παράγοντας:

$$\frac{Y + Z\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}}{2}, \qquad \frac{Y - Z\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}}{2}$$

οἵτινες εἶναι ἀκέραιοι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ σώματος τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τοῦ μεγέθους:

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}$$

Ἀκριβῶς δ' ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τῶν ἰδεωδῶν ἀπέβλεψε κατὰ πρῶτον εἰς τὴν εὕρεσιν μονοσημάντου διαιρετότητος ἐν τῷ σώματι τούτῳ διὰ n πρῶτον > 3.

Ἀντὶ τῆς σειρᾶς τῶν ὑποχρεώσεων, αἵτινες οὕτως ἐπιβάλλονται εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς x, y καὶ z, ἵνα πληροῦται ἡ σχέσις 1, προτείνομεν μίαν ἄλλην σειρὰν ὑποχρεώσεων διὰ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς διατυποῦντες τὴν ἀκόλουθον σκέψιν:

Ἐὰν πληροῦται ἡ σχέσις 1, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας προϋποθέσεις, αἱ ἐκφράσεις:

$$x^{2n} - y^n z^n, \qquad y^{2n} - z^n x^n, \qquad z^{2n} - x^n y^n \qquad 3$$

εἶναι πᾶσαι τῆς μορφῆς:

$$p^2 + pq + q^2$$

χωρὶς νὰ ἔχωσι διαιρέτην τὸν 2.

Οὕτω π. χ.

$$x^{2n} - y^n z^n = (y^n)^2 + y^n z^n + (z^n)^2$$

κ. δ. ἑ. (εἶναι δὲ ἄλλως τε αἱ ἐκφράσεις αὗται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ἐφ' ὅσον πληροῦται ἡ 1), ἂν δὲ εἶχον διαιρέτην τὸν 2 ἢ δὲν θὰ ἦσαν οἱ x, y καὶ z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ δὲν θὰ ἴσχυεν ἡ σχέσις 1.

Ἐντεῦθεν συνάγεται περαιτέρω ὅτι αἱ ἐκφράσεις αὗται ἀποτελοῦνται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ πρώτους παράγοντας τῆς αὐτῆς μορφῆς $p^2 + pq + q^2$. Τοῦτο δὲ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ πάντα ἄλλον διαιρέτην τῶν ἐκφράσεων τούτων. Ἄρα καὶ αἱ ἐκφράσεις:

$$x^2 - yz, \qquad y^2 - zx, \qquad z^2 - xy \qquad 4$$

ἀποτελοῦνται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ πρώτους παράγοντας τῆς ἀνωτέρω μορφῆς. Τοῦτ' αὐτὸ δὲ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ ἀναφορικῶς πρὸς τὰς ἑτέρας τρεῖς ἐκφράσεις:

$$\frac{x^{2n} - y^n z^n}{x^2 - yz}, \qquad \frac{y^{2n} - z^n x^n}{y^2 - zx}, \qquad \frac{z^{2n} - x^n y^n}{z^2 - xy}, \qquad 5$$

δι' ἃς ὅμως, ἐπὶ πλέον τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης, ἰσχύει και ἡ ἑτέρα ὑποχρέωσις τοῦ νὰ εἶναι ὁμοίως ὡς αἱ $\dfrac{y^n + z^n}{y + z}$ κ. δ. ἑ. ἐκφράσιμοι ἐν τῇ δυαδικῇ μορφῇ 2.

Ἐκ τῶν ὑποχρεώσεων τούτων θὰ προσπαθήσωμεν νὰ συναγάγωμεν συμπεράσματα ἀντίστοιχα πρὸς ἐκεῖνα, ἅτινα ἐπετεύχθησαν διὰ τῶν σήμερον χρησιμοποιουμένων μεθόδων.

Θέλομεν δὲ ἀρκεσθῇ ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ εἰς μόνην τὴν μελέτην τῶν μορφῶν, αἵτινες ἐπιβάλλονται ἐπὶ τῶν x, y καὶ z ἕνεκα τῆς πρώτης τῶν ὑποχρεώσεων, δηλ. τῆς ἀναφερομένης εἰς τὰς ἐκφράσεις 4. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐρεύνης ταύτης θὰ εἶναι κἄτι ἀντιστοιχοῦν πρὸς τοὺς τύπους Abel - Legendre, τοὺς ἀπορρεύσαντας ἐκ τῆς ὑποχρεώσεως, ὅπως $(y+z)$ εἴτε $\frac{1}{n^{kn-1}}(y+z)$ κ. ὁ. ἑ. ὦσι n δυνάμεις.

Οἱ τύποι Abel - Legendre εἶναι ὡς γνωστὸν οἱ ἀκόλουθοι:

Περίπτωσις I. Ἐὰν οὐδεὶς τῶν x, y καὶ z διαιρῆται διὰ n:

$$x=\frac{u^n-u'^n+u''^n}{2}\qquad y=\frac{u^n+u'^n-u''^n}{2}\qquad z=\frac{-u^n+u'^n+u''^n}{2}$$

Περίπτωσις II. Ἐὰν ὁ z διαιρῆται διὰ τοῦ n:

$$x=\frac{n^{kn-1}u^n-u'^n+u''^n}{2}\qquad y=\frac{n^{kn-1}u^n+u'^n-u''^n}{2}\qquad z=\frac{-n^{kn-1}u^n+u'^n+u''^n}{2}$$

παρέχοντες *διὰ πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν u, u', u''* ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x, y, z πληρούσας *ἐκ ταὐτότητος* τὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἀνεφέραμεν, τὴν ἀφορῶσαν εἰς τὰ ἀθροίσματα $y+z$, $z+x$, $x+y$.

Κατ' ἀναλογίαν θέτομεν καὶ ἡμεῖς τὸ ἐρώτημα: Ὑπάρχουν ἐκφράσεις τῶν x, y καὶ z εἰς πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ὅσων δήποτε παραμέτρων u, v, w..., τοιαῦται δέ, ὥστε διὰ *πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν u, v, w...* νὰ πληροῦται *ἐκ ταὐτότητος* ἡ τεθεῖσα ὑποχρέωσις ὅπως:

$$x^2-yz,\ y^2-zx,\ z^2-xy$$

ἐκφράζωνται ὑπὸ τὴν μορφὴν p^2+pq+q^2;

Ἐὰν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο ἡ ἀπάντησις ἤθελεν εἶσθαι ἀρνητική, θὰ ἐλαμβάνομεν ἐντεῦθεν εὐθὺς ἀμέσως μίαν σπουδαίαν πρότασιν, ὅτι δηλ. *δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἔκφρασις τῶν x, y καὶ z εἰς πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ὥστε εἰς πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν ἀνεξαρτήτων παραμέτρων u. v, w... νὰ πληροῦται ἡ σχέσις* 1. Ἐὰν ἀντιθέτως εἰς τὸ τεθὲν ἐρώτημα ἡ ἀπάντησις ἤθελεν εἶσθαι θετική, θὰ ἔπρεπε νὰ ἀναζητήσωμεν τὰς ἐκφράσεις τῶν x, y καὶ z εἰς τοιαῦτα πολυώνυμα. Θὰ ἦσάν τι ἀντιστοιχοῦν, ὡς εἴπομεν, πρὸς τοὺς τύπους Abel-Legendre. Θὰ περιωρίζετο δὲ ἡ ἐφεξῆς ἔρευνα μόνον μεταξὺ τῶν πολυωνύμων τούτων.

