ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ

Γ. ΣΩΤΗΡΙΑΔΟΥ.—*Τὸ Ὑδραγωγεῖον τοῦ Ἡρακλείου.*

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—**Détermination de toutes les surfaces réglées applicables sur le plan***, *par* ***H. Lebesgue.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

Lorsque, il y a un peu plus de trente cinq ans, je me suis occupé des surfaces non analytiques applicables sur le plan, on ne possédait aucun théorème sur l'existence des dérivées et il était impossible d'essayer d'utiliser des procédés calqués sur ceux de la géométrie infinitésimale classique. Nos connaissances actuelles en analyse sont probablement insuffisantes encore pour permettre la recherche de la surface la plus générale applicable sur le plan, mais du moins elles donnent de certains problèmes que j'avais traité des solutions plus simples que celles auxquelles j'avais dû recourir. Les problèmes auxquels je fais allusion ont pour but la détermination de la surface la plus générale applicable sur le plan et faisant partie soit des surfaces de révolution, soit des cylindres, soit des cônes, soit des surfaces lieux des tangentes à une courbe gauche.

Le premier de ces problèmes est susceptible d'une solution analytique fort simple mais en somme très voisine de celle que j'ai jadis donnée; aussi je ne le reprends pas. Je vais traiter simultanément les trois autres problèmes en recherchant *la surface réglée la plus générale qui soit applicable sur le plan, c'est-à-dire qui corresponde point à point au plan de façon que les courbes homologues du plan et de la surface aient toujours la même longueur finie ou infinie.* Toutefois nous n'envisagerons ni la surface, ni le plan dans toute leur étendue, mais, comme on le fait en géométrie classique, M et m étant deux points homologues de la surface et du plan, nous ne nous occuperons de la correspondance que pour des voisinages V_M, v_m respectivement de M et de m pour lesquels la correspondance devra être biunivoque.

Toute génératrice de la surface, étant ligne de plus court chemin, a pour homologue une droite du plan uv. Soit AB un segment contenant M de la génératrice passant par M et situé dans le voisinage V_M H ab son

---

* H. LEBESGUE.— Προσδιορισμὸς πασῶν τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

homologue. Nons limiterons le voisinage v_m par deux droites perpendiculaires à a b en a et b et par deux segments $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, transformés de segments de génératrices; ce sera donc un trapèze $a_1 b_1 b_2 a_2$ de hauteur $ab = h$. Ceci sera toujours possible en diminuant à ses deux extrémités, s'il est nécessaire, le segment ab primitivement choisi; ce faisant, on pourra même faire en sorte que deux segments homologues aux segments de génératrice situés dans V_M, et qui ne peuvent se couper dans v_m, ne se coupent même ni sur $a_1 a_2$, ni sur $b_1 b_2$ mais seulement en deça ou delà de deux perpendiculaires à ab comprenant entre elles v_m, situé par exemple à la distance k de part et d'autre de v_m.

Alors toute génératrice passant dans V_M donne dans v_m un segment $a_o b_o$; il y a correspondance entre les points a_o de $a_1 a_2$ et les points b_o de $b_1 b_2$. Si l'abscisse de a_o comptée sur $a_1 b_1$ à partir de a est t, et celle de b_o comptée dans le même sens sur $b_1 b_2$ à partir de b est θ, θ est une fonction croissante de t, qui s'annulle avec t. On a d'ailleurs, puisque le point de rencontre des droites portant deux segments $a_o b_o$ et $a'_o b'_o$ est en deça ou au delà des droites indiquées,

$$\frac{k}{h+k} < \frac{b_o b'_o}{a_o a'_o} < \frac{h+k}{k};$$

la fonction continue croissante $\theta(t)$ a ses nombres dérivés compris entre les deux nombres positifs premier et dernier membres de l'inégalité précédente. $\theta(t)$ a donc une dérivée finie et déterminée presque partout, c'est-à-dire que les valeurs exceptionelles de t correspondent à des points de l'axe des t qui peuvent être enfermés dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut.

