4. D. MARKOVITCH, Sur quelques limites des modules d'une somme. Bull. de la Soc. des math. et physiciens, II (1-2), Beograd, 1950, pp. 32-35 (en serbe, résumé en français).

5. D. MARKOVITCH, A propos d'une inégalité de M. Petrovitch. Bull. de la Soc. des math. et phys., XI, Beograd 1950, pp. 44-53 (en serbe, résumé en français).

6. D. MARKOVITCH, Sur la limite inf. des modules des zéros des polynômes de deux variables. Publications de l'Institut mathématique, t.I (15), 1961, pp. 101-107.

Les autres auteurs cités dans cet article se trouvent dans les articles de cette liste.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. – **Factorisation approximative des polynômes par une méthode itérative,** *par D. Markovitch**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνστ. Παπαϊωάννου.

1° **Procédé d'itération.** Soit

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x^\nu = 0 \tag{1}$$

une équation sur le corps C des nombres complexes et x un des ses zéros. D'une manière quelconque on peut exprimer x explicitement comme

$$x = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

c'est à dire sous la forme d'une fraction rationelle, le dégré de $Q(x)$ etant $m-1$, et le dégré de $P(x)$ $m-1$ au plus.

Appliquons au second membre de (2) les transformations T_k définies par

$$x^k = \frac{x^{k-1}P(x)}{Q(x)} \cdot \qquad k=1,2,\dots,m-1. \tag{3}$$

Il deviendra alors

$$x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{4}$$

où il faut effectuer au moyen de l'équation (1) la réduction des puissances x^m, x^{m+1},... à puissance x^{m-1} au plus. Il est possible de répéter les transformations T_k n fois successivement, et ainsi obtenir

$$x = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}, \; n \in N, \tag{5}$$

* D. MARCOVITCH, Προσεγγιστικὴ ἀνάλυσις εἰς παράγοντας τῶν πολυωνύμων διὰ μιᾶς μεθόδου ἐπαναλήψεως.

$P_n(x)$ et $Q_n(x)$ désignant, après les dites réductions des puissances x^m, $x^{m+1}, \ldots$ des polynômes des dégrés $m-1$ au plus.

Par conséquent, les transformations T_k et les réductions, ont pour effet d'obtenir une suite d'identités et de retenir dans toutes les itérées (5) les dégrés de $P_n(x)$ resp. $Q_n(x)$ à $m-1$ de façon que les équations

$$x\,Q_n(x) - P_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad x\,Q(x) - P(x) = 0$$

soient équivalentes et ne différent qu'à un facteur constant près, pour chaque $n \in N$.

2°. **Convergence.** Écrivons

$$x = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \alpha_\nu(n) \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \beta_\nu(n) \tag{6}$$

$\alpha_\nu(n)$ et $\beta_\nu(n)$ étant les coefficients de $P_n(x)$ resp. $Q_n(x)$ après la n-ième itération. Alors,

si les rapports

$$x_n = \frac{\alpha_n(n)}{\beta_n(n)}$$
$$0 \leq \nu \leq m-1$$

tendent, avec $n \to \infty$, *vers une constante* α, *elle signifiera un zéro de l'équation* (1), *tandis que* x_n *pour* $n \in N$ *fixe, représentera une valeur approchée de* α.

Preuve. En effet, l'équation (6) écrite comme

$$x \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \beta_\nu(n) - \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \frac{\alpha_\nu(n)}{\beta_\nu(n)} \cdot \beta_\nu(n) = 0,$$

avec la condition

$$\frac{\alpha_\nu(n)}{\beta_\nu(n)} = \alpha + \varepsilon_\nu(n)$$
$$\varepsilon_\nu(n) \to \infty, \text{ avec } n \to \infty,$$

deviendra

$$(x-\alpha) \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \beta_\nu(n) - \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \varepsilon_\nu(n)\,\beta_\nu(n) = 0. \tag{7}$$

Quand on passe à la limite, la dernière équation recevra la forme du produit de deux facteurs, un facteur linéaire $x-\alpha$ et l'autre facteur polynôme de dégré $m-1$. D'où la conclusion: *pour tout* $n \in N$ *fixe, le facteur linéaire* $x - x_\nu$ *et le facteur complementaire*

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \beta_\nu(n)$$

factorisent approximativement l'équation (1).