Ἀλλά, ἵνα καταστῇ σαφέστερον τὸ ἐρώτημα, ἂς λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἁπλᾶ τινα παραδείγματα: Ἐὰν λ. χ. ζητηθῇ νὰ ἐκφρασθῶσιν οἱ x, y, z κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς πολυώνυμα, ὥστε ἡ ἔκφρασις:

$$x+y+z$$

νὰ καθίσταται τετράγωνον ἀκεραίου, ἔχομεν ἀμέσως μίαν ἁπλουστάτην λύσιν τὴν ἑξῆς:

$$\begin{aligned} x &= u^2 + 2vw \\ y &= v^2 + 2wu \\ z &= w^2 + 2uv \end{aligned} \qquad 6$$

Ὅθεν

$$x + y + z = (u + v + w)^2.$$

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ τὸ αὐτὸ ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἔκφρασιν:

$$x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy$$

συμβαίνει, ὥστε αἱ αὐταὶ ἀκριβῶς ἐκφράσεις 6 τῶν x, y καὶ z νὰ ἐπιλύωσι καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα. Συνεπῶς μὲ τὰς ἐκφράσεις 6 καθίσταται ἡ ἔκφρασις:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy). \qquad 7$$

τετράγωνον ἀκεραίου, διὰ πάσας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν u, v, w, ἴση πρὸς

$$(u + v + w)^2(u^2 - vw + v^2 - wu + w^2 - uv)^2 = (u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)^2.$$

Ἡ αὐτὴ ἔκφρασις:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

καθίσταται ὡσαύτως τετράγωνον ἀκεραίου ἂν τεθῇ:

$$\begin{aligned} x &= u^2 - vw \\ y &= v^2 - wu \\ z &= w^2 - uv \end{aligned} \qquad 8$$

Ἀλλὰ τότε:

$$x + y + z = u^2 - vw + v^2 - wu + w^2 - uv$$

καὶ

$$x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy = (u + v + w)^2 (u^2 - vw + v^2 - wu + w^2 - uv).$$

Ὅθεν καὶ πάλιν:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)^2.$$

Ὅμοια παραδείγματα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀναγράψωμεν πολλά, ἂν καὶ ὄχι πλέον τοσαύτης ἁπλότητος. Δὲν παρέλκει ὅμως νὰ ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα αὐτὴν τὴν λύσιν τῶν πυθαγορείων τριγώνων, καθ' ἥν, ἵνα:

$$x^2 + y^2$$

καταστῇ ἐκ ταυτότητος τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν:

$$\begin{aligned} x &= 2uv \\ y &= u^2 - v^2. \end{aligned}$$

, ὅτε

$$x^2+y^2=(u^2+v^2)^2.$$

ἐπίσης δὲ καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Euler διὰ τὸ θεώρημα τοῦ Fermat εἰς τὴν περίπτωσιν: $n=3$. Ζητῶν πράγματι ὁ μαθηματικὸς οὗτος νὰ ἐκφράσῃ εἰς κῦβον τὴν ἔκφρασιν:

$$x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

εὑρίσκει διὰ τὰ x καὶ y πολυώνυμα, ἅτινα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀναγράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς [2]:

$$x=\frac{(u+v+w)^3}{9}-(uv^2+vw^2+wu^2)$$

$$y=\frac{(u+v+w)^3}{9}-(u^2v+v^2w+w^2u)$$

ὅθεν:

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{u^2-vw+v^2-wu+w^2-uv}{3}\right)^3.$$

Ἀκριβῶς δὲ ἡ τοιαύτη ἔκφρασις τῶν x καὶ y τὸν βοηθεῖ κατόπιν εἰς μίαν θαυμαστὴν ὄντως descente infinie, διότι ἐξ αὐτῆς συνάγει ὅτι δέον:

$$x-y=-(u-v)(v-w)(w-u)$$

ὅθεν συμπεραίνει ὅτι ἕκαστος τῶν παραγόντων $(u-v)$, $(v-w)$, $(w-u)$ θὰ εἶναι ὁμοῦ μετὰ τοῦ $(x-y)$ κῦβος ἀκεραίου καὶ συνεπῶς ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$x^3-y^3=z^3 \qquad \text{φθάνει εἰς τὴν ὁμοίαν σχέσιν:}$$

$$a^3-b^3=c^3$$

ἔνθα $a^3=(u-v)$, $b^3=-(v-w)$, $c^3=(w-u)$

δηλ. a, b καὶ c πολὺ μικρότεροι τῶν x, y καὶ z.

Βλέπομεν λοιπὸν εἰς τὰ παραδείγματα ταῦτα πῶς εἶναι πολλάκις δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὰ x, y, z κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ὥστε μία ἀριθμητικὴ ὑποχρέωσις ἐπιβαλλομένη εἰς ταῦτα διά τινος ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, νὰ πληροῦται ἐκ ταὐτότητος διὰ πᾶν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων παραμέτρων.

Ἀλλὰ πρὶν φθάσωμεν εἰς τὴν μελέτην τοῦ τεθέντος ἐρωτήματος, ἂς ἐξετάσωμεν ἓν ἄλλο ὅμοιον παράδειγμα, εὑρισκόμενον εἰς μεγάλην συνάφειαν πρὸς αὐτό. Ἂς

[2] Εἰς τοὺς τύπους τοῦ Euler ὑπάρχουν δύο παράμετροι. Πράγματι τὰ x καὶ y δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι συναρτήσει δύο ἀκεραίων παραμέτρων. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τριῶν παραμέτρων ἐπεζητήσαμεν συμμετρικωτέραν ἔκφρασιν τῶν τύπων.

ἀναζητήσωμεν διὰ τὰ l, m, n, r, s, t τοιαύτας ἐκφράσεις εἰς πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ὥστε νὰ ἐπαληθεύωνται ἐκ ταὐτότητος αἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned} l^2 - 4mn &= -3r^2 \\ m^2 - 4nl &= -3s^2 \\ n^2 - 4lm &= -3t^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Τὰς σχέσεις ταύτας ἀναγράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} l^2 + 3r^2 &= 4mn \\ m^2 + 3s^2 &= 4nl \\ n^2 + 3t^2 &= 4lm \end{aligned} \tag{10}$$

Ἀπαλείφοντες δὲ διὰ διαιρέσεως τυχὸν ὑπάρχοντα μεταξὺ τῶν l, m, n κοινὸν παράγοντα (δηλ. ἔκφρασίν τινα πολυωνύμου μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, διαιροῦσαν ἐκ ταὐτότητος τὰς ἐκφράσεις εἰς πολυώνυμα τῶν l, m, n), συνάγομεν ἐκ τῶν σχέσεων τούτων 10 ὅτι ἑκάστη τῶν ἐκφράσεων: m, n, l δέον νὰ εἶναι τοῦ τύπου:

$$\frac{1}{4}\left(p^2 + 3q^2\right) \tag{11}$$

Ὅθεν τεθείσθω:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{4}\left(u_1^{\,2} + 3x_1^{\,2}\right) \\ m &= \frac{1}{4}\left(v_1^{\,2} + 3y_1^{\,2}\right) \\ n &= \frac{1}{4}\left(w_1^{\,2} + 3z_1^{\,2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Ἐὰν ὅμως τοῦτο συμβαίνῃ, αἱ σχέσεις 9 δὲν θὰ ἐπαληθεύωνται ἐκ ταὐτότητος εἰμὴ εἰς δύο μόνον περιπτώσεις:

