ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 29ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1969

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΛΕΩΝ. Θ. ΖΕΡΒΑ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur la représentation des surfaces les unes sur les autres avec parallélisme des trièdres principaux,** *par Othon Pylarinos.* *

Les droites qui joignent les points homologues des deux surfaces d'un espace euclidien à trois dimensions, représentées l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents, engendrent une congruence dont les deux systèmes de surfaces développables, d'après un théorème dû à K. M. PETERSON (**4**, p. 25), découpent sur chacune d'elles, lorsqu'ils sont distincts, un réseau conjugué, nommé par lui *réseau de base de la représentation,* les tangentes en chaque couple de points homologues des deux surfaces aux courbes de leurs réseaux de base issues de ces points étant respectivement parallèles. Par ailleurs, d'après un autre théorème (**2**, p. 15), une surface S, sur laquelle les deux systèmes de surfaces développables d'une congruence de droites D découpent un réseau conjugué, admet toujours une famille de ∞^1 surfaces (F) représentées sur elle avec parallélisme des plans tangents, les points de ces surfaces homologues de chaque point de S étant situés sur la droite de la congruence D issue de ce point. Les surfaces de cette famille sont

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ τῆς ἀπεικονίσεως μιᾶς ἐπιφανείας ἐπὶ ἄλλης μετὰ παραλληλίας τῶν πρωτευόντων τριέδρων.**

appelées par A. MYLLER (**3**, p. 215) *surfaces parallèles à la surface* S *le long de la congruence* D.

Les réseaux de base des surfaces (F) dans la représentation indiquée de ces surfaces sur S sont les réseaux découpés sur elles par les surfaces développables de la congruence D ; or, si S est une surface courbe non sphérique et que le réseau decoupé sur elle par les surfaces développables de D soit le réseau (orthogonal) de ses lignes de courbure, il en est de même nécessairement, d'après le théorème de PETERSON, des réseaux de base de toutes les surfaces (F). Dans ce cas les faces du trièdre trirectangle formé au point courant P de S par les tangentes principales et la normale à S en P, qui, dans ce qui suit, est appelé *trièdre principal de la surface en ce point,* sont respectivement parallèles aux faces des trièdres principaux des surfaces (F) en leurs points homologues de P dans la représentation de ces surfaces sur S dans laquelle à chaque point de S correspondent les points des surfaces (F) situés sur la droite de D issue de ce point et la représentation de cette espèce, à l'étude des deux cas particuliers de laquelle le présent article est consacré, est appelée *représentation avec parallélisme des trièdres principaux.*

Dans la première partie nous montrons d'abord que l'on peut toujours faire correspondre à une surface donnée S un ensemble infini de congruences de droites (A), telles que les surfaces parallèles à S le long de chacune d'elles soient représentées sur S avec parallélisme des trièdres principaux. Ensuite nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'à l'ensemble (A) associé à une surface S appartienne une congruence dont la droite issue de chaque point de S est invariablement liée avec son trièdre principal sans coïncider avec sa normale en ce point et nous parvenons à l'aide des conditions données à la détermination de toutes les surfaces qui jouissent de la propriété indiquée.

Dans la seconde partie nous donnons une condition nécessaire et suffisante afin que l'ensemble (A) associé à une surface S contienne une congruence dont la droite issue de chaque point de S est située sur un plan normal à la surface en ce point invariablement lié avec son trièdre principal et nous étudions le cas particulier où la surface qui jouit de cette propriété est isothermique.

I

1. Considérons dans un espace euclidien à trois dimensions une surface courbe non sphérique S dépourvue de points singuliers et une congruence de droites D qui admet S comme surface directrice.

Si l'on désigne par E, F, G; L, M, N les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S rapportée à deux paramètres u, v tels que les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ sont ses lignes de courbure et définie par rapport au système de coordonnées choisi dans l'espace par l'équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \tag{1, 1}$$

on aura

$$F = M \equiv 0, \tag{1, 2}$$

tandis que E, G; L, M sont des fonctions des u, v vérifiant les deux équations de CODAZZI, qui, grâce aux (1, 2), peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right\}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right\}\frac{\partial G}{\partial u} \tag{1, 3}$$

et l'équation de GAUSS, qui, grâce aux (1, 2), devient

$$-\frac{LN}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right\} + \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\}. \tag{1, 4}$$

En outre, d'après des formules connues, on a, en vertu des (1, 2), au point courant P(u, v) de S

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} + L\bar{n}, \\ \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial u\partial v} &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} + N\bar{n}, \end{aligned}\right. \tag{1, 5}$$

---

* On suppose que les opérations de dérivation qui seront faites dans le présent article sont légitimes dans les intervalles considérés.

où

$$(1,6) \qquad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

est le vecteur-unité de la direction positive de la normale à S en P et

$$(1,7) \qquad \frac{\partial \bar{n}}{\partial u} = -\frac{L}{E}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} = -\frac{N}{G}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}.$$

Par ailleurs l'équation vectorielle de la congruence D peut s'écrire

$$(1,8) \qquad \bar{R} = \bar{r}(u,v) + \mu'\{\xi'\bar{t}_1 + \eta'\bar{t}_2 + \zeta'\bar{n}\}$$

où

$$(1,9) \qquad \bar{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \qquad \bar{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

sont les vecteurs-unités des directions positives des tangentes en P(u, v) aux lignes de courbure v = Cte, u = Cte de S issues de ce point, c. à-d. des tangentes principales de S en P, qui avec la normale à la surface en ce point forment son trièdre principal, ξ', η', ζ' sont les cosinus directeurs de la droite de D issue du point P par rapport au système $[P; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}]$ et μ' est le paramètre aux valeurs duquel correspondent les points de cette droite.

Si l'on suppose de plus que la surface S ne coïncide avec aucune de nappes focales de D, on aura $\zeta' \neq 0$ et, si l'on pose

$$(1,10) \qquad \frac{\xi'}{\zeta'} = \xi, \qquad \frac{\eta'}{\zeta'} = \eta, \qquad \zeta'\mu' = \mu,$$

on peut, en tenant compte en même temps des (1, 9), écrire l'équation (1, 8) de la congruence D sous la forme :

$$(1,11) \qquad R = \bar{r}(u,v) + \mu\left\{\frac{\xi}{\sqrt{E}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \frac{\eta}{\sqrt{G}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} + \bar{n}\right\}.$$

L'équation (1, 11), si l'on y remplace μ par une fonction des u, v : $\mu(u,v)$, définie pour tous les systèmes de valeurs des u, v correspondant aux points de S, détermine une surface Σ.