3°. Forme matricielle.

En décrivant le procédé d'itération on a dit que chaque forme pour x permet d'en deduire par les transformations T_k les formes correspondantes (3) pour x^2, $x^3, \ldots, x^{m-1}$, c'est à dire une suite de fractions rationelles dont les polynômes dans les nominateurs et dénominateurs ont des dégrés $m-1$ au plus. Pour accomoder l'écriture, nous écrirons maintenant la seconde partie de (3) comme

$$8) \qquad x^k = \sum_{\nu=o}^{m-1} x^\nu \alpha_{k\nu} \Big/ \sum_{\nu=o}^{m-1} x^\nu \alpha_{o\nu} \qquad 1 \leq k \leq m-1$$

L'écriture analogue est possible aussi et pour chaque forme (5). Or, il est de même

$$9) \qquad x^k = \sum_{\nu=o}^{m-1} x^\nu \alpha_{k\nu}(n) \Big/ \sum_{\nu=o}^{m-1} x^\nu \alpha_{o\nu}(n).$$

Tout ça nous donne la possibilité de former deux matrices carrées, matrice initiale

$$(10) \qquad A = \left\| \begin{matrix} \alpha_{oo}\ \alpha_{o1} \ldots \alpha_{o,m-1} \\ \alpha_{1o}\ \alpha_{11} \ldots \alpha_{1,m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m-1,o}\ \alpha_{m-1,1}\ \alpha^{m-1,m-1} \end{matrix} \right\|$$

et la matrice génératrice

$$11) \qquad A_n = \left\| \begin{matrix} \alpha_{oo}(n)\ \alpha_{o1}(n) \ldots \alpha_{o,m-1}(n) \\ \alpha_{1o}(n)\ \alpha_{11}(n) \ldots \alpha_{1,m-1}(n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m-1,o}(n)\ \alpha_{m-1,1}(n) \ldots \alpha_{m-1,m-1}(n) \end{matrix} \right\|$$

Comme on voit les éléments de la matrice A_n deviennent successivement des éléments de la matrice A par la méthode d'itération déjà écrite. Mais la loi de formation des matrices A_n est possible aussi au moyen des puissances $A^2, A^3, \ldots A^n, \ldots$ telle que $A^n \equiv A_n$, pour tout $n \in N$. En effet, les transformations (3) apliquées à (8) ou à (9) nous conduisent successivement d' une itération à la suivante (de la n−ième à $(n+1)$−ième). Cela revient au même que faire le produit de la matrice

$$12)\qquad B_n = \left\| \begin{matrix} \alpha_{oo}(n) & \alpha_{o1}(n) & \ldots & \alpha_{o,m-1}(n) \\ \alpha_{ko}(n) & \alpha_{k1}(n) & \ldots & \alpha_{k,m-1}(n) \\ & 1 \leq k \leq m-1 & & \end{matrix} \right\|$$

avec la matrice A. Mais au lieu de la matrice B_n, on peut commencer avec la matrice initiale A et multiplier avec A. Ainsi nous aurons

$$A_2 = A \cdot A = A^2, A_3 = A^2 \cdot A = A^3, \cdots, A_n = A_{n-1} \cdot A = A^n \cdot$$

L'identité $A^n = A^{n-1}A$ définit en même temps la loi de formation des coefficients, la loi recurrente, tandis que les puissances de la matrice A les produisent immédiatement.

Donc les relations entre les $\alpha_{ij}(n)$ et $\alpha_{i\nu}(n-1)$ sont

$$13)\qquad \alpha_{ij}(n) = \sum_{\nu=o}^{m-1} \alpha_{i\nu}(n-1) \cdot \alpha_{\nu j} \qquad i,j = o,1,2\ldots,m-1.$$

La convergence exprimée dans cette forme est la suivante:

Si la matrice génératrice A^n *tend, pour* $n \to \infty$, *vers une matrice* M *de manière que les rapports de deux éléments, qui correspondent à une même colonne de deux lignes consécutives, tendent vers une constante* α

$$14)\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{\alpha_{i-1,j}(n)} = \alpha \qquad i,j = 1,2,\ldots,m-1,$$

alors α *représentera un zéro de l'équation donnée* (1).