Dans la suite nous aurons constamment à manier des fonctions ou des équations existant ou ayant lieu *presque partout par rapport à* t ce que nous indiquerons par la notation (p. p., t). Notre calcul ne différera que par cette précaution d'un calcul de géométrie classique.

Soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x(t)+\alpha(t)$, $y(t)+\beta(t)$, $z(t)+\gamma(t)$ les coordonnées rectangulaires des homologues A_o et B_o de a_o et b_o.

L'arc AA_o du lieu de A_o a la longueur t, on a donc:

$$\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2 = 1 \qquad \text{(p. p., t).} \tag{1}$$

L'arc BB_o du lieu de B_o a une longueur θ comprise entre $\frac{k}{h+k}$ t et

$\frac{h+k}{k}$ t, donc $\alpha'(t), \beta'(t), z'(t)$ existent (p. p., t) et sont bornées. La longueur de l'arc décrit par le point C_o dont les trois coordonnées sont de la forme $x(t)+\varrho\,\alpha(t)$, ϱ constant, peut se calculer par le théorème de Thalès dans la figure $a\,a_o$, $b\,b_o$, $c\,c_o$ ou par une intégrale

$$\text{arc } C\,C_o = a\,a_o + \varrho(b\,b_o - a\,a_o) = \int_o^t \left\{\sqrt{S[x'(t)+\varrho\,\alpha'(t)]^2}\right\}_{(p.p.,t)} dt,$$

le symbole S indiquant une fonction symétrique de Lamé, c'est-à-dire étendue aux trois coordonnées. Ceci s'écrit encore:

$$\int_o^t \left\{\sqrt{1+2\varrho\,S\,x'\alpha'+\varrho^2 S\,\alpha'^2}\right\}_{(p.p.,t)} dt = t+\varrho\left[\int_o^t \left\{\sqrt{1+2S\,x'\alpha'+S\,\alpha'^2}\right\}_{(p.p.,t)} dt - t\right].$$

D'où, en dérivant par rapport à t,

$$\sqrt{1+2\varrho\,S\,x'\alpha'+\varrho^2 S\,\alpha'^2} = 1+\varrho\left[\sqrt{1+2S\,x'\alpha'+S\,\alpha'^2} - t\right] \quad (p.p., t),$$

et, en égalant pour $\varrho = 0$ les dérivées par rapport à ϱ des deux membres,

$$S\,x'\alpha' = \sqrt{1+2S\,x'\alpha'+S\,\alpha'^2} - 1 \qquad (p.\,p., t),$$

(2) $$S\,x'\alpha' = \sqrt{S\,\alpha'^2} \qquad (p.\,p., t).$$

La relation (2) donne pour la longueur de l'arc $B\,B_o$ l'expression

$$\theta(t) = \int_o^t \left[1+\sqrt{S\,a'^2}\right]_{(p.p.t,)} dt;$$

mais le théorème de Pythagore en donne aussi l'expression:

$$b\,b_o = a\,a_o + \sqrt{\overline{a_o b_o}^2 - h^2} = t + \sqrt{S\alpha^2 - h^2},$$

d'où par dérivation

(3) $$\sqrt{S\,\alpha'^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{S\alpha^2 - h^2}, \qquad (p.p., t).$$

Remarquons que le radical $\sqrt{S\alpha^2 - h^2}$, devant être $b\,b_o - a\,a_o$, est fonction continue de t; lorsque cette fonction continue sera connue, les déterminations de tous les radicaux en résulteront. Remarquons encore que, pour $\sqrt{S\alpha'^2} = 0$, c'est-à-dire pour $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, les relations (2) et (3) sont vérifiées d'elles-mêmes, (1), (2), (3) se réduisent donc à deux relations et sont par suite insuffisantes; mais on va voir que *les formules:*

$$(\Sigma) \qquad X = x(t)+\varrho\,\alpha(t), \qquad Y = y(t)+\varrho\,\beta(t), \qquad Z = z(t)+\varrho\,\gamma(t)$$

définissent une surface (Σ) *réglée et applicable sur le plan pourvu que les con-*

ditions (1), (2), (3) *soient vérifiées, ainsi qu'une condition supplémentaire quand* $S\alpha'^2 = 0$, *et pourvu que les nombres dérivés de* $\theta(t) = t + \sqrt{S\alpha^2 - h^2}$ *soient compris entre* $\frac{k}{h+k}$ *et* $\frac{h+k}{k}$.