I. Ἂν:

$$\begin{aligned} l &= \frac{3y_1z_1 - v_1w_1}{2} & r &= \frac{z_1v_1 + y_1w_1}{2} \\ m &= \frac{3z_1x_1 - w_1u_1}{2} & s &= \frac{x_1w_1 + z_1u_1}{2} \\ n &= \frac{3x_1y_1 - u_1v_1}{2} & t &= \frac{y_1u_1 + x_1v_1}{2} \end{aligned} \tag{12$_a$}$$

II. Ἂν:

$$\begin{aligned} l &= \frac{3y_1z_1 + v_1w_1}{2} & r &= \frac{z_1v_1 - y_1w_1}{2} \\ m &= \frac{3z_1x_1 + u_1v_1}{2} & s &= \frac{x_1w_1 - z_1v_1}{2} \\ n &= \frac{3x_1y_1 + u_1v_1}{2} & t &= \frac{y_1u_1 - x_1v_1}{2} \end{aligned}$$

Ὅθεν συνάγεται ὅτι ἤ

I.

$$\begin{aligned} -3(x_1^2-2y_1z_1)&=u_1^2+2v_1w_1\\ -3(y_1^2-2z_1x_1)&=v_1^2+2w_1u_1\\ -3(z_1^2-2x_1y_1)&=w_1^2+2u_1v_1 \end{aligned} \qquad 13$$

ἤ II.

$$\begin{aligned} -3(x_1^2-2y_1z_1)&=u_1^2-2v_1w_1\\ -3(y_1^2-2z_1x_1)&=v_1^2-2w_1u_1\\ -3(z_1^2-2x_1y_1)&=w_1^2-2u_1v_1. \end{aligned} \qquad 14$$

Ἔνθα πάντα τὰ ἀναγραφόμενα σύμβολα παριστῶσι πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς.

Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων περιπτώσεων πρέπει νὰ ἀποκλείσωμεν τὴν δευτέραν. Πράγματι αἱ σχέσεις 14 δὲν εἶναι ἐπαληθεύσιμοι συγχρόνως διὰ x_1, y_1, z_1 ἀφ' ἑνὸς καὶ u_1, v_1, w_1 ἀφ' ἑτέρου ἀκεραίους. Διότι ἂν π. χ. ἤθελε τεθῇ $u_1^2-2v_1w_1=a$, $v_1^2-2w_1u_1=b$, $w_1^2-2u_1v_1=c$ καὶ ἐπελύομεν ὡς πρὸς u_1, v_1, w_1, θὰ εὑρίσκομεν προδήλως τὰς αὐτὰς ἀκριβῶς τιμάς, οἵας καὶ διὰ x_1, y_1, z_1 πολλαπλασιασμένας ὅμως ἐπὶ $\sqrt{-3}$. Παραμένει λοιπὸν μόνη ἡ περίπτωσις 13 ὡς δυνατή [3]. Ἡ ταυτοποίησις τῶν σχέσεων 9 σημαίνει ταυτοποίησιν καὶ τῶν σχέσεων 13, εἰς ἃς ἐμφανίζονται ὡς x_1, y_1, z_1 κ. ὁ. ἑ. πολυώνυμα τῶν αὐτῶν παραμέτρων. Ἀλλ' εἶναι εὐαπόδεικτον — προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων 12 — ὅτι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας λαμβάνουν τὰ l, m, n, r, s, t ἀφ' ἑνὸς καὶ τὰ x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 ἀφ' ἑτέρου εἶναι διαφόρου τάξεως. Αἱ δεύτεραι εἶναι κατὰ πολὺ μικρότεραι τῶν πρώτων.

Τοῦτο ἀποτελεῖ κάθοδον πρὸς μικροτέρας ἀκεραίας τιμάς.

Ὑφίσταται ἐν τούτοις μία ἄλλη λίαν ἀξιοσημείωτος σχέσις μεταξὺ τῶν μορφῶν 13 καὶ 9.

[3] Εἰς τὴν περίπτωσιν 14 θὰ ἐλαμβάνομεν

$$l=(u_1^2+3x_1^2)=0=m=n.$$

Ἀλλὰ φυσικὰ τοῦτο ἀπ' ἀρχῆς ἀποκλείεται. Θὰ ἔπρεπε βεβαίως νὰ ἐξετασθῇ ἀκόμη καὶ ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν μία ἐκ τῶν σχέσεων 13 ἤθελε συνδυασθῇ πρὸς τὰς ἄλλας δύο ἐκ τῶν σχέσεων 14 ἢ τἀνάπαλιν. Ἀλλ' εἶναι πρόδηλον ὅτι δι' ἁπλῆς ἀλλαγῆς σημείου ἑνὸς ἐκ τῶν u_1, v_1, w_1 δυνάμεθα τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὴν 13 ἢ τὴν 14.

Οὕτως ἂν θέσωμεν:

$$x=\frac{1}{\sqrt{-3}}\Big[l+m+n\Big]$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{-3}}\left[-\left(\frac{m+n}{2}-l\right)+\sqrt{-3}\,\frac{m-n}{2}\right] \qquad 15$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{-3}}\left[-\left(\frac{m+n}{2}-l\right)-\sqrt{-3}\,\frac{m-n}{2}\right]$$

$$u=r+s+t$$

$$v=-\left(\frac{s+t}{2}-r\right)+\sqrt{-3}\,\frac{s-t}{2}$$

$$w=-\left(\frac{s+t}{2}-r\right)-\sqrt{-3}\,\frac{s-t}{2}$$

Προκύπτει δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς l, m, n, r, s, t:

$$l=-\frac{1}{\sqrt{-3}}\Big[x+y+z\Big]$$

$$m=-\frac{1}{\sqrt{-3}}\left[-\left(\frac{y+z}{2}-x\right)-\sqrt{-3}\,\frac{y-z}{2}\right]$$

$$n=-\frac{1}{\sqrt{-3}}\left[-\left(\frac{y+z}{2}-x\right)+\sqrt{-3}\,\frac{y-z}{2}\right] \qquad 16$$

$$r=\frac{1}{3}\Big[u+v+w\Big]$$

$$s=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{v+w}{2}-u\right)-\sqrt{-3}\,\frac{v-w}{2}\right]$$

$$t=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{v+w}{2}-u\right)+\sqrt{-3}\,\frac{v-w}{2}\right]$$ [4]

[4] Ἐκ τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ 15 καὶ 16 προκύπτουσιν ἀμέσως αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$-3\sqrt{-3}\;xyz=l^3+m^3+n^3-3lmn$$

$$uvw=r^3+s^3+t^3-3rst$$

$$+3\sqrt{-3}\;lmn=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$27.\;rst=u^3+v^3+w^3-3uvw$$

