

ment. Plus le radicale CH_3 est éloigné plus la vitesse de reaction augmenté.

En recherchant combien un excès d'aniline ou d'acide benzoïque pourrais soit activer soit retarder la reaction nous avons observé que c'est l'excès d'aniline qui seule activait la reaction.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—Περὶ ἐνὸς θεωρήματος τῶν κ. κ. F. et Rolf Nevanlinna, ὑπὸ κ. Θ. Βαροπούλου. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Μία συνάρτησις $f(z)$ ὁμαλὴ διὰ $|z| < 1$ καλεῖται περιορισμένη (bornée) ἐὰν τὸ μέτρον τῆς $|f(z)|$ δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου $|z| < 1$ μὲνῃ μικρότερον ἐνὸς ἀριθμοῦ M ὀρισμένου καὶ πεπερασμένου.

Διὰ μίαν συνάρτησιν $f(z)$ ὁμαλὴν ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$ εἶναι γνωστὴ ἡ ἐξῆς θεμελιώδης πρότασις ὀφειλομένη εἰς τοὺς κ. κ. F. et ROLF NEVANLINNA¹.

Θεώρημα: Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ συνάρτησις $f(z)$ ὁμαλὴ διὰ

$$|z| < 1$$

εἶναι πηλίκον δύο συναρτήσεων περιορισμένων ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$ εἶναι ἡ ἐξῆς: ἡ ἔκφρασις

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι περιορισμένη διὰ $0 \leq r < 1$

Θέτομεν $z = re^{i\varphi}$, $\log^+ a = \log a$ ἐὰν $a \geq 1$ καὶ $\log^+ a = 0$ ἐὰν $a < 1$.

2. Τὸ θεώρημα τοῦτο τῶν κ. κ. F. et R. NEVANLINNA συνεπάγεται τὸ ἐξῆς ζήτημα: «Ποίαις συντελείαις δύναται νὰ ἔχη ἡ πρότασις αὕτη διὰ τὰς οἰκογενείαις τῶν ὀλομόρφων συναρτήσεων ἐντὸς ἐνὸς κύκλου καὶ ποίαις ὅταν αἱ οἰκογένειαι αὗται ἀποτελοῦνται ἀπὸ πλειονοτίμους συναρτήσεων;»

Προτίθεμαι ν' ἀνακοινώσω μερικὰ ἐξαγόμενα εἰς ἄτινα ἤχθη ἐκ τῆς μελέτης τοῦ ζητήματος τούτου.

I. Θεώρημα: Ἐὰν μᾶς οἰκογενείαις $f_n(z)$ συναρτήσεων ὀλομόρφων διὰ

$$|z| < 1$$

ἐκάστη συνάρτησις $f(z)$ ἐπαληθεύη τὴν συνθήκην

¹ ROLF NEVANLINNA: Zur theorie der Meromorphen functionen (Acta Mathematica, t. 46, 1925).

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi < M ; \quad 0 \leq r < 1$$

όπου M είναι αριθμός σταθερός τότε η οικογένεια είναι *normale* κατά την έννοια του κ. MONTEL¹.

Πράγματι αποδεικνύεται ότι η ανισότης αυτή συνεπάγεται την ισότητα

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

όπου $\varphi(z)$, $\psi(z)$ είναι συναρτήσεις *bornées* και $|\psi(0)|$ μένει μεγαλύτερον ενός αριθμού σταθεροῦ· αἱ $f(z)$ αποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν ἄπειρον, συγκλίνουσαν ὁμαλῶς ἐντὸς τοῦ κύκλου

$$|z| < 1$$

Συνέπεια ἄμεσος τοῦ θεωρήματος I εἶναι ἡ ἐξῆς πρότασις:

II. Θεώρημα: Ἐὰν ἡ συνάρτησις $u(z)$ ἐπαληθεύη τὴν ἐξίσωσιν

$$u^v + f_1(z)u^{v-1} + f_2(z)u^{v-2} + \dots + f_v(z) = 0$$

οἱ δὲ συντελεσταὶ $f_k(z)$ δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f_k(re^{i\varphi})| d\varphi < M \quad \begin{cases} 0 \leq r < 1 \\ k = 1, 2, \dots, v \end{cases}$$

όπου M εἶναι αριθμός σταθερός, ἡ οικογένεια τῶν συναρτήσεων $u(z)$ εἶναι *normale* κατά τὴν έννοια του κ. MONTEL.

III. Θεώρημα: Ἐὰν ὑπάρχη ἀριθμός σταθερός A , τοιοῦτος ὥστε νὰ ἔχωμεν τὰς ἀνισότητας:

$$|f_1(z)| < A_1 \quad |f_2(z)| < A_2, \dots, \quad |f_v(z)| < A_v$$

ἡ οικογένεια $u(z)$ σύγκειται ἐκ συναρτήσεων *bornées* ἐν τῷ συνόλῳ των ἐντὸς τοῦ κύκλου

$$|z| < 1$$

ἡ οικογένεια αὕτη εἶναι *normale* καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ θεώρημα τοῦ κ. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ τὸ ἀφορῶν τὰς πλειονοτίμους συναρτήσεις.

3. Θεωρήσωμεν ἤδη μίαν ἀκολουθίαν ἄπειρον $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ πλειονοτίμων συναρτήσεων αἵτινες ἐπαληθεύουσιν τὰς προηγουμένας σχέσεις τῶν NEVAN-

¹ PAUL MONTEL: Leçons sur les series de polynomes à une variable complexe (p. 22-27).