Cela étant, en différentiant cette équation par rapport à u et à v et en tenant compte des (1, 5) et (1, 7), il vient

$$
(1,12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\left\{1+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\xi}{\sqrt{E}}\right)+\frac{\mu\xi}{2E\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{\mu\eta}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}-\mu\frac{L}{E}\right\}+\\
&+\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\eta}{\sqrt{G}}\right)-\frac{\mu\xi}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{\mu\eta}{2G\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\right\}+\\
&+\ \bar{n}\left\{\frac{\partial \mu}{\partial u}+\frac{\mu\xi}{\sqrt{E}}L\right\},\\
\frac{\partial \bar{R}}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu\xi}{\sqrt{E}}\right)+\frac{\mu\xi}{2E\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\mu\eta}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\right\}+\\
&+\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\left\{1+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu\eta}{\sqrt{G}}\right)+\frac{\mu\xi}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{\mu\eta}{2G\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial v}-\mu\frac{N}{G}\right\}+\\
&+\ \bar{n}\left\{\frac{\partial \mu}{\partial v}+\frac{\mu\eta}{\sqrt{G}}N\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Les surfaces Σ, S se correspondent de manière que deux points homologues de ces surfaces correspondent au même système de valeurs des u, v où — ce qui revient au même — de manière que la congruence engendrée par les droites joignant les points homologues des deux surfaces soit la congruence D et, pour que cette correspondance entre les surfaces Σ, S soit une représentation avec parallélisme des trièdres principaux, il faut et il suffit, eu égard au fait que les courbes $v=\mathrm{Cte}$, $u=\mathrm{Cte}$ sur la surface S sont ses lignes de courbure, que les tangentes en chaque couple de points homologues des deux surfaces aux courbes $v=\mathrm{Cte}$, $u=\mathrm{Cte}$ issues de ces points soient respectivement parallèles; il faut et il suffit donc, comme il résulte des deux formules (1, 12), que les fonctions $\mu(u,v)$, $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ qui y figurent, vérifient les équations aux dérivées partielles

$$
(1,13)\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u}+\xi\frac{L}{\sqrt{E}}=0,\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial v}+\eta\frac{N}{\sqrt{G}}=0
$$

et

$$
(1,14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\eta}{\sqrt{G}}\right)-\frac{\mu\xi}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{\mu\eta}{2G\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu\xi}{\sqrt{E}}\right)+\frac{\mu\xi}{2E\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\mu\eta}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les équations (1, 14) peuvent s' écrire

$$(1,15)\qquad \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\xi}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,\quad \frac{\xi}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v}+\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\eta}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0$$

et l'élimination des dérivées $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ entre les équations (1, 13) et (1, 15) conduit à deux équations qui ne contiennent pas la fonction $\mu(u, v)$:

$$(1,16)\qquad \frac{\partial\eta}{\partial u}-\xi\eta\frac{L}{\sqrt{E}}-\frac{\xi}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial v}-\xi\eta\frac{N}{\sqrt{G}}-\frac{\eta}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

auxquelles doivent satisfaire, dans le cas envisagé, les fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$.

Par ailleurs, si on exprime que les deux équations (1, 13), auxquelles doit satisfaire la fonction $\mu(u, v)$ sont compatibles et que l'on tienne compte des (1, 3), on parvient à une troisième équation à laquelle doivent satisfaire les fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$:

$$(1,17)\qquad \frac{L}{\sqrt{E}}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\xi\frac{N}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{N}{\sqrt{G}}\frac{\partial\eta}{\partial u}+\eta\frac{L}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Mais pour chaque couple de fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ vérifiant les deux équations (1, 16) l'équation (1, 17), comme on le constate facilement en tenant compte du fait que E, G ; L, N sont des fonctions des u, v vérifiant les équations (1, 3), est aussi satisfaite ; on peut donc à un tel couple faire correspondre à l'aide des équations (1, 13) une fonction $\mu(u, v)$, définie à un facteur indépendant des u, v près, vérifiant avec les fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ de ce couple les conditions (1, 13), (1, 14). Par conséquent, à chaque couple de fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ satisfaisant aux deux équations (1, 16) on peut faire correspondre une famille de ∞^1 surfaces représentées sur S avec parallélisme des trièdres principaux et parallèles à S le long de la congruence dont la droite issue du point courant P(u, v) de S est parallèle au vecteur $\xi(u, v)\bar{t}_1+\eta(u, v)\bar{t}_2+\bar{n}$. Les surfaces de cette famille correspondent aux fonctions $\mu(u, v)$ qui vérifient les deux équations compatibles qu'on obtient en remplaçant dans les équations (1, 13) ξ, η par les fonctions $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ de ce couple.

Il en résulte que la surface considérée S admet un ensemble infini de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux, les surfaces de chaque famille étant parallèles à S le long d'une congruence de droites. On peut donc faire associer à cette surface un ensemble infini de congruences de droites (A) de manière que les sections de la surface par les développables de chaque congruence de cet ensemble soient ses lignes de courbure. Les congruences de l'ensemble (A) correspondent aux couples de fonctions $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ satisfaisant aux deux équations aux dérivées partielles (1, 16); à cet ensemble appartient évidemment la congruence engendrée par les normales à la surface, pour laquelle on a $\xi = \eta = 0$.

Pour que l'ensemble (A) contienne une congruence dont la droite issue du point $P(u,v)$ de S est invariablement liée avec son trièdre principal sans coïncider avec sa normale en ce point, il faut et il suffit que E, G ; L, N soient des fonctions des u, v vérifiant, comme il résulte des (1, 16), deux équations de la forme :

$$(1,18) \qquad \xi_1 \eta_1 \frac{L}{\sqrt{E}} + \frac{\xi_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \qquad \xi_1 \eta_1 \frac{N}{\sqrt{G}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

où ξ_1, η_1 sont des constantes dont au moins une est $\neq 0$.

D'autre part, si E, G; L, N sont des fonctions des u, v vérifiant deux équations de la forme (1, 18), les coefficients ξ_1, η_1 qui y figurent étant des constantes dont au moins une est $\neq 0$, il y a ∞^1 fonctions $\mu(u,v)$, comme on le reconnaît facilement en tenant compte des (1, 3), satisfaisant aux équations qu'on obtient en remplaçant ξ, η dans les équations (1, 13), (1, 15) par les constantes ξ_1, η_1 ; par conséquent la congruence dont la droite issue du point courant $P(u,v)$ de la surface S est parallèle au vecteur (invariable par rapport à son trièdre principal) $\xi_1 \bar{t}_1 + \eta_1 \bar{t}_2 + \bar{n}$ appartient à l'ensemble (A) associé à cette surface.

On peut donc énoncer le

Théorème A. À chaque surface on peut faire associer un ensemble infini de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux, les surfaces de chaque famille étant parallèles à cette surface le long d'une congruence de droites, ou — ce qui revient au même — un ensemble infini de congruences de droites (A), telles que les sections de la surface par les développables de chacune d'elles soient ses lignes de courbure.

Pour que l'ensemble (A) associé à une surface S contienne une congruence dont la droite issue de chaque point de S est invariablement liée avec son trièdre principal sans coïncider avec sa normale en ce point, il faut et il suffit que les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée à deux paramètres u, v tels que les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbures, soient des fonctions des u, v vérifiant deux équations de la forme (1, 18), les coefficients ξ_1, η_1 qui y figurent étant des constantes dont au moins une est $\neq 0$.

