19. TUNMANN u. ROSENTHALER, Pflanzenmikrochemie, 1931.

20. ΦΟΥΦΑΣ ΧΡ., Συμβολὴ εἰς τὴν μελέτην τῆς διαδόσεως τῶν δεψικῶν οὐσιῶν ἐν τῷ φυτικῷ βασιλείῳ καὶ τῆς κατανομῆς αὐτῶν ἐντὸς τῶν φυτικῶν ὀργάνων, 1957.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. – Une propriété des corps commutatifs de caractéristique zéro, *par S. P. Zervos* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Π. Παπαϊωάννου.

I. INTRODUCTION.

Le théorème classique qui affirme que «le corps des nombres complexes C est algébriquement clos» peut aussi être interpreté de la manière suivante: L'anneau complété du corps des nombres algébriques (c'est-à-dire, de la clôture du corps des nombres rationnels) est un corps algébriquement clos.

Ce dernier énoncé est un cas très particulier du théorème suivant qui constitue le résultat principal de la présente Note: *L'anneau complété de la clôture algébrique d'un corps commutatif de caractéristique zéro, munie de sa structure uniforme intrinsèque, est un corps algébriquement clos.*

II. PRÉLIMINAIRES A LA DÉMONSTRATION.

Terminologie et notations: Celles de Bourbaki[1] et de notre Thèse[2]. Abréviations: e.t.o. = ensemble totalement ordonné; resp. = respectivement.

1. *Une classe des filtres généralisant le filtre de Fréchet; applications topologiques.* Soit: J un e.t.o. (la relation d'ordre étant notée $\leqq$) sans dernier élément, E un ensemble non vide et $(x_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de E; la famille $(x_j)_{j\in J}$ munie de l'ordre induit par J, est elle-même un e.t.o. filtrant à droite; on peut considérer le filtre F de ses sections, qui généralise directement le filtre de Fréchet (qui correspond au cas particulier

---

* Σ. Π. ΖΕΡΒΟΥ, Μία ἰδιότης τῶν ἀντιμεταθετικῶν σωμάτων χαρακτηριστικῆς μηδενός.

[1] N. BOURBAKI, Eléments de mathématique, Paris.

[2] S. P. ZERVOS, Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. 77, 1960, σελ. 303-410.

$J = N$); F est l'ensemble des parties A de E telles que A contienne tous les x_j d'indice $j > j_o$ (j_o parcourt J).

Définition 1. Quand E est un espace topologique, on dira que l'e.t.o. $(x_j)_{j \varepsilon J}$ converge vers $\alpha \varepsilon E$ si, pour tout voisinage V de α, existe un élément $j_v \varepsilon J$ tel que $x_j \varepsilon V$, quel que soir $j > j_v$.

Définition équivalente: $(x_j)_{j \varepsilon J}$ converge vers $\alpha \varepsilon E$ si le filtre des sections de $(x_j)_{j \varepsilon J}$ converge vers α.

Dans le cas particulier où tout point de E possède un système fondamental dénombrable des voisinages et où $J = N$, la définition 1 coïncide avec la définition classique pour les suites dénombrables des points dans un espace métrique.

Définition 2. Quand E est un espace uniforme, on dira que $(x_j)_{j \varepsilon J}$ est un e.t.o. de Cauchy si l'ensemble (x_j) ($j \varepsilon J$ et $j > j_o$) est aussi petit qu'on veut, pourvu que j_o soit assez grand.

Définition équivalente: $(x_j)_{j \varepsilon J}$ est un e.t.o. de Cauchy si le filtre des sections de cet e.t.o. est un filtre de Cauchy.

Dans le cas particulier où E est un espace métrique, la définition 2 coïncide avec la définition classique pour les suites dénombrables des points. Rappelons maintenant que nous avons appelé dans notre Thèse «espace G- métrique» un ensemble muni de la structure définie par une application $E \to G$ (G = groupe abélien totalement ordonné, non discret, noté additivement) vérifiant les axiomes de la distance; les espaces G — métriques constituent une généralisation très naturelle des espaces métriques. Dans le cas d'une espace G – métrique la définition 2 prend la forme suivante: Pour que $(x_j)_{j \varepsilon J}$ soit un e.t.o. de Cauchy, il faut et il suffit que, pour tout élément $\varepsilon > o$ de G, existe un indice j_ε tel que $| x_{j_1} - x_{j_2} | < \varepsilon$, quel que soit le couple (j_1, j_2) d'indices $> j_\varepsilon$.

L'utilisation des e.t.o. de Cauchy est souvent très commode, car elle permet de généraliser directement les raisonnements classiques pour les suites dénombrables.

2. Soit K_o un corps ordonné. La K_o — valeur absolue $f: K_o(i) \to K_o$, définie par $f(\alpha + bi) = +\sqrt{\alpha^2 + b^2}$ (α et $b \varepsilon K_o$) et la structure uniforme S déduite de celle-ci seront dites «intrinsèques»; elles ont été considérées en détail dans notre Thèse.