LINNA: διὰ τὰς συναρτήσεις ταύτας, βοηθείες ἐν τῷ συνόλῳ των ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$, τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ κ. VITALI εἶναι ἐφαρμόσιμον· ἔχωμεν οὕτω τὸ ἐξῆς θεώρημα:

IV. Θεώρημα: Θεωρήσωμεν τὴν οἰκογένειαν τῶν πλειονοτήτων συναρτήσεων $u_\nu(z)$ τῶν ὀριζομένων ὑπὸ τῆς ἐξίσωσως

$$u^\nu + f_1^{(n)}(z)u^{\nu-1} + f_2^{(n)}(z)u^{\nu-2} + \dots + f_\nu^{(n)}(z) = 0$$

καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι

$$\int_0^{2\pi} \log |f_k^{(n)}(re^{i\varphi})| d\varphi < M \quad \begin{array}{l} 0 \leq r < 1 \\ k=1, 2, \dots, \nu \\ n=1, 2, 3, \dots \end{array}$$

ἐὰν ἡ ἀκολουθία $u_n(z)$ συγκλίνη εἰς μίαν ἀπειρίαν σημειῶν z_k ἅτινα ἔχουν ἐν ὀριακὸν σημεῖον ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$, αὕτη θὰ συγκλίνη ὁμαλῶς παντοῦ ἐντὸς τῆς περιφερείας $|z| < 1$.

4. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ κ. BLASCHKE ἔδειξε ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ κ. VITALI ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ ὀριακὰ σημεῖα τῆς ἀκολουθίας

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$$

ἦτις σύγκειται ἐκ τῶν σημείων τῆς συγκλίσεως κείνται ἐπὶ τῆς περιφερείας

$$|z| = 1$$

ἐν τῇ περιπτώσει ὅμως ταύτη πρέπει¹ νὰ περιορισθῇ ὁ ἀπειρισμὸς τῶν $|z_k|$: τὸ γινόμενον

$$\prod_{k=1}^{k=\infty} (1 - |z_k|)$$

δέον νὰ εἶναι ἀποκλίνον.

Τὸ θεώρημα τοῦ κ. BLASCHKE ἐφαρμόζεται ἐπομένως εἰς τὰς συναρτήσεις τὰς ὁποίας ἀνωτέρω ἐθεωρήσαμεν καὶ καταλήγομεν εἰς τὸ ἐξῆς θεώρημα:

V. Θεώρημα: Διὰ τὴν ἀκολουθίαν τῶν συναρτήσεων $u_n(z)$ αἵτινες πληροῦσι τοὺς ὅρους τῶν κ. NEVANLINNA, ἡ σύγκλισις εἰς μίαν ἀπειρίαν σημειῶν τοῦ κύκλου

$$|z| \leq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_k, \dots$$

¹ W. BLASCHKE, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über folgen analytischer Funktionen (Berichte der Math. Phys. Klasse der Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig Bd. LXVII, 1915 pp. 194-200) voir aussi G. VITALI, Sopra le serie di funzioni analitiche (Reudiconti del R. Ist. Lombardo, 2^e serie t. 36, 1903, p. 772; Annali di Math. pura ed applicata, 3^e serie t. X, 1904 p. 73).

τοιούτων ὥστε τὸ γινόμενον

$$\prod_{k=1}^{k=\infty} (1 - |z_k|)$$

νὰ εἶναι ἀποκλίνον, συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν τῆς ἀκολουθίας παντοῦ ἐντὸς τοῦ κύκλου

$$|z| < 1.$$

ELECTRONIQUE.—Potentiel d'ionisation et nombre atomique, *note*
de M. **Nicolas Perrakis**. Présentée par M. C. D. Zenghélis.

Les travaux de BRAGG nous ont appris que le rayon atomique est fonction périodique du nombre atomique. D'autre part, on sait, depuis LOTHAR MEYER, que le volume atomique l'est aussi. Enfin, M. N. SAHA¹ se servant des vues de SOMMERFELD-BOHR a montré que *le potentiel d'ionisation varie en raison inverse du rayon atomique*.

A la suite de ces considérations j'ai été amené à rechercher si une relation pouvait exister entre le potentiel d'ionisation et le nombre atomique.

J'ai pu tracer le graphique suivant (fig. 1 A) qui, quoique incomplet, peut donner une idée du genre de parenté existant entre ces deux propriétés.

Il ressort de l'examen de ce graphique une périodicité assez nette rappelant celle de la courbe de LOTHAR MEYER qui traduit la variation du volume atomique en fonction du nombre atomique. Cependant, comme on pourrait le prévoir, dans les deux cas, *les variations n'ont pas lieu dans le même sens*. Tel qu'il est ce graphique montre que chaque fois que l'atome se compliquera par l'addition d'un niveau d'énergie nouveau il se produira une chute brusque du potentiel d'ionisation. C'est ainsi que l'apparition de la couche L avec le lithium fait passer le potentiel d'ionisation de 24,5 volts (He) à 5,4 volt (Li). Il en est de même de l'addition des autres niveaux.

On voit, en outre, qu'à mesure que la couche nouvellement créée se chargera d'électrons entraînant une augmentation progressive du nombre atomique, le potentiel d'ionisation croîtra en ne deviendra maximum,— le terme est impropre, car il n'y a pas maximum mais discontinuité — marquant aussi la fin de chaque période, que lorsque cette couche contiendra 8 électrons (élément rare).

¹ SAHA (M. N.), [Nat. 107 (1921), 682-683].