Ἐὰν δὲ ἔπειτα εἰς τοὺς τύπους 9 θέσωμεν ἐν τῇ θέσει τῶν l, m, n, r, s, t τιμὰς ἐκφραζομένας ἐκ τῶν σχέσεων 16 θὰ λάβωμεν ἀπαραλλάκτους τὰς ἰσότητας 13, ὅπου μόνον ἀντὶ x_1 θὰ ἔχωμεν x, ἀντὶ y_1, y κ. ὁ. ἑ. Καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν εἰς τοὺς τύπους 13 θέσωμεν ἀντὶ τῶν x_1, y_1, z_1 κ. ὁ. ἑ. ἐκφράσεις ὡς αἱ διδόμεναι ἐκ τῶν 15 διὰ x, y, z, u, v, w, φθάνομεν ἐκ τῶν τύπων 13 εἰς τύπους ἀπαράλλακτα τοὺς αὐτοὺς πρὸς τοὺς 9. Τὴν παρατήρησιν ταύτην συμπληρώνει καὶ ἡ ἑξῆς σκέψις: Ὁσάκις l, m, n, r, s, t εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι (δηλ. ἀντιστοιχοῦντες εἰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν παραμέτρων) οἱ x, v, z, u, v, w, οἱ ἐκ τῶν σχέσεων 15 ὁριζόμενοι, δὲν θὰ εἶναι πλέον ἀκέραιοι· καὶ ἀντιστρόφως: ὁσάκις οἱ x, y, z, u, v, w εἶναι ἀκέραιοι, ἀκέραιοι δὲν θὰ εἶναι οἱ ἐκ τῶν σχέσεων 16 ὁριζόμενοι l, m. n, s, t. Ὅταν ὅμως ἓν ἐκ τῶν συστημάτων τούτων π. χ. l, m, n, r, s, t ληφθῇ μὲ ἀκεραίας τιμάς, τὸ ἀντίστοιχον σύστημα x, y, z, u, v, w ἔχει ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον ἐκ τῶν σχέσεων 15 εἴτε 16 τύπον ἀσυμμετρίας, ἀνῆκον εἰς τὸ σῶμα τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τοῦ μεγέθους $\sqrt{-3}$.

Αἱ παρατηρήσεις αὗται χρησιμεύουν διὰ τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς μεθόδου. Εὕρομεν τῷ ὄντι μέχρι τοῦδε ὅτι ἡ ἰσχὺς τῶν σχέσεων 9 προϋποθέτει τὴν ἰσχὺν τῶν 13 εἰς πολυώνυμα τῶν αὐτῶν παραμέτρων μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, τοιαῦτα δὲ ὥστε διὰ τὰς αὐτὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν παραμέτρων νὰ προκύπτωσι τιμαὶ ἀκέραιαι τῶν x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 κατὰ πολὺ μικρότεραι τῶν l, m, n, r, s, t. *Διὰ τῶν τύπων ὅμως* 15, *ἐκ τῶν σχέσεων* 13 *φθάνομεν εἰς τὰς σχέσεις:*

$$l_1^2 - 4m_1n_1 = -3r_1^2.$$
$$m_1^2 - 4n_1l_1 = -3s_1^2 \qquad 17$$
$$n_1^2 - 4l_1m_1 = -3t_1^2$$

ἔνθα: l_1, m_1, n_1, r_1, s_1, t_1 *ἀσύμμετροι ἐκφράσεις τοῦ τύπου* 16, τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὰς x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 ὡς πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμήν. Ἀλλ' ἀπὸ τῶν ἰσοτήτων 17 δυνάμεθα νὰ κατέλθωμεν καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον πρὸς τὰς ἰσότητας:

$$-3(x_2^2 - 2y_2z_2) = u_2^2 + 2v_2w_2$$
$$-3(y_2^2 - 2z_2x_2) = v_2^2 + w_2u_2 \qquad 18$$
$$-3(z_2^2 - 2x_2y_2) = w_2^2 + 2u_2v_2$$

ἔνθα x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2 (ἀσύμμετροι) ἐκφράσεις τοῦ τύπου 15, *διότι πράγματι μόνον ἡ προϋπόθεσις* 18 *καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐκ ταυτότητος πλήρωσιν τῶν σχέσεων* 17. Πάλιν δὲ ἐκ τῶν σχέσεων 18 δυνάμεθα διὰ μιᾶς ἀντικαταστάσεως τοῦ τύπου 15 νὰ ἔλθωμεν εἰς ἓν σύστημα:

$$l_2^2 - 4m_2n_2 = -3r_2^2$$
$$m_2^2 - 4n_2l_2 = 3s_2^2 \qquad 19$$
$$n_2^2 - 4l_2m_2 = -3t_2^2$$

ἔνθα l_2, m_2, n_2, r_2, s_2, t_2 πολυώνυμα τῶν αὐτῶν παραμέτρων *μὲ ἀκεραίους* τώρα πλέον συντελεστάς, λαμβάνοντα διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων, τιμὰς πολὺ μικροτέρας (κατὰ τρεῖς τάξεις) τῶν l, m, n, r, s, t.

Ὥστε ἡ ἀναζήτησις τῶν πολυωνύμων, εἰς ἃ δέον νὰ ἐκφρασθῶσιν οἱ l, m, n, r, s, t, ἵνα ταὐτοποιῆται ἡ σχέσις 9 μᾶς φέρει εἰς ὁλονὲν νέα πολυώνυμα τῶν αὐτῶν παραμέτρων ταὐτοποιοῦντα ἐντελῶς ὁμοίας σχέσεις ὡς ἡ 9 ἀλλὰ προσλαμβάνοντα ὁλονὲν μικροτέρας τιμὰς ἀπὸ ταῦτα, διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων.

Ἡ σειρὰ αὕτη τῶν συλλογισμῶν φέρει τὸν τύπον τῆς «ἀτέρμονος καθόδου». Ἀλλὰ δυνάμεθα ἀντιστρόφως καὶ ν' ἀνέλθωμεν τὴν κλίμακα. Τῷ ὄντι: Ἐὰν εἴχομεν ἓν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν x, y, z, u, v, w ἐπαληθεῦον τὰς ἰσότητας 13, θὰ ἠδυνάμεθα δι' ἁπλῆς ἐγγραφῆς τῶν τιμῶν τούτων εἰς τοὺς τύπους 12a καὶ 12 νὰ φθάσωμεν εἰς ἓν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν l, m, n, r, s, t ἐπαληθεῦον τὴν σχέσιν 9. Διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ 16 θὰ ἠδυνάμεθα κατόπιν νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς ἓν σύστημα ἰσοτήτων τοῦ τύπου 13 μὲ ἀσυμμέτρους—καὶ δὴ ἀσυμμέτρους τοῦ τύπου 15—τιμὰς τῶν x, y, z, u, v, w, ἐκ τοῦ ὁποίου πάλιν νὰ φθάσωμεν διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων 12a καὶ 12 εἰς ἓν νέον σύστημα l, m, n, r, s, t, τιμῶν ἀσυμμέτρων (τοῦ τύπου 16), ἐπαληθεῦον τὴν σχέσιν 9. Ἐκ τούτου κατόπιν νὰ προχωρήσωμεν διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων 16 εἰς ἓν σύστημα *ἀκεραίων* πλέον τιμῶν x, y, z, u, v, w καὶ κατόπιν διὰ τῶν τύπων 12a καὶ 12 εἰς ἓν σύστημα ἀκεραίων ὡσαύτως τιμῶν, l, m, n, r, s, t (πολὺ μεγαλυτέρων τῶν ἀρχικῶν) ἐπαληθεῦον τὰς ἰσότητας 9. *Συνεπῶς ἐκ δοθέντος συστήματος ἀκεραίων δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἐπ' ἄπειρον ἀνιοῦσαν στήλην ἐναλλὰξ ἀσυμμέτρων καὶ ἀκεραίων συστημάτων l, m, n, r, s, t, ἐπαληθευόντων τὰς ἰσότητας* 9. Θὰ ἐφθάνομεν δὲ οὕτω εἰς *ἀπείρους* λύσεις τοῦ συστήματος 9, ὄχι βέβαια καθ' ὃν τρόπον ἐζητοῦμεν ἀρχικῶς, δηλ. διὰ πολυωνύμων μὲ παραμέτρους u, v, w . . , ὥστε εἰς πᾶν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν τῶν παραμέτρων νὰ ἀντιστοιχῇ ἀνὰ μία λύσις τοῦ συστήματος 9, ἀλλὰ δι' ἑνὸς ἀδιαλείπτως καὶ καθ' ὡρισμένον τρόπον εὐρυνομένου πολυωνύμου, παρέχοντος δι' ἓν ὡρισμένον ἐκ τῶν προτέρων σύστημα τιμῶν x, y, z, u, v, w ἀπείρους λύσεις τοῦ συστήματος 9.[5]