Si l'on désigne par k_1, k_2 les courbures normales au point P(u, v) de la surface S de ses lignes de courbure v = Cte, u = Cte issues de ce point, par k_{1g}, k_{2g} leurs courbures géodésiques en ce point et par θ_1, θ_2 les angles que la normale à S en P forme avec les normales principales des courbes v = Cte, u = Cte en ce point et que l'on tienne compte que, d'après des formules connues, on a

$$(1,19)\qquad k_1 = \frac{L}{E}\,,\quad k_2 = \frac{N}{G}\,,\quad k_{1g} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,\quad k_{2g} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

et

$$(1,20)\qquad \frac{k_{1g}}{k_1} = \operatorname{tg}\theta_1\,,\qquad \frac{k_{2g}}{k_2} = \operatorname{tg}\theta_2\,,$$

on peut mettre les conditions (1, 18) sous la forme:

$$(1,21)\qquad \xi_1\eta_1 k_1 - \xi_1 k_{1g} = 0\,,\qquad \xi\eta_1 k_2 + \eta_1 k_{2g} = 0\,.$$

2. Les conditions (1, 18) permettent de déterminer toutes les surfaces qui jouissent de la propriété indiquée dans la seconde partie du théorème A. À cet effet nous allons distinguer deux cas suivant que les constantes ξ_1, η_1, qui figurent dans ces conditions, sont toutes les deux $\neq 0$, ou une d'elles s'annule.

a. Supposons en premier lieu que l'on ait

$$(2,1)\qquad \xi_1 \neq 0\,,\qquad \eta_1 \neq 0\,.$$

Si la surface S, définie par l' équation (1, 1) et référée au réseau paramétrique (u, v) de ses lignes de courbure, *est une surface non développable,* on aura

$$(2,2)\qquad \frac{L}{E} = k_1 \neq 0\,,\qquad \frac{N}{G} = k_2 \neq 0$$

et, en cas que E, G ; L, N vérifient deux équations de la forme (1, 18), on en tire, en tenant compte des (1, 19), (1, 20), (2, 1) et (2, 2),

$$\theta_1 = \text{Cte}, \qquad \theta_2 = \text{Cte}. \tag{2, 3}$$

Il en résulte, eu égard au fait que les torsions géodésiques des courbes v = Cte, u = Cte s'annulent identiquement, puisque ces courbes sont les lignes de courbure de S, qu'il en est de même des torsions de ces courbes, c. à-d. que les lignes de courbure de la surface sont nécessairement planes dans les deux systèmes. En outre, d'après (2, 3), les plans, auxquels appartiennent les lignes de courbure de chaque système, coupent la surface sous le même angle.

Mais dans la représentation sphérique de GAUSS d'une surface non développable à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, l'image sur la sphère du réseau de ses lignes de courbure est un réseau isotherme formé par deux familles de ∞^1 cercles dont les plans appartiennent respectivement à deux faisceaux ; les axes de ces faisceaux sont deux polaires conjuguées r, r' par rapport à la sphère dont le centre est, par hypothèse, à l'origine O du système de coordonnées Oxyz choisi dans l'espace. Si u, v sont les paramètres isométriques correspondant à ce réseau isotherme sur la sphère et que l'axe Oz du système Oxyz soit la perpendiculaire commune aux droites r, r', les axes Ox, Oy étant respectivement parallèles à ces droites, la surface est l'enveloppe de la famille de ∞^2 plans, qui est définie par rapport au système Oxyz soit par une équation de la forme :

$$2ux - 2vy + (u^2 + v^2 - 1)z = 2(U + V) \tag{2, 4}$$

soit par une équation de la forme :

$$x\sqrt{1-\alpha^2}\sin u - y\sqrt{1-\alpha^2}\,\text{sh}v + z(\cos u + \alpha\,\text{ch}v) = U + V, \tag{2, 5}$$

suivant que les deux polaires conjuguées r, r' sont tangentes ou non tangentes à la sphère, où U, V sont des fonctions de u et de v respectivement et α^2 est une constante < 1, (**1**, p. 506).

Dans le premier cas les coordonnées x, y, z des points de la surface sont des fonctions des u, v satisfaisant à l'équation (2, 4) et aux deux équations

$$x + uz = \frac{dU}{du}, \qquad -y + vz = \frac{dV}{dv}, \tag{2, 6}$$

tandis que dans le second cas elles sont des fonctions des u, v vérifiant l'équation (2, 5) et les deux équations

$$(2, 7) \quad x\sqrt{1-\alpha^2}\cos u - z\sin u = \frac{dU}{du}, \quad -y\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{ch}v + z\,\alpha\,\mathrm{sh}v = \frac{dV}{dv}.$$

Or, si l'on désigne par θ_1 l'angle sous lequel le plan de la courbe $v = Cte$ issue du point $P(u, v)$ de la surface, la coupe, on reconnaît facilement que l'on a dans le premier cas

$$(2, 8) \qquad \cos\theta_1 = -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

et dans le second cas

$$(2, 9) \qquad \cos\theta_1 = -\frac{\mathrm{sh}v}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 v - \alpha^2}}.$$

Les formules (2, 8) et (2, 9) montrent que, lorsque les lignes de courbure d'une surface non développable sont planes dans les deux systèmes, les plans auxquels appartiennent les lignes de courbure de chaque système ne la coupent jamais sous le même angle.

Il en résulte que *les coefficients des deux formes fondamentales d'une surface non développable, rapportée à deux paramètres u, v tels que les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, sont des fonctions des u, v qui ne peuvent pas vérifier deux équations de la forme (1, 18), lorsque les constantes* ξ_1, η_1 *qui y figurent, sont toutes les deux* $\neq 0$.

Si S est une surface développable et que les courbes $u = Cte$ du réseau paramétrique orthogonal (u, v) choisi sur elle soient ses génératrices rectilignes, on aura

$$(2, 10) \qquad G = G(v), \qquad F = M = N \equiv 0.$$

La seconde condition (1, 18), grâce aux (2, 10) est identiquement vérifiée, tandis que la première exprime, si l'on tient compte des (1, 19), (1, 20) et (2, 1), que les lignes de courbure $v = Cte$, c.à-d. les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de la surface, sont des courbes planes et en outre que les plans auxquels ces courbes appartiennent coupent la surface sous le même angle non droit, puisque la constante η_1 est $\neq 0$. Mais une surface développable dont les lignes de courbure non rectilignes jouissent de cette propriété est nécessairement engendrée par les tangentes à une hélice cylindrique (**1**, p. 502). Donc, pour que les conditions (1, 18) soient vérifiées en cas que la surface considérée est développable, il faut que la surface soit engendrée par les tangentes à une hélice cylindrique.

D'autre part, si

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u) \tag{2, 11}$$

est l'équation vectorielle d'une hélice C, u étant l'arc de cette courbe, l'équation vectorielle de la surface S engendrée par les tangentes à C, référée au réseau paramétrique orthogonal (u, v) dont les courbes u=Cte sont les génératrices rectilignes de cette surface, peut se mettre sous la forme :

$$\bar{r} = \bar{\varrho}(u) + (v - u)\,\bar{t}(u), \tag{2, 12}$$

où $\bar{t}(u) = \frac{d\bar{\varrho}}{du}$ est le vecteur-unité de la direction positive de la tangente à C en son point courant P (u).

Si l'on désigne par k (u), σ (u) la courbure et la torsion de l'hélice C et que l'on tienne compte que l'on a

$$\sigma = ck, \tag{2, 13}$$

où c est une constante $\neq 0$, on trouve, à l'aide des formules connues, pour les coefficients des deux formes fondamentales de la surface S, rapportée aux paramètres u, v, les expressions

$$\begin{aligned} E &= (v-u)^2 k^2, \quad & F &\equiv 0, \quad & G &= 1, \\ L &= c(v-u)k^2, \quad & M &\equiv 0, \quad & N &\equiv 0. \end{aligned} \tag{2, 14}$$

La première condition (1, 18), si l'on y remplace E, G ; L par leurs valeurs (2, 14), devient $\eta_1 c = -1$, tandis que la seconde est identiquement vérifiée. Par conséquent, lorsque la surface engendrée par les tangentes à une hélice C dont la courbure et la torsion sont liées par la relation (2, 13), est définie par une équation de la forme (2, 12), le paramètre u étant l'arc de C, les conditions (1, 18) sont vérifiées, si l'on a

$$\eta_1 = -\frac{1}{c} \tag{2, 15}$$

ξ_1 étant une constante arbitraire.