On considère ci-dessous un corps commutatif K de caractéristique zéro, algébriquement clos. D'après la théorie des corps ordonnés d'Artin et O. Schreier, K peut toujours être mis sous la forme $K_o(i)$. On peut donc supposer K muni de f et de S. L'utilisation des e.t.o. de Cauchy rend alors immédiats les faits que l'anneau complété $\widehat{K}$ (resp. $\widehat{K_o}$) de K (resp. K_o) est un corps et que $\widehat{K} = \widehat{K_o}(i)$.

III. LE THÉORÈME.

Le corps $\widehat{K}$ est algébriquement clos.

C'est le théorème annonçé dans l'introduction; sa démonstration utilise le lemme: *Les extensions algébriques ordonnées d'un corps ordonné A sont (en tant qu'ensembles totalement ordonnés) cofinales à A.*

Démonstration: Soit L la clôture algébrique de A; alors, $L = L_o(i)$, où L_o est une extension ordonnée de A. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $\xi \varepsilon L_o$ tel que, quel que soit l'élément positif α de A, on ait $\xi > \alpha$. En effet, $\xi > \alpha$ impliquerait que $\xi^{m+1} > \alpha \xi^m$ $(m \varepsilon N)$, donc que $\xi^n > \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + \alpha_o$, quels que soient les éléments positifs $\alpha_o, \ldots, \alpha_{n-1}$ de A; donc, $\xi^n > | b_{n-1} | \xi^{n-1} + \cdots + | b_o |$, quels que soient les éléments $b_o, \ldots, b_{n-1}$ de A; donc, ξ ne pourrait annuler un polynôme à coefficients dans A, contrairement à l'hypothèse que ξ est algébrique sur A.

Revenons à l'hypothèse du théorème et appliquons le lemme avec $A = \widehat{K_o}$. Comme $L = L_o(i)$, il s'ensuit que $L - \{o\}$ ne contient pas d'élément plus grand (resp. plus petit), en valeur absolue, que tous les éléments positifs de $\widehat{K_o} - \{o\}$.

K_o (resp. K) étant dense dans $\widehat{K_o}$ (resp. $\widehat{K}$), le résultat précédent implique que $L - \{o\}$ ne contient pas d'élément plus grand (ou, plus petit), en valeur absolue, que tous les éléments positifs de $K_o - \{o\}$. D'où, le corollaire du lemme: *Si un e.t.o. d'éléments de K est de Cauchy par rapport à $\widehat{K}$, il est également de Cauchy par rapport à L et vice-versa.*

Démonstration: La première assertion est conséquence du fait que $L_o - \{o\}$ ne contient pas d'élément positif plus petit que tous les éléments positifs de $K_o - \{o\}$; l'autre assertion est évidente.

Donc, si un e.t.o. $(x_j)_{j \varepsilon J}$ d'éléments de $K \subset \widehat{K} \subset L$ converge vers $\alpha \varepsilon \widehat{K}$ dans $\widehat{K}$, il converge vers α aussi dans L.

On peut procéder maintenant à la démonstration du théorème.

Soit $\xi^{(1)} \varepsilon L$ et soit $f(x) = \sum_{\nu=o}^{n} \alpha_\nu x^\nu$ $(\alpha_\nu \varepsilon \widehat{K})$ le polynôme minimal de $\xi^{(1)}$ sur $\widehat{K}$. D'après la définition de $\widehat{K}$, α_ν est la limite d'un e.t.o. $(\alpha_j^{(\nu)})_{j\varepsilon J}$ de Cauchy d'éléments de K; le corollaire du lemme implique alors que $(\alpha_j^{(\nu)})_{j\varepsilon J}$ converge vers α_ν aussi dans L. Ceci permet d'appliquer à f(x) le théorème «de la continuité des zéros d'un polynôme en tant que fonctions de ses coefficients» que nous avons démontré dans notre Thèse et qui généralise le théorème classique de même nom pour le plan complexe. D'après ce théorème, quand $\{\alpha_j^{(\nu)} \rightarrow \alpha_{(\nu)}$ $_{(\nu=o,1,\ldots,n)}$, les zéros $\xi_j^{(\mu)}$ $(\mu=1,\ldots,n)$ du polynôme (à coefficients dans $K \subset L$) $f_j(x) = \sum_{\nu=o}^{n} \alpha_j^{(\nu)} x^n$ convergent dans L resp. vers les zéros $\xi^{(\mu)}$ de f(x). Or, comme les zéros de $f_j(x)$ appartiennent à K (puisque K est algébriquement clos), on peut appliquer à l'e.t.o. de Cauchy $(\xi_j^{(\mu)})_{j\varepsilon J}$ la deuxième assertion du corollaire du lemme; donc, $\xi^{(\mu)}$ est la limite d'un e.t.o. de Cauchy par rapport à K d'éléments de K; donc, $\xi^{(\mu)}$ $\varepsilon \widehat{K}$ $(\mu=1,\ldots,n)$.