Au point M de la surface, donné par t, ρ, nous associons le point m du plan $a a_1 b$ dont les coordonnées par rapport à $a a_1$ et $a b$ sont

$$u = t + \rho\,[\theta(t) - t], \qquad v = \rho h.$$

Nous allons supposer que M décrit sur la surface une courbe Γ, $t(\sigma)$, $\rho(\sigma)$; m décrira γ; la génératrice de M coupe les lieux de A_0 et de B_0 en des points que nous appellerons N et P, les points homologues n et p ont pour u respectivement t et $\theta(t)$. Pour que γ soit rectifiable il faut et il suffit que u et v soient des fonctions à variations bornées de σ, donc il suffit que t et ρ soient de telles fonctions et, puisque $v = \rho h$, il faut que $\rho(\sigma)$ soit à variation bornée; montrons que $t(\sigma)$ doit aussi être à variation bornée. Considérons en effet les points $m\,(t, \rho)$, $m_1(t + \delta t, \rho + \delta\rho)$, $\overline{m}_1(t + \delta t, \rho)$ on a:

$$m\,m_1 > m\,\overline{m}_1 - \overline{m}_1\,m_1,$$

et appliquons cette inégalité aux différents côtés $m\,m_1$ d'un polygone inscrit dans une courbe γ donnée par $t(\sigma)$ à variation non bornée et $\rho(\sigma)$ à variation bornée. H étant la longueur maxima de n p, Φ l'inclinaison maxima de n p et de a b, $m\,\overline{m}_1$ étant compris entre $n\,n_1$ et $p\,p_1$, c'est-à-dire entre dt et $\delta\theta$, on a:

$$\text{longueur du polygone} > \frac{k}{k+h}\,\Sigma\,\delta t - H\,\Sigma\,\delta\rho;$$

inégalité dans laquelle le dernier terme est borné.

Ainsi γ est rectifiable si, et seulement si, $t(\sigma)$ et $\rho(\sigma)$ sont à variations bornées; d'ailleurs si σ est l'arc de γ, les remarques ci-dessus montrent que $t(\sigma)$ et $\rho(\sigma)$ sont à nombres dérivés bornés. Dans ce cas, les longueurs de Γ et de γ sont respectivement exprimées par

$$\int \sqrt{S\left[(x' + \rho\alpha')\frac{dt}{d\sigma} + \alpha\frac{d\rho}{d\sigma}\right]^2}\,d\sigma \quad (\text{p. p.}, \sigma)$$

et par

$$\int \sqrt{\left[\left(1 + \rho\frac{d}{dt}\sqrt{S\alpha^2 - h^2}\right)\frac{dt}{d\sigma} + \sqrt{S\alpha^2 - h^2}\,\frac{d\rho}{d\sigma}\right]^2 + h^2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma. \quad (\text{p. p.}\,\sigma)$$

Par les relations (1), (2), (3) nous avons exprimé que les termes en $\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2$ sont égaux, ceux en $\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2$ étant identiques il suffit d'examiner les

termes en $2\frac{dt}{d\sigma}\frac{d\varrho}{d\sigma}$,

$$S\alpha x' + \varrho S\alpha\alpha' \quad \text{et} \quad \sqrt{S\alpha^2 - h^2} + \varrho\sqrt{S\alpha^2 - h^2}\,\frac{d}{dt}\sqrt{S\alpha^2 - h^2}.$$