[5] Τὴν παρακολούθησιν τῆς ἀνόδου ταύτης εὐχεραίνουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἀντικαταστάσεις.

$$\mathrm{I}\qquad \begin{array}{ll} l_i - r_i = a_i & l_i + r_i = \alpha_i \\ m_i - s_i = b_i & m_i + s_i = \beta_i \\ n_i - t_i = c_i & n_i + t_i = \gamma_i \end{array}$$

καὶ

$$\mathrm{II}\qquad \begin{array}{ll} x_i - u_i = f_i & x_i + u_i = \varphi_i \\ y_i - v_i = g_i & y_i + v_i = \chi_i \\ z_i - w_i = h_i & z_i + w_i = \psi_i \end{array}$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα τώρα ν' ἀποδείξωμεν καίτι πλέον: ὅτι δηλ. τὸ σύστημα 9 *δὲν εἶναι κἂν ἐπιδεκτικὸν λύσεων* ***εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς,*** *πλὴν ἄν:*

$$l - m - n = r = s \quad t.$$

Τεθείσθω νῦν:

$$\mathrm{I_a} \qquad \begin{aligned} \varphi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(a_i^2 - b_i c_i) & f_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\alpha_i^2 - \beta_i\gamma_i) \\ \chi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(b_i^2 - c_i a_i) & g_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\beta_i^2 - \gamma_i\alpha_i) \\ \psi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(c_i^2 - a_i b_i) & h_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\gamma_i^2 - \alpha_i\beta_i) \end{aligned}$$

καὶ

$$\mathrm{II_a} \qquad \begin{aligned} a_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(g_i h_i + g_i\psi_i + \chi_i h_i) & \alpha_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\chi_i\psi_i + g_i\psi_i + \chi_i h_i) \\ b_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(h_i f_i + h_i\varphi_i + \psi_i f_i) & \beta_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\psi_i\varphi_i + h_i\varphi_i + \psi_i f_i) \\ c_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(f_i g_i + f_i\chi_i + \varphi_i g_i) & \gamma_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(\varphi_i\chi_i + f_i\chi_i + \varphi_i g_i) \end{aligned}$$

Θέλομεν ἔχει:

ἀντὶ μὲν τῶν σχέσεων 9 τὰς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} f_{i-1} + \varphi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(a_i\alpha_i + b_i\gamma_i + \beta_i c_i) \\ g_{i-1} + \chi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(b_i\beta_i + c_i\alpha_i + \gamma_i a_i) \\ h_{i-1} + \psi_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(c_i\gamma_i + a_i\beta_i + \alpha_i b_i) \end{aligned} \qquad 9_a$$

ἀντὶ δὲ τῶν σχέσεων 13 τὰς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} a_{i-1} + \alpha_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(f_i^2 + f_i\varphi_i + \varphi_i^2) \\ b_{i-1} + \beta_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(g_i^2 + g_i\chi_i + \chi_i^2) \\ c_{i-1} + \gamma_{i-1} &= \tfrac{1}{2}(h_i^2 + h_i\psi_i + \psi_i^2) \end{aligned} \qquad 13_a$$

Ἐὰν δὲ σύστημά τι τιμῶν ἀκεραίων:

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$$

ταὐτοποιῇ τὰς σχέσεις: 9a, *θὰ ὑπάρχῃ ἕτερον σύστημα τιμῶν, ὡσαύτως ἀκεραίων, ὁριζόμενον ὡς ἀκολούθως:*

$$\mathrm{I_b} \qquad \alpha_{i-2} = -\tfrac{1}{4}\left[(b_i^2 - c_i a_i)(c_i^2 - a_i b_i) + (b_i^2 - c_i a_i)(\gamma_i^2 - \alpha_i\beta_i) + (\beta_i^2 - \gamma_i\alpha_i)(c_i^2 - a_i b_i)\right]$$

κ. ὁ. ἑ. (διὰ συνδυασμοῦ τῶν IIa *καὶ* Ia*) ταὐτοποιοῦν ὡσαύτως τὰς αὐτὰς σχέσεις* 9a. *Ἐὰν δὲ πάλιν σύστημά τι τιμῶν ἀκεραίων*

$$f_i,\ g_i,\ h_i,\ \varphi_i,\ \chi_i,\ \psi_i$$

ταὐτοποιῇ τὰς σχέσεις 13a, *θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἕτερον σύστημα ἐπίσης ἀκεραίων τιμῶν ὁριζόμενον ὡς ἑξῆς:*

$$\mathrm{II_b} \qquad \varphi_{i-2} = \tfrac{1}{4}\left[(g_i h_i + g_i\psi_i + \chi_i h_i)^2 - (h_i f_i + h_i\varphi_i + \psi_i f_i)(f_i g_i + f_i\chi_i + \varphi_i g_i)\right]$$

κ. ὁ. ἑ. (διὰ συνδυασμοῦ τῶν Ia *καὶ* IIa*) ταὐτοποιοῦν ἐπίσης τὰς αὐτὰς σχέσεις* 13a.

Οἱ τύποι Ib *καὶ* IIb *δίδουσι μίαν βαθμίδα τῆς ἀνιούσης πρὸς μεγαλυτέρας ἀκεραίας τιμάς, ταὐτοποιούσας τὰς αὐτὰς σχέσεις* 9a *εἴτε* 13a *ἢ—ὅπερ ταὐτὸ—* 9 *εἴτε* 13.

Μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω τύπων παρέχουν ἰδιαίτερον ἴσως ἐνδιαφέρον οἱ τύποι 9a καὶ 13a. Λ. χ. προκύπτει ἐκ τῶν 9a:

$$4^3.(x_{i-1}^3 + y_{i-1}^3 + z_{i-1}^3 - 3x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}) = (a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3a_i b_i c_i)(\alpha_i^3 + \beta_i^3 + \gamma_i^3 - 3\alpha_i\beta_i\gamma_i)$$

κ. ὁ. ἑ. (πρβλ. πρὸς τοὺς τύπους σημ. 4.)