Les conséquences de ce théorème pour l'extension de certains résultats de l'Analyse classique au cas d'un corps commutatif de caractéristique zéro, complet par rapport à sa structure uniforme intrinsèque, seront étudiées dans une autre Note; elles proviennent du fait qu'on peut, en vertu de ce théorème, supposer que le corps est à la fois complet et algébriquement clos.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν διατυποῦται καὶ ἀποδεικνύεται τὸ ἑξῆς νέον θεώρημα: *Ὁ συμπεπληρωμένος δακτύλιος ἀλγεβρικῶς κλειστοῦ σώματος χαρακτηριστικῆς μηδενός, ἐφωδιασμένου διὰ τῆς φυσικῆς uniforme δομῆς του, εἶναι σῶμα ἀλγεβρικῶς κλειστόν.*

★

Ὁ ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Π. Παπαϊωάννου**, ἀνακοινῶν τὴν ἀνωτέρω μελέτην, εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν ἐργασίαν τοῦ διδάκτορος τῶν μαθηματικῶν καὶ προσφάτως ἐκλεγέντος ἐκτάκτου Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπι-

στημίου Ἀθηνῶν κ. Σπυρίδωνος Π. Ζερβοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον «Μία ἰδιότης τῶν ἀντιμεταθετικῶν σωμάτων χαρακτηριστικῆς μηδενός».

Ὁ κ. Ζερβὸς διὰ σειρᾶς ἐργασιῶν του, τὰς ὁποίας ἀνεκοίνωσεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων ὁ διάσημος μαθηματικὸς Paul Montel ἐπεξέτεινε σημαντικὸν τμῆμα τῆς θεωρίας τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς εἰς ἀλγεβρικὰ συστήματα πολὺ γενικώτερα τοῦ μιγαδικοῦ σώματος.

Κατὰ τὰς κρίσεις τῶν διασήμων μαθηματικῶν Montel, Denjoy, Pisot καὶ Krasner, αἱ ἐργασίαι αὗται τοῦ κ. Ζερβοῦ μετέβαλον τὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεως θεμάτων, μὲ τὰ ὁποῖα εἶχον ἀσχοληθῆ πολλοὶ διαπρεπεῖς ἐρευνηταί.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν του ὁ κ. Ζερβὸς διατυπώνει καὶ ἀποδεικνύει τὸ ἑξῆς θεώρημα: «Ὁ συμπεπληρωμένος δακτύλιος ἀλγεβρικῶς κλειστοῦ σώματος χαρακτηριστικῆς μηδενός, ἐφωδιασμένου διὰ τῆς φυσικῆς uniforme δομῆς του, εἶναι σῶμα ἀλγεβρικῶς κλειστόν».

Διὰ τῆς ἐργασίας αὐτῆς γενικεύεται τὸ ἑξῆς κλασσικὸν θεώρημα: «Ὁ συμπεπληρωμένος δακτύλιος τοῦ ἐφωδιασμένου διὰ τῆς συνήθους ἀπολύτου τιμῆς του σώματος τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι σῶμα ἀλγεβρικῶς κλειστόν».

Ἐνῷ αἱ προηγούμεναι ἐργασίαι τοῦ κ. Ζερβοῦ εἶχον κυρίως περιστραφῆ περὶ τὰς ρητὰς συναρτήσεις, διὰ τῆς παρούσης τίθενται αἱ προϋποθέσεις σπουδῆς γενικωτέρων συναρτήσεων εἰς τὰ πλαίσια τῶν ἀντιμεταθετικῶν σωμάτων χαρακτηριστικῆς μηδενός.

Τὸ περιεχόμενον τῆς ἐργασίας αὐτῆς ἀνήκει εἰς τὴν Νεωτέραν Ἄλγεβραν καὶ εἰς τὴν Τοπολογίαν.

ΣΤΡΩΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ.— Τὸ Πλειόκαινον τῆς Καρπάθου, (Πρόδρομος ἀνακοίνωσις) ὑπὸ ***Κωνστ. Ἀναπλιώτου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μαξ. Κ. Μητσοπούλου.

Μὲ τὴν στρωματογραφίαν καὶ τὴν παλαιοντολογίαν τῶν νεογενῶν σχηματισμῶν τῆς Καρπάθου ἠσχολήθησαν κατὰ καιροὺς διάφοροι ἐρευνηταὶ καὶ κυρίως οἱ C. de Stefani (1), A. Martelli (2), A. Desio (3) καὶ τέλος ὁ Γ. Χριστοδούλου (3).

Ἡ πρώτη συστηματικὴ μελέτη τῆς γεωλογικῆς κατασκευῆς τῆς νήσου ὀφείλεται εἰς τὸν C. de Stefani, στηρίζεται δὲ εἰς τὸ πετρολογικὸν καὶ παλαιοντολογικὸν ὑλικὸν τὸ ὁποῖον συνέλεξεν ὁ C. Forsyth Major. Βάσει λιθολογικῶν κυρίως ὁμοιοτήτων δέχεται οὗτος, ὅτι οἱ τριτογενεῖς σχηματισμοὶ τῆς νήσου δέον νὰ ὑπαχθοῦν εἰς τὸ *Μέσον Μειόκαινον* ἀποκλειομένου τοῦ Πλειοκαίνου, l.c.p. 159: «...Prin-

* K. ANAPLIOTIS, Les formations pliocènes de l'île de Karpathos.