Les termes en ϱ sont égaux, d'après (3), donc *on doit avoir:*

$$S\alpha x' = \sqrt{S\alpha^2 - h^2}, \qquad (\text{p. p., t}); \tag{4}$$

mais cette condition n'est nouvelle que si $S\alpha'^2 = 0$. Sinon, en effet, puisque (1) et (2) donnent

$$S(\alpha' y' - \beta' x')^2 = 0, \qquad (\text{p. p., t}),$$

on a:

$$\frac{x'}{\alpha'} = \frac{y'}{\beta'} = \frac{z'}{\gamma'} = \frac{Sx'^2}{S\alpha' x'} = \frac{S\alpha x'}{S\alpha\alpha'}, \qquad (\text{p. p., t}), \tag{5}$$

$$Sax' = \frac{S\alpha\alpha'}{S\alpha' x'} = \frac{\sqrt{S\alpha^2 - h^2}\,\frac{d}{dt}\sqrt{S\alpha^2 - h^2}}{\sqrt{S\alpha'^2}} = \sqrt{S\alpha^2 - h^2}, \qquad (\text{p.p., t}). \tag{6}$$

Ainsi à toute courbe γ rectifiable correspond une courbe Γ de même longueur; mais il faut examiner le cas où γ est non rectifiable. Soit $(M M_1)$ un arc quelconque de Γ, s'il coupe en deux points R, S une même génératrice de Σ on ne pourra que diminuer la longueur de $(M M_1)$ en substituant le segment R S à l'arc R S. Faisons cela en choisissant R S de longueur maxima et tel que l'arc R S ne soit contenu dans aucun autre pouvant être de la même façon remplacé par sa corde. Recommençons cette transformation tant qu'elle restera possible, une infinité dénombrable de fois s'il est nécessaire. Il est facile de voir qu'on atteint ainsi un arc de courbe bien déterminé $(M M_1)_1$ de longueur au plus égale à celle de $(M M_1)$. Pour $(M M_1)_1$, t est fonction monotone du paramètre de représentation; donc les formules (Σ), dans lesquelles α, β, γ ne sont pas tous trois nuls et sont des fonctions à variations bornées de t comme x(t), y(t), z(t), donne ϱ comme fonction à variation bornée du paramètre de représentation de $(M M_1)_1$. Donc cet arc est l'un de ceux que nous avons étudiés plus haut et sa longueur est au moins celle du segment $m m_1$. A fortiori la longueur de $(M M_1)$ est au moins celle de $m m_1$. Or, si γ est non rectifiable, on peut inscrire dans γ un polygone dont la somme des longueurs des côtés $m m_1$ est aussi grande que l'on veut, de sorte que Γ, formée de la réunion des arcs $(M M_1)$ correspondants, a une longueur infinie. Le théorème est prouvé.

Pour intégrer le systême (1), (2), (3), (4), remarquons que si nous appelons M' le point de coordonnées α, β, γ, donc l'extrémité d'un vecteur O M'

équipollent à N M, et m′ le point extrémité d'un vecteur am′ équipollent à n m, il suffit dans les intégrales qui donnaient les longueurs de Γ et de γ de conserver les seuls termes du second degré en ϱ et $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ pour avoir les expressions des longueurs des courbes Γ′ et γ′ décrites par M′ et m′. Donc, la correspondance M′, m′ transforme le cône directeur (Λ) de (Σ) en une surface (λ) portée par le plan (u, v) et avec conservation des longueurs. Or si r et ω sont les coordonnées polaires de m′ par rapport à a et à l'axe a b,

$$\sqrt{S\alpha^2 - h^2} = h \operatorname{tg} \omega, \qquad \varrho = \frac{r \cos \omega}{h},$$

donc ω et r sont des fonctions à nombres dérivés de σ et la longueur commune de Γ′ et γ′ est:

$$\int \left[\sqrt{\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2} \right]_{(p.p., \sigma)} d\sigma .$$