Τῷ ὄντι αἱ σχέσεις 10 *ἐπιβάλλουν* εἰς τοὺς l, m, n (μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τυχὸν ὑπαρχόντων μεταξὺ των κοινῶν παραγόντων) τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{4}\left(p^2+3q^2\right)$$

ἔνθα p καὶ q ἀκέραιοι *ἀριθμοί*, πλὴν ἂν δύο ἐξ αὐτῶν—π. χ. m καὶ n—ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα — ἔστω k — μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἀνωτέρω μορφήν. Ἀλλ' ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, ὁ παράγων k θὰ διαιρῇ, ὡς γνωστόν, καὶ τὸν l^2 καὶ τὸν $3r^2$. Δυνάμεθα ἄρα νὰ ἀπαλείψωμεν αὐτὸν μεταξὺ τῶν l, m καὶ n. Μετὰ δὲ τὴν ἀπαλοιφὴν θὰ ἐξακολουθοῦν οὐδὲν ἧττον ὑφιστάμεναι αἱ σχέσεις 9, *πλὴν ἂν* $l=m=n$, *ὅτε καταλήγουσιν αὗται εἰς στεῖραν ταυτολογίαν*. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ l, m καὶ n—πλὴν τῆς ἐξαιρέσεως ταύτης—ἐκφράζονται ἐν τῇ μορφῇ

$$\frac{1}{4}\left(p^2+3q^2\right)$$

οἱ τύποι 12a *ἐπιβάλλονται* ὡσαύτως διὰ τοὺς l, m, n καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὡς πρὸς τοὺς τύπους 13. Ἄρα ἐφεξῆς ἡ κάθοδος εἶναι ἀναγκαστικὴ δι' ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοῦ σώματος $\sqrt{-3}$ (ἐν ἄλλοις λόγοις οἱ ἐν τῇ σημειώσει 5) τύποι I b καὶ II b εἶναι *μονοσημάντως* ἀντιστρεπτοί). Ἀποκλείεται δὲ καὶ τοῦτο: Νὰ φθάσωμεν κατερχόμενοι εἰς σύστημα τιμῶν:

$$l_i,\ m_i,\ n_i,\ r_i,\ s_i,\ t_i,$$

δι' ὃ ἤθελεν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$l_i=m_i=n_i=r_i=s_i=t_i,$$

καίτοι εἴχομεν ἀναχωρήσει ἀπὸ ἕτερον σύστημα, εἰς ὃ ὁμοία τις σχέσις δὲν ἤθελεν ἰσχύει. (Οἱ τύποι I b τῆς σημειώσεως 5 διδάσκουν τῷ ὄντι ὅτι ἡ τοιαύτη σχέσις προϋποθέτει τὴν

$$l_{i-2}=m_{i-2}=n_{i-2}=r_{i-2}=s_{i-2}=s_{i-2}).$$

Συνεπῶς ἡ κάθοδος δύναται *ἐν πάσει περιπτώσει* νὰ συνεχισθῇ μέχρι τοῦ ἀτόπου συμπεράσματος ὅτι θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι *ἀκέραιοι* ἀριθμοὶ l, m, n κ. ὁ. ἑ. *ὁσονδήποτε* μικροὶ καὶ δὴ ἐνδεχομένως, *μικρότεροι* τῆς μονάδος.

Ὑπολείπεται τώρα νὰ ἀποδείξωμεν τὴν συνάφειαν τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος πρὸς τὸ ἀπ' ἀρχῆς τεθὲν ἐρώτημα.

Ἐρχόμεθα ὅθεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἐρωτήματος τούτου:

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχουν τρία πολυώνυμα a_1, b_1, c_1 μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ἔχοντα τὴν ἰδιότητα 4 δηλ. τοῦ νὰ εἶναι δυνατὸν αἱ ἐκφράσεις:

$$a_1^2-b_1c_1,\qquad b_1^2-c_1a_1,\qquad c_1^2-a_1b_1 \tag{20}$$

νὰ περιβληθῶσι δι' ἁπλῆς ἐκτελέσεως ἀλγεβρικῶν πράξεων τὴν μορφήν: p^2+pq+q^2, ἔνθα p καὶ q πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς τῶν αὐτῶν παραμέτρων, Οὕτω τεθείσθω:

$$\begin{aligned} a_1^2 - b_1c_1 &= p_1^2 + p_1 q_1 + q_1^2 \\ b_1^2 - c_1a_1 &= p'^2_1 + p'_1 q'_1 + q'^2_1 \\ c_1^2 - a_1b_1 &= p''^2_1 + p''_1 q''_1 + q''^2_1 \end{aligned} \qquad 21$$

Θὰ ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ ἐκφράσωμεν τὰ a_1, b_1, c_1 ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ p καὶ q ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2y + a_3z &= 0 \qquad & p_1 + p_2y + p_3z &= 0 \\ b_1 + b_2y + b_3z &= 0 \qquad & q_1 + q_2y + q_3z &= 0 \\ c_1 + c_2y + c_3z &= 0 \qquad & \text{κ. δ. ἑ.} & \end{aligned} \qquad 22$$

ἔνθα y καὶ z δύο σταθεροὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἡ τοιαύτη ἔκφρασις τῶν a_1, b_1, c_1 καὶ p_1, q_1 κ. δ. ἑ. εἶναι ἐπιτετραμένη, διότι πᾶσαι γενικῶς αἱ ἀκέραιαι τιμαί, τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωσιν αἱ ἐκφράσεις a_1, b_1, c_1, παρέχονται μὲ τοὺς ἀνωτέρω τύπους γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ, ἀρκεῖ καταλλήλως νὰ ἐκλεγῶσι τὰ a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, p_2, p_3 κ. δ. ἑ. Ἐν ἄλλοις λόγοις θεωροῦμεν ἀντὶ τῶν a_1, b_1, c_1, p_1, q_1 κ. δ. ἑ. τὰ a_2, b_2, c_2, p_2, p'_2, p''_2, q_2, q'_2, q''_2 καὶ a_3, b_3, c_3 κ. δ. ἑ. ὡς πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς τῶν παραμέτρων u_2, v_2, w_2 . . . καὶ u_3, v_3, w_3 . . . , τοιαῦτα δὲ ὥστε τά: a_1, b_1, c_1 κ. δ. ἑ. νὰ λαμβάνωσιν διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν παραμέτρων τούτων, τιμὰς ἀκεραίας ταὐτοποιούσας πάντοτε τὰς σχέσεις 21.