La matrice génératrice possède quelques propriétés et elles seront maintenant énumerées.

a) Chaque rapport

$$x_n = \frac{\alpha_{ij}(n)}{\alpha_{i-1,j}(n)}$$

pour une paire d'indices $(i,j), i,j = 1,2,\ldots,m-1$ et pour $n \in N$ fixe signifie une valeur approchée du zéro α;

b) Les rapports

$$x_n^i = \frac{\alpha_{i\nu}(n)}{\alpha_{o\nu}(n)} \qquad o \leq \nu \leq m-1$$

représentent les valeurs approchées du zéro α élevé au puissance $i \in N$;

c) Chaque polynôme

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} x^{\nu} \alpha_{i\nu}(n)$$
$$0 \leq i \leq m-1$$

qu'on peut former un moyen des éléments de la i - ième ligne, contient approximativement les zéros restants de l'équation (1). Il faut remarquer qu' on n'est pas obligé de chercher toutes les limites (14). Il suffit de prendre les éléments de deux lignes consécutives quelconques. D'après mon expérience, si la matrice converge, les valeurs les plus proches de α proviennent des rapports de deux premières lignes (c.a.d. pour $i=1$).

Mais tout de même il reste maintenant aussi de chercher encore m limites (jour $0, 1, 2, \ldots, m-1$). Cependant les rapports ne sont pas arbitraires puisque ils existent des relations linéaires entre les nominateurs et dénominateurs. Précisement dit, chaque nominateur d'un rapport s'exprime linéairement par des dénominateurs des autres rapports, et inversement. Cela vient quand on compare deux identités pour x, une de (8) et l'autre de (9) pour $k=1$, après les avoir retourné en équations algébriques et égalé les coefficients correspondants des x^{ν}.

Il est intéressant d'indiquer la différence entre l'itération bien connue et l'itération écrite dans ce travail. Avant tout, cette itération s'applique aux polynômes réels ou complexes, tandis que l'itération classique s'applique aussi aux fonctions transcendantes mais réelles. Le but de cet article est d'exposer et d'appliquer la méthode aux polynômes. Cependant nous remarquerons que la méthode s'applique aussi aux fonctions représentées par les series des puissances de x.

On sait que l'itération classique est ordinairement définie par

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

S'il s'agit d'une fonction $\varphi(x)$ réelle, dérivable et définie sur un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ pour tout ensemble de valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots$ contenu dans $[\alpha, \beta]$, on doit partir d'une valeur (nombre) arbitraire x_0 de $[\alpha, \beta]$ et obtenir successivement les autres valeurs (nombres) approchées $x_2, x_3, \ldots x_n$ du zéro α. Dans notre méthode on part d'une fonction et, en itérant, on obtient une suite de fonctions de même forme mais numériquement differentes.

Tandis que le procédé de l'itération classique cherche un nombre limite α par une suite de nombres, ici au contraire on cherche la fonction limite (constante α) par une suite de fonctions Le critère de convergénce $|\varphi'(x)| \leq k < 1$ s'obtient par les différences $|x - x_n|$ et au moyen de la formule des accroissement finies. Le critére de convergence dans notre cas s'exprime par des rapports des coefficients.

Dans le cas où l'équation (1) appartienne au corps R_e des nombres réels, il est commode de donner une interprétation géométrique. L'intersection de la droite $y = x$ et d'une courbe quelconque $y = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = R_n(x)$ donnera une valeur approchée x_n de a. L'intersection de la droite $y = x$ et de la droite $y = \alpha$ (courbe limite) donnera le zéro de l'équation comme la limite de la suite $R_n(x)$. Les parties des courbes de la suite $R_n(x)$ autour du point limite se rectifient pas à pas en tendant vers la droite $y = \alpha$.