Donc, si nous posons

$$\tau = \int \left| \frac{d\omega}{d\sigma} \right|_{(p.p., \sigma)} d\sigma ,$$

le point m″ de coordonnées polaires r, τ correspond à M′ de façon à réaliser l'application de (Λ) sur le plan. τ est l'arc de la directrice sphérique de (Λ) tracée sur la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Soient a(τ), b(τ), c(τ) les coordonnées du point décrivant cette directrice, ω(τ) doit avoir par rapport à τ une dérivée presque partout égale à ± 1, nous prendrons donc $\omega(\tau) = \int_0^\tau \varepsilon(\tau)\, d\tau$, ε(τ) étant une fonction mesurable partout égale à ± 1. Il en résulte $n\,p = \frac{h}{\cos \omega}$, d'où

$$\alpha = \frac{h}{\cos \omega} a(\tau), \qquad \beta = \frac{h}{\cos \omega} b(\tau), \qquad \gamma = \frac{h}{\cos \omega} c(\tau)$$

et

$$\sqrt{S\alpha^2 - h^2} = b\,p - a\,m = h \operatorname{tg} \omega(\tau); \tag{7}$$

formules dans lesquelles la correspondance entre τ et t reste à préciser. α(t), β(t), γ(t) étant à nombres dérivés bornés en t, et ω(τ) à nombres dérivés bornés en τ; (7) montre que τ′(t) est à nombres dérivés bornés.

Si τ′(t) ≠ 0, on n'est pas dans le cas exceptionnel et les rapports (5) donnent:

$$\frac{x'(t)}{\alpha'(\tau)} = \frac{y'(t)}{\beta'(\tau)} = \frac{z'(t)}{\gamma'(\tau)} = \frac{\cos^2 \omega(\tau)}{h\varepsilon(\tau)}, \text{ (p.p., t) dans } E[\tau'(t) \neq 0]. \tag{8}$$

Si τ′(t) = 0, (4) exige:

$$S \frac{h\, a(\tau)\, x'(t)}{\cos \omega(\tau)} = h \operatorname{tg} \omega(\tau), \qquad \text{(p.p., t) dans } E[\tau'(t) = 0]. \tag{9}$$

(8) exprime le parallélisme des tangentes en N et P aux lieux de ces points et aussi au lieu de l'extrémité P′ du vecteur O P′ équipollent à N P. (9) qui, ayant lieu quand (8) est vérifiée, a lieu presque partout, exprime l'égalité des angles a_1 n p, T N P; T N étant la tangente en N au lieu de N. (8) déterminent entièrement x′, y′, z′; (9) laisse arbitraire l'azimut de N T autour de la direction N P, on prend donc cet azimut arbitrairement aux points de $E[\tau'(t) = 0]$.

Quant à $\tau(t)$ ce devra être une fonction continue croissante, nulle pour $t = 0$, pour qu'alors ω soit aussi nulle, à nombres dérivés bornés et, pour que $\theta(t) = t + h \operatorname{tg} \omega(\tau)$ soit aussi à nombres dérivés bornés, telle que

$$\frac{k}{h+k} < 1 + \frac{h\,\varepsilon(\tau)}{\cos^2 \omega(\tau)}\,\tau'(t) < \frac{h+k}{k}, \qquad (\text{p.p.}, t).$$

En supposant que k n'est pas donné à l'avance, ceci entraîne que l'on ait:

$$\tau'(t) < f \cos^2 \omega[\tau(t)] \qquad (\text{p.p.}, t) \text{ dans } E[\varepsilon(\tau) < 0],$$

f étant un nombre positif inférieur à 1.

Si d'ailleurs cette condition n'était pas réalisée, (Σ) serait pourtant applicable sur le plan, mais il faudrait pour réaliser l'application remplacer la correspondance M, m par une autre analogue à la correspondance M′, m″; et l'applicabilité ne serait assurée que pour des voisinages plus petits. La courbe lieu des points P ne serait plus en général une géodésique, au sens de courbe de plus petite longueur.