On peut donc, en tenant compte du fait que le vecteur $\xi_1 \bar{t}_1 + \eta_1 \bar{t}_2 + \bar{n}$, où ξ_1, η_1 sont des constantes $\neq 0$, n'est parallèle à aucune de faces du trièdre principal de la surface, formuler le

Théorème B. Pour que l'on puisse faire associer à une surface S une famille de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux et parallèles à S le long d'une congruence dont la droite issue de chaque point de la surface est invariablement liée avec son trièdre principal sans appartenir à aucune de faces de ce trièdre, il faut et il suffit que la surface soit engendrée par les tangentes à une hélice cylindrique.

b. Supposons en second lieu que une des deux constantes ξ_1, η_1 qui figurent dans les conditions (1, 18), par ex. la première, soit $= 0$.

Dans ce cas la première condition (1, 18) est identiquement vérifiée, tandis que la seconde devient

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \tag{2, 16}$$

ce qui, en vertu de la seconde équation (1, 3), entraîne

$$\frac{\partial N}{\partial u} = 0. \tag{2, 17}$$

Donc, *si S est une surface non développable,* pour que les conditions (1, 18) soient vérifiées, la constante ξ_1 qui y figure étant $= 0$, il faut que les coefficients G, N soient des fonctions de la seule variable v :

$$G = G(v), \qquad N = N(v). \tag{2, 18}$$

Il en résulte que les lignes de courbure u = Cte de S doivent être en même temps des géodésiques de cette surface et, par conséquent, des courbes planes et en outre que la courbure k de ces courbes, qui est égale à leur courbure normale $k_n = \frac{N}{G}$ doit être une fonction de la seule variable v.

$$k = k_n = \frac{N}{G} = k(v). \tag{2, 19}$$

Par ailleurs la correspondance entre deux courbes quelconques u = Cte, qu'on obtient en faisant correspondre les points de ces courbes situés sur une même courbe v = Cte, est, comme on le constate facilement, une correspondance avec égalité des arcs homologues. En outre ces courbes sont planes et elles admettent la même courbure en leurs points homologues. Donc elles sont nécessairement les diverses positions d'une courbe plane—invariable de forme—qui se meut de manière que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions, ou — ce qui revient au même — de manière que le plan, auquel elle appartient, roule sur une surface développable fixe ou tourne autour d'une droite fixe située sur ce plan.

D'autre part, si la surface S définie par l'équation (1,1) est une surface de cette espèce non développable, référée au réseau paramétrique orthogonal (u, v) dont les courbes $u = Cte$ sont les diverses positions de la courbe plane, qui engendrent la surface, les coefficients G, N de ses deux formes fondamentales sont nécessairement des fonctions de la seule variable v, tandis qu'on a $F = M \equiv 0$ et les conditions (1, 18) sont vérifiées, lorsque la première des deux constantes ξ_1, η_1 qui y figurent est $= 0$.

Par conséquent, les surfaces parallèles à S le long d'une congruence dont la droite issue du point courant P (u, v) de la surface est parallèle au vecteur (invariable par rapport à son trièdre principal) $\frac{\eta_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} + \bar{n}$, où η_1 est une constante arbitraire, sont représentées sur S avec parallélisme des trièdres principaux.

Par ailleurs une surface développable peut être considérée comme engendrée par les diverses positions d'une droite qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient en même temps les trajectoires orthogonales de ses positions et les raisonnements précédents sont valables même dans le cas où S est une surface développable.

Les considérations précédentes, jointes au théorème B, permettent d'énoncer le

Théorème C. Une surface S qui admet une famille de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux et parallèles à S le long d'une congruence dont la droite issue de chaque point de cette surface est invariablement liée avec son trièdre principal sans coïncider avec sa normale en ce point, est nécessairement engendrée par les diverses positions d'une droite ou d'une courbe plane invariable de forme qui se meut de manière que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions. Toutes les surfaces de cette espèce admettent des familles de ∞^1 surfaces représentées sur elles de la manière indiquée.

II

3. Supposons maintenant que la droite de la congruence D issue du point courant P (u, v) de la surface non développable S, définie par l'équation (1, 1) et référée au réseau paramétrique (u, v) de ses lignes de courbure, appartienne à un plan normal à S en ce point invariablement lié avec son trièdre principal.

Dans ce cas l'équation (1, 11) de la congruence D est de la forme:

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \mu\alpha \left\{ \frac{c_1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \frac{c_2}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\} + \mu \bar{n}, \tag{3, 1}$$

où α est une fonction des u, v et c_1, c_2 sont des constantes dont au moins une est $\neq 0$.

Pour que les surfaces parallèles à S le long de la congruence définie par l'équation (3, 1) soient représentées sur S avec parallélisme des trièdres principaux, il faut et il suffit qu'il y ait des fonctions $\mu(u, v)$, $\alpha(u, v)$ vérifiant les équations

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} + c_1 \frac{\mu\alpha}{\sqrt{E}} L = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} + c_2 \frac{\mu\alpha}{\sqrt{G}} N = 0 \tag{3, 2}$$

et

$$c_2 \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} - \frac{c_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \qquad c_1 \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} - \frac{c_2}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \tag{3, 3}$$

auxquelles se ramènent les conditions (1, 13) et (1, 15), si l'on y remplace ξ, η par leurs valeurs tirées de (3, 1).

Si une des constantes c_1, c_2 qui figurent dans l'équation (3, 1), par ex. la première, s'annule, la droite de la congruence D issue du point P (u, v) de S est située sur le plan normal à S en P, qui passe par la tangente à la courbe $u = \text{Cte}$ en ce point.

Alors les conditions (3, 2) et (3, 3) deviennent

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} + c_2 \frac{\mu\alpha}{\sqrt{G}} N = 0, \qquad \frac{\partial (\mu\alpha)}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \tag{3, 4}$$

et pour qu'elles soient satisfaites, il faut et il suffit, comme on le voit aussitôt en ayant égard aux (1, 3), que G, N, α soient des fonctions de la seule variable v;

$$G = G(v), \qquad N = N(v), \qquad \alpha = \alpha(v) \tag{3, 5}$$

et en outre que l'on ait

$$\mu = E^{-c_2 \int \frac{\alpha N}{\sqrt{G}} dv} = \mu(v). \tag{3, 6}$$

Les deux premières de ces conditions ne sont vérifiées, comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 3, que dans le cas où S est engendrée par les diverses positions d' une courbe plane—invariable de forme — qui se meut de manière que les trajectoires de ces points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions.