4°. Applications.

Comme on a vu la méthode peut s'appliquer immédiatement à calculer les zéros d'une équation algébrique. La condition nécessaire est que les limites des rapports existent et tendent vers une constante α, un zéro de l'équation. Mais il peut arriver que la limite n'existe pas. Un cas bien évident est quand l'équation en réel ne possède que des zéros imaginaires. Telle est par exemple l'équation $x^4 - x + 1 = o$. Chaque forme rationelle de x se fermera après quelques itérations successives, c'est à dire on reviendra de nouveaux à x. Un autre mode de divergence du procédé se manifeste par les diverses et discordantes valeurs des rapports d'une itération à l'autre, quoique le procédé ne se ferme pas (est illimité).

Dans le cas où l'équation en réel ne possède que des zéros imaginaires ou bien quand elle possède les zéros réels et imaginaires, la méthode ne s'employera (pour calculer les zéros imaginaires) qu'après une transformation linéaire de l'équation qui la transforme dans l'équation équivalente en complexe. Ainsi par exemple l'équation $x(x^p + 1) - 1 = o$, possède les zéros réels et imaginaires. Si P est pair, la forme $x = \frac{1}{1 + x^p}$ donnera les valeurs approchées du zéro réel et positif. Pour calculer les zéro imaginaires on introduira $x = t + \alpha_k$, où

$$\alpha_k = e^{\frac{(2k+1)ai}{p}}$$
$$o \leq k \leq p-1.$$

On appliquera alors l'itération à l'équation $1 = t(c_o + c_1 t + \ldots + c_p t^p)$

dont les coefficients c_ν sont devenus maintenant complexes, et on obtiendra les valeurs approchées des zéros imaginaires. On ne changera rien surtout si p est impair. La transformation nous donnera les valeurs approchées des autres zéros, d'un réel négatif et des zéros restants imaginaires. En réalité si nous considérons α_k comme un paramètre, qui doit prendre strictement les zéros de la fonction $x(1+x^p)$, le procédé d'itération donnera approximativement tous les zéros de l'équation, dépendant des α_k.

Cet exemple n'est pas unique. Dans le cas général, toute équation $1=x(\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1})=x\cdot\varphi(x)$ dans laquelle est possible d'exprimer les zéros de $\varphi(x)$ en termes finis, une fraction rationelle unique itérée nous ferra de calculer plusieurs ou tous les zéros l'équation $1-x\varphi(x)=0$. Pour montrer, posons dans l'équation précédente $x=t+\lambda$, t étant le nouveau zéro, et λ un paramètre ne pouvant prendre que des valeurs qui sont les zéros de $x\varphi(x)$. Sous telle condition l'équation est transformée en forme invariable $1=t(c_0+c_1+t\ldots c_{m-1}t^{m-1})=t.u(t)$, les coefficients c_ν étant polynômes de λ. L'itération produira les valeurs approchées dépendant de λ. On obtiendra chaque zéro séparément si l'on pose pour λ successivement les zéros de $x\varphi(x)$.

Le cas général de calculer plusieurs ou tous les zéros par une unique itération où il n'est pas possible d'exprimer les zéros de $\varphi(x)$ en termes finis, est essayé dans [3], mais les récherches ne sont pas terminées complètement.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς μιᾶς νέας μεθόδου ἐπαναλήψεως, δίδεται μία νέα προσεγγιστικὴ ἀνάλυσις τῶν πολυωνύμων εἰς παράγοντας.

RÉFÉRENCES

1. D. Markovitch.—Sur un procédé de factorisation approximative des polynômes, Bull. de la Société des math. et phys. de la R.P. de Serbie, VI, (1-2). Beograd, 1954 (en français).
2. D. Markovitch. - Sur une factorisation approximative des polynômes, Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R.P. de Serbie, VIII (1-2). Beograd, 1956 (en serbe avec un résumé en français).
3. D. Markovitch. Les méthodes pratiques des factorisation approximative des polynômes, Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R.P. Macédoine, t. VII. Skopje, 1956 (en français).