Pour traduire commodément toutes ces conditions, exprimons $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ à l'aide de la longitude $\varphi(\tau)$ et de la latitude $\psi(\tau)$, alors pour les points de $E[\tau'(t) \neq 0]$, on a:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= \cos\psi \cos\varphi \sin\omega - \sin\psi \cos\varphi \cos\omega . \varepsilon . \psi' - \cos\psi \sin\varphi \cos\omega . \varepsilon . \varphi', \\ y'(t) &= \cos\psi \sin\varphi \sin\omega - \sin\psi \sin\varphi \cos\omega . \varepsilon . \psi' + \cos\psi \cos\varphi \cos\omega . \varepsilon . \varphi', \\ z'(t) &= \sin\psi \sin\omega \qquad + \cos\psi \cos\omega . \varepsilon . \psi', \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}(\text{p.p.}, t) \text{ dans} \\ E[\tau' > 0].\end{array}$$

et, pour les points de $E[\tau' = 0]$, en achevant de déterminer la direction $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ par son azimut $\chi(t)$ autour de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ compté à partir d'un plan passant par $0z$ et cet axe:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= \cos\psi \cos\varphi \sin\omega - \sin\psi \cos\varphi \cos\omega \cos\chi - \sin\varphi \cos\omega \sin\chi, \\ y'(t) &= \cos\psi \sin\varphi \sin\omega - \sin\psi \sin\varphi \cos\omega \cos\chi + \cos\varphi \cos\omega \sin\chi, \\ z'(t) &= \sin\psi \sin\omega \qquad + \cos\psi \cos\omega \cos\chi, \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}(\text{p.p.}, t) \text{ dans} \\ E[\tau' = 0].\end{array}$$

Mais la condition (4), qu'elle soit ou non une conséquence de (1), (2), (3),

doit toujours être vérifiée, donc on a la condition (9) (p. p., t) et par suite les dernières formules obtenues doivent aussi bien convenir dans $E[\tau' > 0]$ que dans $E[\tau' = 0]$. Et, en effet, τ étant l'arc de la courbe $a(\tau), b(\tau), c(\tau)$, on a:

$$\psi'(\tau)^2 + \cos^2\psi(\tau).\,\varphi'(\tau)^2 = 1, \qquad (\text{p. p.}, \tau)$$

donc on peut poser (p. p., t dans $E[\tau'(t) > 0]$;

$$(10) \qquad \varepsilon(\tau)\psi'(\tau) = \cos\chi(t)\ , \qquad \cos\psi(\tau).\,\varepsilon(\tau).\,\varphi'(\tau). = \sin\chi(t).$$

Finalement *les formules*

$$X = \int_0^t [\cos\psi\cos\varphi\sin\omega - \sin\psi\cos\varphi\cos\omega\cos\chi - \sin\varphi\cos\omega\sin\chi]\underset{(\text{p.p.},t)}{dt} + \frac{\varrho h}{\cos\omega}\cos\psi\cos\varphi,$$

$$Y = \int_0^t [\cos\psi\sin\varphi\sin\omega - \sin\psi\sin\varphi\cos\omega\cos\chi + \cos\varphi\cos\omega\sin\chi]\underset{(\text{p.p.},t)}{dt} + \frac{\varrho h}{\cos\omega}\cos\psi\sin\varphi,$$

$$Z = \int_0^t [\sin\psi\sin\omega + \cos\psi\cos\omega\cos\chi]\underset{(\text{p.p.},t)}{dt} + \frac{\varrho h}{\cos\omega}\sin\psi,$$

dounent la solution du problème pourvu qu'on choisisse les fonctions qui y figurent comme il va être dit: $\varepsilon(\tau)$ est une fonction mesurable ne prenant que les valeurs $+1$ et -1; $\omega(\tau) = \int_0^\tau \varepsilon(\tau)\,d\tau$; f et g étant deux nombres positifs choisis arbitrairement, on prend $t'_1(\tau)$ sommable et telle que

$t'_1(\tau) > g$, partout et $\qquad t'_1(\tau) > \dfrac{1}{f\cos^2\omega(\tau)}$ quand $\varepsilon(\tau) = -1$,

$t_2(\tau)$ étant une fonction, continue ou non, mais croissante, telle que $t_2(0) = 0$, et ayant une dérivée nulle presque partout, $t_2(\tau)$ étant donc une fonction des singularités, on prend $t(\tau) = \int_0^\tau t'_1(\tau)\,d\tau + t_2(\tau)$;

on ajoute aux points de coordonnées τ, t représentant cette fonction les points τ, t tels que $\qquad t(\tau - 0) \leqslant t \leqslant t(\tau + 0)$,

l'ensemble de tous ces points définit la fonction $\tau(t)$ remplissant toutes les conditions voulues; $\chi(t)$ est une fonction mesurable choisie arbitrairement; sauf pour l'ensemble des singularités de $t(\tau)$, qui est de mesure nulle, on veut avoir les relations (10), on prendra donc, $e(t)$ étant l'ensemble des points de l'intervalle $(0, \tau)$ n'appartenant pas à cet ensemble des singularités,