Ἐν τούτοις οἱ γραμμικοὶ μετασχηματισμοὶ 22 ἐπιτρέπουν νὰ φέρωμεν τὰς ἐκφράσεις 21 εἰς τὸν γενικὸν τύπον δυαδικῶν μορφῶν:

$$Ax^2 + Byz + Cz^2$$

Τῷ ὄντι λαμβάνομεν:

$$a_1^2 - b_1c_1 = (a_2^2 - b_2c_2)y^2 + (-b_2c_3 + 2a_2a_3 - b_3c_2)yz + (a_3^2 - b_3c_3)z^2 \qquad 23$$

καὶ ὁμοίως διά:

$$b_1^2 - c_1a_1 \text{ καὶ } c_1^2 - a_1b_1$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου:

$$p_1^2 + p_1q_1 + q_1^2$$

$$= (p_2^2 + p_2p_2 + q_2^2)y^2 + (-2p_2p_3 + p_2q_3 + q_2p_3 - 2q_2q_3)yz + (p_3^2 + p_3q_3 + q_3^2) \qquad 24$$

καὶ ὁμοίως διά:

$$p'^2_1 + p'_1q'_1 + q'^2_1, \qquad p''^2_1 + p''_1q''_1 + q''^2_1.$$

Ὅθεν αἱ ἰσότητες 21 μὲ τὰς ἀντικαταστάσεις 23 καὶ 24 ἐκφράζονται ὡς ταὐτότητες, εἰς τὰ ἑκατέρωθεν μέλη τῶν ὁποίων ὑπάρχουν πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς τῶν u_2, v_2, w_2 . . καὶ u_3, v_3, w_3 . . . κ. δ. ἑ.

Ἐντεῦθεν δὲ προκύπτει ὅτι αἱ διακρίνουσαι τῶν ἐκφράσεων 23 καὶ 24 θὰ συμπίπτουν ἐκ ταὐτότητος, ἤτοι ἄν:

$$l_1 = b_2c_3 - b_3c_2,\ m_1 = c_2a_3 - c_3a_2,\ n_1 = a_2b_3 - b_2a_3 \qquad 25$$

καὶ

$$r_1 = p_2q_3 - p_3q_2,\ s_1 = p'_2q'_3 - p'_3q'_2,\ t_1 = p''_2q''_3 - p''_3q''_2$$

θὰ ταὐτοποιοῦνται αἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned} l_1^2 - 4m_1n_1 &= -3r_1^2 \\ m_1^2 - 4n_1l_1 &= -3s_1^2 \\ n_1^2 - 4l_1m_1 &= -3t_1^2 \end{aligned} \qquad 26$$

ἵνα ἰσχύῃ ἡ διατυπωθεῖσα ἐν 21 συνθήκη.

Εὕρομεν ἐν τούτοις ὅτι πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς ταὐτοποιοῦντα τὰς σχέσεις 26 δὲν ὑπάρχουν, πλὴν ἂν $l_1 = m_1 = n_1 = r_1 = s_1 = t_1$. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ἡ Ἰακωβιανὴ ὁρίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ 22:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1l_1 + b_1m_1 + c_1n_1 = 0 \qquad 27$$

ἁπλοποιεῖται εἰς τὴν σχέσιν:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν — θέτοντες ἀντὶ τῶν a_1, b_1, c_1 τὰ x, y, z — ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀρχικὴ ἰσότης 1 (ἡ ἰσότης τοῦ Fermat) διὰ x, y, z πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, πλὴν ἂν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων ἔχωμεν συγχρόνως:

$$x + y + z = 0 \qquad \text{καὶ } x^n + y^n + z^n = 0$$

ὅπερ ὅμως εἶναι προδήλως ἄτοπον.

Δυνάμεθα νῦν νὰ συμπεράνωμεν:

Ἐθέσαμεν διὰ τὸ θεώρημα τοῦ Fermat μίαν βάσιν ἐρεύνης, διάφορον ἐκείνης, ἥτις συνήθως ἀκολουθεῖται. Ἐζητήσαμεν ὅμως νὰ κινηθῶμεν ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου ὁδοῦ. Ἐν τῇ ἐν χρήσει μεθόδῳ τίθεται ὡς πρώτη ὑποχρέωσις τῶν x, y καὶ z, ἡ ἐκφραζομένη ἐκ τῶν τύπων Abel - Legendre. Ἀνεζητήσαμεν μίαν ἀνάλογον ἔκφρασιν τῶν x. y καὶ z, ἐπὶ τῇ βάσει ἀντιστοίχου ὑποχρεώσεως καὶ τοιαύτην ὑποχρέωσιν ἐλάβομεν τὴν 4. Ἀλλ' εὕρομεν ὅτι ἀντίστοιχος ἔκφρασις διὰ τὰ x, y καὶ z δὲν ὑπάρχει.

Ἀλλὰ δὲν εἶναι τοῦτο τὸ μόνον δυνάμενον νὰ προέλθῃ συμπέρασμα. Θὰ ἦτο ἐνδιαφέρον νὰ ἐξετασθῇ περαιτέρω κατὰ πόσον ἡ πλήρωσις τῶν σχέσεων 26 εἰς ἀκε-

ραίους ἀριθμοὺς δὲν εἶναι ἴσως ἡ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὄχι πλέον τὰ πολυώνυμα, ἀλλ' οἱ ἀριθμοί:

$$x^2—yz,\quad y^2—zx,\quad z^2—xy$$

καταστῶσιν ἐκφράσιμοι ἐν τῷ τύπῳ:

$$p^2+pq+q^2.$$ [6]

[6] Αἱ σχέσεις 26 δηλοῦσιν ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι μεταξὺ τῶν δυαδικῶν μορφῶν, τῶν ἀπορρεουσῶν διὰ γραμ. μετασχηματισμοῦ ἐκ τῶν:

$$x^2-yz,\quad y^2-zx,\quad z^2-xy$$

ἀφ' ἑνὸς καὶ ἐκείνων, αἵτινες ἀπορρέουσιν ὁμοίως ἐκ τῶν:

$$p^2+pq+q^2 \quad \text{κ. ὁ. ἑ.}$$

τοιαῦταί τινες, ὥστε νὰ συμπίπτωσι πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοίχως αἱ διακρίνουσαι αὐτῶν.

Συναφῶς δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν, εὐχερῶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνυομένην:

Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\quad a_2,\ b_2,\ c_2,\quad a_3,\ b_3\ c_3,$$

ὑφίσταται

I ἡ σχέσις 27 καὶ

II Ἀντίστοιχοι ἐννέα σχέσεις τοῦ τύπου 21.,

μεταξὺ τῶν ἐλασσόνων ὁριζουσῶν:

$$l_1,\ m_1,\ n_1,\quad l_2,\ m_2,\ n_2,\quad l_3,\ m_3,\ n_3$$

τῆς 27 θὰ ἰσχύωσιν ἀναγκαίως:

I ἡ σχέσις

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

καὶ

II ἀντίστοιχοι ἐννέα σχέσεις τοῦ τύπου 26.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύει μεταξὺ ἄλλων καὶ τοῦτο:

Ἐάν:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπαληθευθῶσι δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν αἱ σχέσεις:

$$a_1^{n_1} + b_1^{n_1} + c_1^{n_1} = 0$$

$$a_2^{n_2} + b_2^{n_2} + c_2^{n_2} = 0$$

$$a_3^{n_3} + b_3^{n_3} + c_3^{n_3} = 0$$

ἔνθα, n_1, n_2, n_3 πρῶτοι > 2.

(ἐφ' ὅσον πρὸς τούτοις δύναται νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ εὐαπόδεκτον τοῦτο ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοί:

$$y^2+yz+z^2, \quad z^2+zx+x^2, \quad x^2+xy+y^2$$

διαιροῦσι τὸν $x^{2n}-y^nz^n$ (*εἴτε* $y^{2n}-z^nx^n$, *εἴτε* $z^{2n}-x^ny^n$) *ἐὰν* $x^n+y^n+z^n=0$ (*n πρῶτος* $\gtrless 2$)*)*.