Si S est une surface de cette espèce et qu'on la réfère au réseau orthogonal (u, v) dont les courbes $u = Cte$ sont les diverses positions de la courbe plane, qui engendrent la surface, les deux premières conditions (3, 5) sont satisfaites, tandis qu'on a $F = M \equiv 0$ et à chaque fonction $\alpha(v)$ on peut faire correspondre, à l'aide de (3, 6), des fonctions μ de la seule variable v de manière que les conditions (3, 4) soient vérifiées. On peut donc à chaque fonction $\alpha(v)$ faire correspondre une famille de ∞^1 surfaces représentées sur S avec parallélisme des trièdres principaux et parallèles à cette surface le long de la congruence dont la droite issue de son point courant P(u, v) est parallèle au vecteur $\frac{\alpha}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} + n$; les surfaces de cette famille correspondent aux fonctions μ de la seule variable v, qui vérifient l'équation différentielle

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial v} = - \frac{\alpha}{\sqrt{G}} N.$$

Si les constantes c_1, c_2 qui figurent dans l'équation (3, 1), sont toutes les deux $\neq 0$, pour qu'il y ait des fonctions μ, α des u, v satisfaisant aux deux équations (3, 3), il faut et il suffit que l'on ait

$$c_1^2 \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right\} = c_2^2 \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right\}. \tag{3, 7}$$

Par ailleurs si la condition (3, 7) est vérifiée, pour chaque fonction $\varphi = \mu\alpha$ des u, v satisfaisant aux équations compatibles (3, 3), la condition de compatibilité :

$$c_1 \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\mu\alpha}{\sqrt{E}} L \right\} = c_2 \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\mu\alpha}{\sqrt{G}} N \right\} \tag{3, 8}$$

des deux équations (3, 2), comme on le reconnait facilement en ayant égard aux (1, 3), est aussi vérifiée ; ce qui prouve que, lorsque E, G sont des fonctions des u, v satisfaisant à l'équation (3, 7), il y a des couples de fonctions μ, α des u, v vérifiant les équations (3, 3), (3, 4), chaque fonction d'un tel couple étant définie à un facteur indépendant des u, v près.

En outre, si la condition (3, 7) est satisfaite, même les équations

$$(3,9)\qquad c_2 \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} + \frac{c_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \qquad c_1 \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} + \frac{c_2}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0$$

sont évidemment compatibles et pour chaque fonction $\varphi' = \mu\alpha$ des u, v vérifiant ces deux équations compatibles la condition de compatibilité :

$$c_1 \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\mu\alpha}{\sqrt{E}} L \right\} = - c_2 \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\mu\alpha}{\sqrt{G}} N \right\}$$

des équations

$$(3,10)\qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} + c_1 \frac{\mu\alpha}{\sqrt{E}} L = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} - c_2 \frac{\mu\alpha}{\sqrt{G}} N = 0$$

est aussi satisfaite. Il y a donc aussi des couples de fonctions μ, α des u, v vérifiant les équations (3, 9) et (3, 10), chaque fonction d'un tel couple étant définie à un facteur indépendant des u, v près.

Il en résulte que, dans ce cas, S admet deux catégories de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux, les surfaces des familles appartenant à ces deux catégories étant parallèles à S le long des congruences dont les droites issues du point courant P (u, v) de S sont situées respectivement sur deux plans normaux à S en P, invariablement liés avec son trièdre principal. Ces deux plans sont respectivement parallèles aux vecteurs

$$\frac{c_1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \frac{c_2}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \qquad \frac{c_1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} - \frac{c_2}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v},$$

car les surfaces d'une famille appartenant à la première ou à la seconde catégorie sont parallèles à S le long d'une congruence dont la droite issue du point P (u, v) de S est respectivement parallèle au vecteur

$$\alpha\left\{\frac{c_1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}+\frac{c_2}{\sqrt{G}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\}+\bar{n} \quad \text{ou} \quad \alpha\left\{\frac{c_1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}-\frac{c_2}{\sqrt{G}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\}+\bar{n}.$$

On peut donc, en tenant compte du fait que la condition (3, 7) est vérifiée même dans le cas où une des constantes c_1, c_2 qui y figurent est $=0$, énoncer le

Théorème D. Une surface non développable S n'admet une famille de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux et parallèles à S le long d'une congruence dont la droite issue de chaque point de cette surface est située sur un plan normal à la surface en ce point invariablement lié avec son trièdre principal, que dans le cas où les coefficients de l'élément linéaire de cette surface rapportée à deux paramètres u, v tels que les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, sont des fonctions des u, v satisfaisant à une équation aux dérivées partielles de la forme (3, 7), les coefficients c_1, c_2 qui y figurent étant des constantes dont au moins une est $\neq 0$.

4. Supposons enfin que la surface S définie par l'équation (1, 1) soit une surface isothermique.

Si les variables u, v sont les paramètres isométriques correspondant au réseau (isotherme) des lignes courbure de S, on aura

$$E = G \equiv \lambda^2, \qquad F \equiv 0 \tag{4, 1}$$

et, si l'on pose

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \nu^2 \tag{4, 2}$$

la condition (3, 7) devient

$$\frac{\partial^2 \lg\lambda}{\partial v^2} = \nu^2\,\frac{\partial^2 \lg\lambda}{\partial u^2}.$$

Cette condition n'est satisfaite que dans le cas où λ est une fonction des u, v de la forme :

$$\lambda = f_1(w)\,f_2(w'), \tag{4, 3}$$

où f_1 est une fonction de la seule variable $w = u - \nu v$ et f_2 une fonction de la seule variable $w' = u + \nu v$ (**6**, p. 437).

Si le coefficient λ est une fonction des u, v de la forme (4, 3), on peut faire correspondre à S, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe

3, deux catégories de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux ; les surfaces des familles qui appartiennent à ces deux catégories correspondent aux couples de fonctions $\mu(u, v)$, $\alpha(u, v)$ vérifiant respectivement les équations

$$(4,4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mu}{\partial u} + c_1 \dfrac{\mu\alpha}{\lambda} L = 0, & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} + c_1\nu \dfrac{\mu\alpha}{\lambda} N = 0, \\[2ex] \nu \dfrac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} - \dfrac{\partial \lg \lambda}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} - \nu \dfrac{\partial \lg\lambda}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

et

$$(4,5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mu}{\partial u} + c_1 \dfrac{\mu\alpha}{\lambda} L = 0, & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} - c_1\nu \dfrac{\mu\alpha}{\lambda} N = 0, \\[2ex] \nu \dfrac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} + \dfrac{\partial \lg \lambda}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} + \nu \dfrac{\partial \lg\lambda}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Les surfaces de ces familles sont parallèles à S le long des congruences dont les droites issues du point courant $P(u, v)$ de S sont situées respectivement sur les deux plans normaux à S en P (invariablement liés avec son trièdre principal) dont le premier est parallèle au vecteur $\dfrac{\partial \bar r}{\partial u} + \nu \dfrac{\partial \bar r}{\partial v}$ et le second est parallèle au vecteur $\dfrac{\partial \bar r}{\partial u} - \nu \dfrac{\partial \bar r}{\partial v}$.

Il en résulte que *une surface isothermique S admet deux catégories de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle de la manière indiquée, lorsque ses lignes de courbure dans un système (et, par conséquent, dans l'autre) sont des trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de ∞^1 géodésiques de cette surface.* En effet, dans ce cas, le coefficient unique λ de l'élément linéaire de la surface, rapportée aux paramètres isométriques u, v correspondant au réseau de ses lignes de courbure, est une fonction de la seule variable $w = u - \nu v$:

$$(4,6)\qquad \lambda = \lambda(u - \nu v) = \lambda(w),$$

où ν est une constante $\neq 0$ (**5**, p. 329) et, par conséquent, il est une fonction de la forme (4, 3).