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_{e(\tau)} \cos\chi[t(\tau)].\,\varepsilon(\tau)d\tau, \qquad \varphi(\tau) = \varphi_0 + \int_{e(\tau)} \frac{\sin\chi[\varepsilon(\tau)]}{\cos\psi(\tau)}\,\varepsilon(\tau)d\tau.$$

Il est facile d'analyser la famille des surfaces obtenues et aussi de noter quelques-unes de leurs propriétés, rencontrées au cours de la recherche.

Quand $\tau'(t) \equiv 0$, $\varphi, \psi, \omega, \varepsilon$ sont constants on obtient un cylindre quel-

conque à cela près que sa section droite est rectifiable; les géodésiques sont des hélices, c'est-à-dire des courbes rectifiables dont toutes les tangentes existantes font un angle constant avec les génératrices. Ces deux résultats sont anciens. Lorsqu'il ne s'agit plus d'un cylindre nous avons noté qu'une surface réglée ne peut-être applicable sur le plan que si son cône directeur est lui-même applicable sur le plan et qu'il suffit pour cela que la directrice sphérique de celui-ci soit rectifiable; tout cela est aussi connu.

Quand $\tau'(t)$ existe et n'est pas nulle, il y a sur la génératrice t un point caractéristique; dans le cas général ce point saute d'en deça de la courbe lieu de A_0 à au delà du lieu B_0 et vice versa autant de fois que l'on veut pour toute variation de t. Si $\tau'(t)$ existe, est continue et non nulle on a affaire aux tangentes à une courbe gauche et on peut ainsi retrouver que les tangentes à une telle courbe forment une surface applicable sur le plan dès que le cône directeur est applicable sur le plan.

Le fait que l'on peut réaliser l'application d'une surface réglée sur un plan et la transformation de son cône directeur en une surface plane de façon qu'à des génératrices parallèles correspondent des droites parallèles est une extension du théorème classique de la conservation de la courbure de l'arête de rebroussement jusqu'à un cas où cette arête n'existe pas. Le parallélisme des tangentes aux lieux de P et de P′ correspond à une généralisation partielle du théorème sur la conservation de la courbure géodésique. Le parallélisme des tangentes aux lieux de P et de N, comme les égalités (5) ou (9), exprime que, (p. p., t), l'application conserve les angles.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ γάλλος ἀκαδημαϊκὸς κ. H. Lebesgue εἶχεν ἀσχοληθῆ πρὸ τριάκοντα πέντε ἐτῶν ἐπὶ τῶν μὴ ἀναλυτικῶν ἐπιφανειῶν, τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ δὴ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς γενικωτέρας ἐπιφανείας τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀποτελούσης μέρος εἴτε ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, εἴτε κυλίνδρων, εἴτε κώνων, εἴτε ἐπιφανειῶν-τόπων τῶν ἐφαπτομένων στρεβλῆς ἐπιφανείας.

Αἱ ἐν τῷ μεταξὺ πρόοδοι τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρέχουσιν ἁπλουστέρας λύσεις τῶν προβλημάτων τούτων. Ὁ κ. Lebesgue ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει ἀναζητεῖ τὴν γενικωτέραν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν ἀναπτυκτὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τουτέστι τὴν ἀντιστοιχοῦσαν, σημεῖον πρὸς σημεῖον, πρὸς τὸ ἐπίπεδον, οὕτως ὥστε αἱ ὁμόλογοι γραμμαὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας νὰ ἔχωσι πάντοτε τὸ αὐτὸ μῆκος, πεπερασμένον ἢ ἄπειρον.