Ἐὰν ἡ εἰκασία αὕτη ἤθελεν ἀποδειχθῇ ἀκριβής, θὰ ἐσήμαινε τοῦτο τὴν πλήρη ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Fermat, διότι τὸ ἄτοπον τῆς συγχρόνου ταὐτοποιήσεως τῶν:

$$x+y+z=0 \quad \text{καὶ} \quad x^n+y^n+z^n=0$$

θὰ ἀνεφέρετο ὄχι ἁπλῶς εἰς *πολυώνυμα* ἀλλὰ καὶ εἰς τοὺς *ἀριθμοὺς* x, y καὶ z.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ εἰκασία αὕτη δὲν ἤθελεν ἀποδειχθῇ ἀκριβής, δὲν πρέπει νὰ παρίδωμεν ὅτι τὸ γενόμενον βῆμα δὲν ἀντιστοιχεῖ πράγματι εἰμὴ πρὸς τὸ πρῶτον βῆμα τῆς συγχρόνου ἐρεύνης, δηλ. τοὺς τύπους Abel-Legendre. Ὑπολείπεται κατόπιν ἡ σπουδὴ τῆς σειρᾶς τῶν προτάσεων, αἵτινες θὰ προκύψωσιν ἐκ τῆς ὑποχρεώσεως τῶν:

$$\frac{x^{2n}-y^nz^n}{x^2-yz} \quad \text{κ. ὁ. ἑ.}$$

ὅπως περιέχωσι παράγοντας ἀποκλειστικῶς τῆς μορφῆς p^2+pq+q^2, ἐνῷ συγχρόνως ἐκφράζονται ἐν τῇ δυαδικῇ μορφῇ 2. Καὶ πάλιν ἡ ἀτέρμων κάθοδος θὰ βοηθήσῃ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων τούτων.

Ἐὰν διὰ τῆς παρούσης μελέτης ἐδείχθη ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ χρησιμότης τῆς προτεινομένης μεθόδου, δύναμαι νὰ θεωρήσω ἐπιτευχθέντα τὸν ὃν προεθέμην δι' αὐτῆς σκοπόν.

RÉSUMÉ

Les recherches actuelles sur le dernier théorème de P. de Fermat se caractèrisent par le fait que malgré l'application des procédès mathématiques très evolués et extrêmement compliqués, elles ne font ancun usage de la methode de la descente infinie, sur laquelle, selon toute probabilité, Fermat s'est basé pour la demonstration de son theorème. Le but de ce travail est, pour ainsi dire, de retablir cette méthode:

Dans le cas $x^n+y^n+z^n=0$ (x, y, z premiers entre eux, $\gtrless 0$, et n nombre premier >2), on a:

$$x^n = -(y^n+z^n) = -(y+z)\,\frac{y^n+z^n}{y+z}$$

Une telle décomposition de x^n en facteurs nous ammène tout d'abord

aux formules de Abel-Legendre et à l'étude de la divisibilité de l'expression: $\frac{y^n+z^n}{y+z}$, une expression, qu'on peut porter sous la forme:

$$\frac{1}{4}\left(Y^2-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n.\,Z^2\right)$$

Au lieu de cette methode, nons nous basons sur la décomposition suivante:

$$(y^n)^2+y^nz^n+(z^n)^2=x^{2n}-y^nz^n=x^2-yz\;\frac{x^{2n}-y^nz^n}{x^2-yz}$$

Nous en concluons que

$$x^2-yz,\; y^2-zx,\; z^2-xy$$

ainsi que

$$\frac{x^{2n}-y^nz^n}{x^2-yz}\qquad\frac{y^{2n}-z^nx^n}{y^2-zx}\qquad\frac{z^{2n}-x^ny^n}{z^2-xy}$$

s'expriment sous la forme p^2+pq+q^2, tout en prenant en considération que ces trois dernières expressions appartiennent aussi à la forme binaire quadratique:

$$\frac{1}{4}\left(Y^2-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n.\,Z^2\right)$$ [1]

Nons nous bornons d'abord à chercher des expressions générales de:

$$x^2-yz,\; y^2-zx,\; z^2-xy.$$

en polynômes à coefficients entiers, de sorte que pour toutes les valeurs des paramètres, l'obligation des x^2-yz e.c.t, exposée ci-dessus, soit remplie par identité. Nous trouvons que cette condition correspond à la possibilité de la verification du système suivant:

$$l^2-4mn=-3r^2$$
$$m^2-4nl=-3s^2 \qquad \text{(9 du texte grec)}$$
$$n^2-4lm=-3t^2.$$

par l, m. n, r, s, t, polynômes des mêmes paramètres et à coefficients entiers.

Mais la recherche des solutions de ce système nous conduit à une descente infinie très interessante. Une telle solution n'existe en effet qu'à la condition qu'un système d'equations (13, du texte grec.) soit identifié par des valeurs entières x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 inferieures à l, m, n, r, s, t (comme on le voit dans les équations 12) Mais, ce qui rend cette descente

[1] On sait de même que dans le cas $x^n+y^n+z^n=0$ les expressions:

$$y^2+yz+z^2,\quad z^2+zx+x^2,\quad x^2+xy+y^2$$

sont des diviseurs de $x^{2n}-y^nz^n$ e. c. t.

plus importante, est que par les substitutions 15 ou 16 (du texte grec) on arrive des équations 13 aux équations initiales 9 (dans lesquelles l_1, m_1, n_1, r_1, s_1, t_1 deviennent irrationnels, (du corps formé par $\sqrt{-3}$) mais d'une forme bien precisée par les équations 15 et 16), ce qui nous permet de continuer la descente vers des valeurs encore plus petites x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2. Par les mêmes substitutions 15 ou 16 on revient ensuite à un système de valeurs rationelles l_2, m_2, n_2, r_2, s_2, t_2, identifiant le système 9. Mais ces valeurs sont évidemment de beauconp plus inferieurs aux l, m, n, r, s, t, par les quelles nous avons commencé.

Il est impossible de développer cette descente dans le seul cas que $l=m=n=r=s=r$. Mais nous prouvons que cette exception correspond à l'équation $x+y+z=0$, la quelle evidemment ne peut pas être verifiée par les mêmes valeurs x, y, z qui verifient $x^n+y^n+z^n=0$.

Nous démontrons ensuite que les équations 9 n'admettent pas des solutions, *même en nombres entiers* (excepté au cas, où $l=m=n=r=s=t$). Une telle solution (demontrée impossible) étant admise, il serait aisé d'en déduire une infinité d'autres, en employant les formules ascendantes données dans la note 5.

On en conlue qu', à l'exception du cas mentionné, il ne serait pas possible d'exprimer à la fois x^2-yz, e. c. t. sous la forme p^2+pq+q^2. Dans le cas, qu'une étude plus approfondie des relations 9 n'aurait pas conduit à la conclusion qu'elles représentent la condition nécessaire, afin que les trois *nombres* x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy s'expriment sous la forme p^2+pq+q^2 (ce qui serait une démonstration complête du theorême) on devrait avancer aux termes:

$\dfrac{x^{2n}-y^nz^n}{x^2-yz}$ e. c. t. et étudier la même obligation, imposée sur ces termes.