Les géodésiques de S dont ses lignes de courbure dans chaque système sont des trajectoires isogonales, sont les courbes $\nu u + v = \text{Cte}$ et le second des deux plans normaux à S en son point $P(u,v)$ respectivement parallèles aux vecteurs $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \pm \nu \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ est le plan osculateur en P de la géodésique $\nu u + v = $ Cte issue de ce point; ces deux plans sont symetriques par rapport aux plans normaux à S en P, qui passent par ses tangentes principales en ce point.

Par ailleurs S est, dans ce cas, une surface à courbure moyenne constante applicable sur une surface de révolution et ses géodésiques $\nu u + v = $ Cte sont les diverses positions d'une courbe — invariable de forme — dont la courbure et la torsion sont liées par une relation linéaire à coefficients constants, qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient en même temps les trajectoires orthogonales de ses positions (**5**, p. 336).

Les coefficients L, N de la seconde forme fondamentale d'une surface S de cette espèce, qui, rapportée aux paramètres isométriques u, v, est définie par l'équation (1, 1), sont des fonctions du coefficient unique λ de son élément linéaire de la forme :

$$(4, 7) \qquad L = H_1\lambda^2 + \alpha, \qquad N = H\lambda^2 - \alpha,$$

où H_1 est la courbure moyenne constante de S et α est une constante qui, lorsque S est une surface non sphérique, est $\neq 0$, le coefficient λ étant une fonction de la seule variable $w = u - \nu v$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$(4, 8) \qquad -\frac{H_1^2\lambda^4 - \alpha^2}{\lambda^2} = \{1 + \nu^2\} \frac{d^2 \lg \lambda}{dw^2},$$

à laquelle on parvient en substituant dans l'équation (1, 4) L, N par leurs valeurs (4, 7) et en tenant compte du fait que λ est une fonction de la variable w.

En outre les deux dernières des équations (4, 4) et (4, 5) prennent, grâce à (4, 6), la forme :

$$(4, 9) \qquad \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} = \mp \frac{d \lg \lambda}{dw}, \qquad \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} = \pm \nu \frac{d \lg \lambda}{dw}$$

et de chacun de ces deux couples d'équations on tire

$$(4, 10) \qquad \nu \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial u} + \frac{\partial \lg(\mu\alpha)}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que, dans les deux cas, le produit $\mu\alpha$ est nécessairement une fonction de la seule variable $w = u - \nu v$.

Cela étant on déduit des deux couples d'équations (4, 9) que pour les familles de la première catégorie, pour laquelle on a $\frac{c_2}{c_1} = \nu$, $\mu\alpha$ est une fonction de w de la forme:

$$\mu\alpha = ce^{f(w)} = \frac{c}{\lambda}, \tag{4, 11}$$

tandis que pour les familles de la seconde catégorie, pour laquelle on a $\frac{c_2}{c_1} = -\nu$, $\mu\alpha$ est une fonction de w de la forme:

$$\mu\alpha = ce^{f'(w)} = c\lambda, \tag{4, 12}$$

le coefficient c qui figure dans ces deux formules étant une constante $\neq 0$.

Par ailleurs les deux premières des équations (4, 4) et (4, 5), si l'on y remplace L, N par leurs valeurs (4, 7) et que l'on tienne compte des (4, 11) et (4, 12), deviennent

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = -c_1 c\left\{H_1 + \frac{\alpha}{\lambda^2}\right\}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -c_1 c\nu\left\{H_1 - \frac{\alpha}{\lambda^2}\right\} \tag{4, 13}$$

et

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = -c_1 c\left\{H_1 + \alpha\lambda^2\right\}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = c_1 c\nu\left\{H_1 + \alpha\lambda^2\right\}. \tag{4, 14}$$

On en déduit facilement, compte tenu du fait que les équations de chacun de ces deux couples sont compatibles, le coefficient λ étant une fonction de la seule variable w, que μ est en général une fonction des deux variables $w = u - \nu v$, $w' = u + \nu v$, qui dans le premier cas est de la forme:

$$\mu = -c_1 c\left\{H_1 w' + \alpha F'(w) + \alpha c'\right\} \tag{4, 15}$$

et dans le second cas est de la forme:

$$\mu = -c_1 c\left\{\alpha w' + H_1 F''(w) + H_1 c''\right\}, \tag{4, 16}$$

où c', c'' sont des constantes et $F'(w)$ et $F''(w)$ sont deux fonctions de la variable w satisfaisant respectivement aux équations différentielles

$$\frac{dF'}{dw} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{4, 17}$$

et

$$\frac{dF''}{dw} = \lambda^2. \tag{4, 18}$$

Si l'on remplace maintenant μ et $\mu\alpha$ dans l'équation (3, 1) de la congruence D d'une part par leurs valeurs (4, 15), (4, 11) et d'autre part par leurs valeurs (4, 16), (4, 12) en tenant compte en même temps du fait que pour les familles des deux catégories on a respectivement $\frac{c_1}{c_2} = \pm \nu$, on parvient aux équations vectorielles

$$\bar{r}' = \bar{r}(u, v) + \frac{c_1 c}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \nu \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\} - c_1 c\left\{H_1 w' + \alpha F'(w) + \alpha c'\right\}\bar{n} \tag{4, 19}$$

et

$$\bar{r}'' = \bar{r}(u, v) + c_1 c\left\{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} - \nu \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\} - c_1 c\left\{\alpha w' + H_1 F''(w) + H_1 c''\right\}\bar{n} \tag{4, 20}$$

des familles des deux catégories associées à la surface considérée, où c est le paramètre aux valeurs duquel correspondent les familles de chaque catégorie et c', c'' sont les paramètres aux valeurs desquels correspondent les surfaces de chaque famille appartenant à la première ou à la seconde catégorie respectivement.

En différentiant l'équation (4, 20) par rapport à u et à v et en tenant compte des (1, 5), (4, 7) et (4, 18) il vient

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{r}''}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\left\{1 + \frac{c}{\lambda}(1+\nu^2)\frac{d\lambda}{dw} + c_1 c(\alpha w' + H_1 F''(w) + H_1 c'')\frac{H_1 \lambda^2 + \alpha}{\lambda^2}\right\} = \\
&= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\eta''. \\
\frac{\partial \bar{r}''}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\left\{1 + \frac{c}{\lambda}(1+\nu^2)\frac{d\lambda}{dw} + c_1 c(\alpha w' + H_1 F''(w) + H_1 c'')\frac{H_1 \lambda^2 - \alpha}{\lambda^2}\right\} = \\
&= \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\theta''.
\end{aligned}\right. \tag{4, 21}$$

On aura donc pour les coefficients E'', F'', G'' ; L'', M'', N'' des deux formes fondamentales de la surface S'', définie par l'équation (4, 20) pour deux valeurs des paramètres c, c'', les formules

$$(4,\,22)\qquad \begin{cases} E'' = \eta''^2\lambda^2, & F''=0\,, \quad G''=\theta''^2\lambda^2 \\ L'' = \varepsilon\eta'' L\,, & M''=0\,, \quad N''=\varepsilon\theta'' N \end{cases}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\eta''\theta''$ est $>$ ou <0 et pour les courbures principales k_1'', k_2'' de S'', qui sont égales aux courbures normales des courbes v = Cte, u = Cte tracées sur cette surface, les formules

$$(4,\,23)\qquad k_1'' = \frac{L''}{E''} = \varepsilon\frac{L}{\eta''\lambda^2} = \varepsilon\frac{k_1}{\eta''}\,,\qquad k_2'' = \frac{N''}{G''} = \varepsilon\frac{N}{\theta''\lambda^2} = \varepsilon\frac{k_2}{\theta''}$$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de S.

Les coefficients L, N, λ sont des fonctions de la seule variable w, tandis que η'', θ'', lorsqu' α est $\neq 0$, sont, d'après (4, 21), des fonctions des deux variables w, w' et on reconnaît facilement que les courbures k_1'', k_2'' de S'' sont liées par une relation seulement dans le cas où $\alpha = 0$. Mais, si $\alpha = 0$, on a en chaque couple de points homologues des surfaces S, S'' $k_1'' = k_2''$ et $k_1 = k_2$, ce qui exprime que, dans ce cas, S ainsi que toutes les surfaces de la seconde catégorie sont des surfaces sphériques.

Donc, si S n'est pas une surface sphérique, la seconde catégorie est dépourvue de surfaces W.

Par ailleurs la différentiation de l'équation (4, 19) par rapport à u et à v, eu égard aux (1, 5) (4, 11), donne

$$(4,\,24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar r'}{\partial u} = \dfrac{\partial \bar r}{\partial u}\left\{1-\dfrac{c_1 c}{\lambda^2}(1+v^2)\dfrac{d\lambda}{dw}+c_1c(H_1w'+\alpha F'(w)+\alpha c')\dfrac{H_1\lambda^2+\alpha}{\lambda^2}\right\}= \\ \qquad = \dfrac{\partial \bar r}{\partial u}\,\eta'. \\ \dfrac{\partial \bar r'}{\partial v} = \dfrac{\partial \bar r}{\partial v}\left\{1+\dfrac{c_1 c}{\lambda^2}(1+v^2)\dfrac{d\lambda}{dw}+c_1c(H_1w'+\alpha F'(w)+\alpha c')\dfrac{H\lambda^2-\alpha}{\lambda^2}\right\}= \\ \qquad = \dfrac{\partial \bar r}{\partial v}\,\theta'. \end{cases}$$

On aura donc pour les coefficients E', F', G'; L', M', N' des deux formes fondamentales de la surface S', définie par l' équation (4, 19) pour deux valeurs des paramètres c, c', les expressions

$$(4,25)\qquad \begin{cases} E' = \eta'^2\lambda^2, & F' = 0, \quad G' = \theta'^2\lambda^2 \\ L' = \varepsilon\eta' L, & M' = 0, \quad N' = \varepsilon\theta' N, \end{cases}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\eta'\theta'$ est $>$ ou <0 et pour les courbures totale K' et moyenne H' de S' les expressions

$$(4,26)\quad K' = \frac{L'N'}{E'G'} = \frac{LN}{\eta'\theta'\lambda^4}, \quad H' = \frac{1}{2}\left\{\frac{L'}{E'} + \frac{N'}{G'}\right\} = \frac{\varepsilon}{2\lambda^2}\left\{\frac{L'}{\eta'} + \frac{N'}{\theta'}\right\}.$$

Les courbures K', H' de S' sont en général des fonctions indépendantes des deux variables w, w', qui ne sont liées par une relation — comme on le reconnaît facilement — que dans le cas où H_1 est $=0$, c.à.d. *dans le cas où S est une surface minimale.*

Mais, si $H_1 = 0$, l'équation (4, 8) devient

$$(4,27)\qquad \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \{1+\nu^2\}\frac{d^2 \lg\lambda}{dw^2}$$

et, grâce à (4, 27), l'équation différentielle (4, 17) peut s'écrire

$$\frac{dF'}{dw} = \frac{1+\nu^2}{\alpha^2}\,\frac{d^2\lg\lambda}{dw^2}.$$

Il en résulte que l'on peut remplacer la fonction F'(w) qui figure dans les coefficients θ', η' par $\frac{1+\nu^2}{a^2}\,\frac{d\lg\lambda}{dw}$; ainsi ces coefficients affectent la forme:

$$(4,28)\qquad \eta' = 1 - \frac{c_1 cc'\alpha^2}{\lambda^2}, \qquad \theta' = 1 + \frac{c_1 cc'\alpha^2}{\lambda^2}.$$

Or, si l'on porte dans les formules (4, 26) les valeurs (4, 7) des L, N et (4, 28) des η', θ', il vient

$$(4,29)\qquad K' = -\frac{\alpha^2}{\lambda^4 - c_1^2c^2c'^2\alpha^4}, \qquad H' = \frac{\varepsilon c_1 cc'\alpha^2}{\lambda^4 - c_1^2c^2c'^2\alpha^4}$$

et l'élimination de λ entre ces deux relations donne

$$(4,30)\qquad H' + \varepsilon c_1 cc'\alpha K' = 0.$$

En outre, si l'on rapporte la surface S' aux paramètres u', v' liés avec u, v par les relations

$$u - \nu v = u', \qquad v = v(u', v') \tag{4, 31}$$

et que l'on tienne compte du fait que, d'après (4, 7), (4, 25) et (4, 28), les coefficients E', F', G'; L', M', N' des deux formes fondamentales de S', rapportée aux paramètres u, v sont des fonctions de la seule variable $w = u - \nu v = u'$, on reconnaît facilement que, pour que le réseau (u', v') sur la surface S' soit orthogonal, il faut et il suffit que la variable v soit une fonction des u', v' de la forme:

$$v = -\int \frac{\nu E' du'}{\nu^2 E' + G'} + \varphi(v'),$$

où φ est une fonction arbitraire — non constante — de la seule variable v'.

Or, si l'on pose

$$v = -\int \frac{\nu E' du'}{\nu^2 E' + G'} + v', \tag{4, 32}$$

on trouve, à l'aide des formules connues, pour les coefficients E', F', G'; L', M', N' des deux formes fondamentales de S' rapportée aux paramètres u', v' liés avec u, v par les relations (4, 31), où v est la fonction (4, 32) des u', v', les expressions

$$\left\{ \begin{aligned} & E_1' = \frac{E'G'}{\nu^2 E' + G'}, \qquad F_1' = 0, \qquad G_1' = \nu^2 E' + G'. \\ & L_1' = \frac{L'G' + N'E'}{(\nu^2 E' + G')^2}, \quad M_1' = \nu \frac{L'G' - N'E'}{\nu^2 E' + G'}, \quad N_1' = \nu^2 L' + N'. \end{aligned} \right. \tag{4, 33}$$

Ces coefficients, d'après (4, 7), (4, 25) et (4, 28), sont des fonctions rationnelles à coefficients constants de λ, qui est une fonction de la seule variable $w = u'$. Il en résulte que les trajectoires orthogonales $v' = C^{te}$ des courbes $u - \nu v = u' = C^{te}$ tracées sur la surface S' sont des géodésiques de cette surface, dont la courbure et la torsion, égales respectivement à leur courbure normale $k_n = \frac{L_1'}{E_1'}$ et à leur torsion géodésique $\sigma_g = - \frac{M_1'}{\sqrt{E_1' G_1' - F_1'^2}}$, sont des fonctions de la seule variable u'.

Par conséquent ces courbes admettent la même courbure et la même torsion en leurs points situés sur une même courbe $u' =$ Cte. En outre la correspondance qu'on obtient entre deux de ces géodésiques en faisant correspondre leurs points situés sur une même courbe $u' =$ Cte est une correspondance avec égalité des arcs homologues. Donc elles sont nécessairement les diverses positions d'une courbe gauche — invariable de forme — qui se meut de manière que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions. La courbure et la torsion de cette courbe, d'après (4, 7), (4, 25), (4, 28) et (4, 33), sont la première une fonction rationnelle et la seconde une fonction algébrique de λ à coefficients constants; par conséquent elles sont liées par une rélation algébrique à coefficients constants.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

Théorème E. *Une surface isothermique S non sphérique, dont les lignes de courbure dans un système sont des trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de ∞^1 de ses géodésiques, admet deux catégories de familles de ∞^1 surfaces représentées sur elle avec parallélisme des trièdres principaux, les surfaces des familles appartenant à ces deux catégories étant parallèles à S le long des congruences dont les droites issues de chaque point de S sont situées respectivement sur deux plans normaux à la surface en ce point, invariablement liés avec son trièdre principal.*

Ces deux catégories ne contiennent pas en général de surfaces - W. Seulement dans le cas où S est une surface minimale, toutes les surfaces appartenant à une de ces catégories sont des surfaces - W, les courbures totale et moyenne de chacune d'elles étant liées par une ralation linéaire et homogène à coefficients constants. En outre chaque surface de cette catégorie est engendrée par les diverses positions d'une courbe gauche dont la courbure et la torsion sont liées par une relation algébrique à coefficients constants, qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient en même temps les trajectoires orthogonales de ses positions.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bianchi, L.: Lezioni di geometria differenziale, vol. I_2, Bologna (1927).
2. Eisenhart, L. Pf.: Transformations of surfaces, Chelsea Publ. Comp.
3. Haimovici, M. et Poppa, I.: La correspondance par plans tangents parallèles, Ann. Scient. Univ. Jassy, 18 (1933), p.p. 215-233.

4. Peterson, K. M.: Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1905), p.p. 5-43.
5. Pylarinos, O.: Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables, sur des surfaces de révolution. Ann. di Mat. pura ed appl. IY, vol LIX (1962), p.p. 319-350.
6. Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, T. II, Berlin (1963).

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων σημείων δύο ἐπιφανειῶν συνήθους τριδιαστάτου χώρου, ἀπεικονιζομένων τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης μετὰ παραλληλίας τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων, ὁρίζουν εὐθείας ἀποτελούσας σμῆνος, τοῦ ὁποίου, συμφώνως πρὸς γνωστὸν θεώρημα, τὰ δύο συστήματα ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, ὅταν εἶναι διακεκριμένα, τέμνουν ἑκατέραν τῶν ἐπιφανειῶν κατὰ καμπύλας ἀποτελούσας δίκτυον συζυγὲς ἐπ' αὐτῆς, καλούμενον *δίκτυον βάσεως τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην*, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς ἕκαστον ζεῦγος ὁμολόγων σημείων τῶν δύο ἐπιφανειῶν τῶν διὰ τῶν σημείων τούτων διερχομένων καμπύλων τῶν δικτύων βάσεως αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι. Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς ἄλλο γνωστὸν ἐπίσης θεώρημα, ἐὰν αἱ καμπύλαι, καθ' ἃς τέμνεται ἐπιφάνεια S ὑπὸ τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν σμήνους εὐθειῶν D, ἀποτελοῦν δίκτυον συζυγὲς ἐπ' αὐτῆς, εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχηθῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν S μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια ἐπιφανειῶν (F) ἀπεικονιζομένων ἐπ' αὐτῆς μετὰ παραλληλίας τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων, τῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων τῶν ὁμολόγων τοῦ τυχόντος σημείου τῆς S κειμένων ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένης εὐθείας τοῦ σμήνους D. Αἱ ἐπιφάνειαι τῆς οἰκογενείας ταύτης λέγονται *παράλληλοι πρὸς τὴν S ἐν σχέσει πρὸς τὸ σμῆνος D.*

Τὰ δίκτυα βάσεως τῶν ἐπιφανειῶν (F) κατὰ τὴν ἐν λόγῳ ἀπεικόνισιν τούτων ἐπὶ τῆς S εἶναι τὰ δίκτυα τῶν καμπύλων, καθ' ἃς τέμνονται αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ὑπὸ τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους D. Ὅθεν, ἐὰν ἡ S δὲν εἶναι ἐπιφάνεια σφαιρικὴ καὶ αἱ καμπύλαι, καθ' ἃς τέμνεται αὕτη ὑπὸ τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους D, εἶναι αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος αὐτῆς, τῶν ὁποίων τὸ δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον, τὰ δίκτυα βάσεως τῶν ἐπιφανειῶν (F), συμφώνως πρὸς τὸ πρῶτον τῶν μνημονευθέντων θεωρημάτων, θὰ εἶναι ἐπίσης τὰ δίκτυα τῶν γραμμῶν καμπυλότητος αὐτῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ ἕδραι τοῦ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον P τῆς S τρισορθογωνίου τριέδρου, τοῦ ὁποίου ἀκμαὶ εἶναι αἱ κύριαι ἐφαπτόμεναι καὶ ἡ κάθετος τῆς S εἰς τὸ P, καλουμένου *πρωτεύοντος τριέδρου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο,* θὰ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἕδρας τῶν πρωτευόντων τριέδρων τῶν ἐπιφανειῶν (F) εἰς τὰ ὁμόλογα τοῦ P σημεῖά των, ἡ δὲ ἀπεικόνισις τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἐπὶ τῆς S λέγεται *ἀπεικόνισις μετὰ παραλληλίας τῶν πρωτευόντων τριέδρων.*

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν μελετῶνται δύο εἰδικαὶ περιπτώσεις τῆς τοιούτου εἴδους ἀπεικονίσεως. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀποδεικνύεται ἐν ἀρχῇ ὅτι εἰς δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν S εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχηθῇ σύνολον σμηνῶν εὐθειῶν (A), τοιούτων ὥστε αἱ ἐν σχέσει πρὸς ἕκαστον τούτων παράλληλοι πρὸς τὴν S ἐπιφάνειαι ἀπεικονίζονται ἐπ' αὐτῆς μετὰ παραλληλίας τῶν πρωτευόντων τριέδρων. Ἐν συνεχείᾳ δὲ δίδονται συνθῆκαι ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι, ἵνα εἰς τὸ σύνολον σμηνῶν (A), τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐπιφάνειαν S, ἀνήκῃ σμῆνος, τοῦ ὁποίου ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς S διερχομένη εὐθεῖα εἶναι στερεῶς συνδεδεμένη μετὰ τοῦ πρωτεύοντος τριέδρου αὐτῆς μὴ συμπίπτουσα ὅμως μετά τινος τῶν ἀκμῶν τοῦ τριέδρου τούτου καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν διδομένων συνθηκῶν καθορίζονται ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ἔχουσαι τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος δίδεται συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία, ἵνα τὸ σύνολον σμηνῶν (A), τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐπιφάνειαν S, περιέχῃ σμῆνος, τοῦ ὁποίου ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς S διερχομένη εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ καθέτου ἐπιπέδου τῆς S εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, στερεῶς συνδεδεμένου μετὰ τοῦ πρωτεύοντος τριέδρου αὐτῆς καὶ μελετᾶται ἡ εἰδικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ ἔχουσα τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοθερμική.