ἡμεῖς οὐ μόνον ἀδυνατοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν αὐτούς, ἀλλὰ καὶ φρονοῦμεν, ὅτι ἐπὶ ἀστηρίκτων εἰκασιῶν δὲν εἶναι ἐπιστημονικῶς ὀρθὸν νὰ στηρίζωμεν γνώμας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques*, *Note de M.* ***Th. Varopoulos.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. On sait qu'une famille de fonctions est dite *quasi-normale* d'ordre q lorsque de toute suite infinie de fonctions de la famille on peut extraire une suite qui converge uniformément vers une limite sauf, peut être, en q points, en plus, du domaine (D), appelés irréguliers. On a, par exemple, les fonctions $f(z) = n\ P(z)$, P étant un polynôme ou une fonction quelconque ayant un nombre fini de zéros dans le domaine envisagé. Ces fonctions admettent, comme points irréguliers, toutes les racines du polynôme P.

Si q=o la famille est quasi-normale d'ordre O, c'est-à-dire *normale.*

On doit à M. Paul Montel le critère fondamental pour qu'une famille f(z) de fonctions soit quasi-normale[1].

Tout récemment M. Valiron dans un Mémoire, paru aux Annales de l'École Normale S.re de Paris (1930)[2], a considéré une famille f(z) quasi-normale d'ordre q, dans un domaine (D) et un système de quatre nombres distincts a, b, c, d et a montré que le nombre de zéros de 3 *au moins* des fonctions

$$f(z) - a, \quad f(z) - b, \quad f(z) - c, \quad f(z) - d.$$

est limité supérieurement dans le domaine (D'), complètement intérieur à (D), et privé de q cercles du rayon E, cercles qui dépendent de la fonction f(z); le nombre N, qui limite les racines des fonctions f-a, f-b, f-c, f-d, dépend de D', ε, a, b, c, d.

2. Je me propose de communiquer quelques résultats qui fournissent une condition nécessaire pour que la famille de fonctions f(z) soit quasi-normale d'ordre déterminé, critère qui est, pour le cas des familles normales, la condition nécessaire et suffisante.

---

* Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ. — Περὶ τῶν ἡμικανονικῶν οἰκογενειῶν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

[1] Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications (Collection de Monographies sur la théorie des fonctions). Gauthier Villars, 1927, p. 67.

[2] Sur les familles normales de fonctions analytiques, *An. Ec. Normale,* Série III, **47,** No 3, Mars p. 82.

Je considère la famille $f(z)$ quasi-normale dans le domaine (D) et le domaine (D′) intérieur à (D) troué par q trous, c'est-à-dire des cercles de rayon ε. Soient a et b, $a \neq b$, le nombre des zéros de deux fonctions

$$f(z) - a, \quad f(z) - b$$

intérieurs à (D′) est nécessairement *borné* pour l'une des deux fonctions, au moins.

En effet, si ce n'était pas vrai, il existerait une fonction $f_1(z)$, extraite de la famille, telle que, dans le domaine (D′), percé de q trous de rayons ε', disposés n'importe comment, les fonctions

$$f_1(z) - a \qquad \text{et} \qquad f_1(z) - b$$

auraient un zéro au moins; de même il existerait une fonction $f_2(z)$ telle que

$$f_2(z) - a \qquad \text{et} \qquad f_2(z) - b$$

auraient deux zéros au moins, *quel que soit* le système de q trous; d'une façon générale il existe une fonction $f_n(z)$ telle que dans le domaine (D′) les deux fonctions

$$f_n(z) - a \qquad \text{et} \qquad f_n(z) - b$$

aient n racines du moins pour n'importe quel système de q trous.

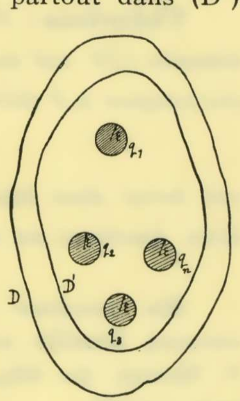
De la suite des fonctions ainsi obtenue

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

je peux extraire une suite partielle

$$f_{p_1}(z), \quad f_{p_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{p_n}(z), \quad \ldots$$

qui converge uniformément vers une fonction limite f_0 partout dans (D′) sauf, peut-être autour de q points. La fonction limite ne peut être ni a ni b, sans quoi $f(z) - b$ et $f(z) - a$ n'admettraient plus une infinité des zéros.



Donc f_0 est une fonction méromorphe dans (D′) percé de q trous. Or, le nombre des racines de la fonction $f_0 - a$, dans (D′), fonction qui n'est pas identiquement nulle, est évidemment borné, donc en vertu d'une proposition classique, comme $f(z)$ n'est pas identique à la constante a, pour n assez grand la fonction $f(z) - a$ dans (D′) percé des q trous, a autant de zéros que la fonction $f_0(z) - a$ donc le nombre de racines de $f_{n_p} - a$ est borné; or il est, au moins, égal à p_n et il y a contradiction.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Condition nécessaire pour qu'une famille de fonctions méromorphes soit quasi-normale d'ordre q.

Théorème: *Considérons une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine (D), et deux nombres distincts a, b. Si la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q, le nombre des zéros de*

$$f(z) - a, \quad f(z) - b$$

intérieurs à (D′) (domaine intérieur à D), troué par q trous de rayons ε, est borné pour l'une des deux fonctions, au moins.

3. La condition est suffisante pour q=o.

Considérons en effet une famille de fonctions f(z) méromorphes vérifiant la condition ci-dessus: le nombre des zéros de

$$f(z) - a, \quad f(z) - b$$

a, b étant deux nombres quelconques distincts, est borné dans (D) pour l'une des deux, au moins. Je dis que la famille f(z) est *normale* (quasi normale d'ordre q=o) dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D).

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existerait alors un point irrégulier dans (D′) soit P ce point; autour de P, sauf pour deux valeurs exceptionnelles au plus, les équations f(z) - A ont une infinité de racines. Je prends a, b comme exceptionnels.

Nous affirmons donc qu'une famille f(z) de fonctions méromorphes est normale dans un domaine (D), au moyen de la proposition qui suit:

Théorème: *Pour que la famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le domaine (D) soit normale il faut et il suffit que, étant donné deux nombres quelconques a, b distincts, le nombre des zéros de*

$$f(z) - a, \quad f(z) - b$$

soit borné dans tout domaine complétement intérieur à (D) pour l'une des deux fonctions, au moins.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Μία οἰκογένεια ἀναλυτικῶν συναρτήσεων f, ἐντὸς ἑνὸς τόπου (Δ), λέγεται *κανονικὴ* (famille normale), συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τὸν δοθέντα ὑπὸ τοῦ P. Montel, ἐὰν δίδῃ γένεσιν εἰς μίαν ἀκολουθίαν μερικήν, συγκλίνουσαν ὁμαλῶς ἐντὸς τοῦ (Δ).

Ἐὰν ἡ σύγκλισις αὕτη λαμβάνῃ χώραν πανταχοῦ τοῦ (Δ), ἐκτὸς εἰς σημεῖα τοῦ τόπου, πλήθους q πεπερασμένου, ἡ οἰκογένεια f(z) καλεῖται *ἡμικανονικὴ τάξεως* q.

Τόσον διὰ τὰς πρώτας, ὅσον καὶ διὰ τὰς δευτέρας, ὑπάρχει θεμελιῶδες κριτήριον, ὀφειλόμενον εἰς τὸν κ. P. Montel, (Leçons sur les familles normales, P. Montel, 1927, σ. 61, 67).

Ἐσχάτως ὁ Valiron εἰς ὑπόμνημά του (*An. de l'École Normale,* 1930, Mars, σ. 82) ἀνέφερε γνώρισμα (συνθήκη ἀναγκαία), ἵνα ἡ f(z) εἶναι ἡμικανονικὴ τάξεως q, τῇ βοηθείᾳ τῶν τιμῶν ἃς ἡ f(z) λαμβάνει ἐντὸς τοῦ (Δ).

Ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει ἐκτίθενται δύο προτάσεις ἀφορῶσαι τὰς τοιαύτας συναρτήσεις, προτάσεις, ἀποτελοῦσαι, διὰ μὲν τὰς ἡμικανονικὰς οἰκογενείας τάξεως $q > o$ συνθήκην ἀναγκαίαν διὰ δὲ τὰς κανονικὰς (ἀντιστοιχούσας εἰς $q = o$) συνθήκην ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.—Περὶ ἁπλοῦ τρόπου χημικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς πραγματικῆς ὀξύτητος τοῦ γλεύκους,* *ὑπὸ κ.* ***Ν. Χ. Ρουσσοπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Ζέγγελη.

Ὁ τρόπος οὗτος βασίζεται ἐπὶ τῆς ἀναστροφῆς τῆς σακχαρόζης, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς πραγματικῆς ὀξύτητος τοῦ γλεύκους· ἀλλ' ἀντὶ μετρήσεων ταύτης, ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, εἰς διάφορα χρονικὰ διαστήματα, πρὸς λῆψιν τῆς μέσης τιμῆς τῆς σταθερᾶς ἀναστροφῆς, ἀναλόγου, ὡς γνωστόν, πρὸς τὴν συμπύκνωσιν τῶν ἰόντων ὑδρογόνου, κατὰ τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος τρόπον, ἀρκούμεθα εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ἀνεστραμμένου σακχάρου, ἐντὸς χρονικοῦ τινος διαστήματος, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γλεύκους ἀφ' ἑνός, καὶ ὑπὸ δεκάτου κανονικοῦ διαλύματος τρυγικοῦ ὀξέος, λαμβανομένου ὡς προτύπου, ἀφ' ἑτέρου, ὑπὸ συνθήκας θερμοκρασίας μεταβλητὰς ἀλλὰ τὰς αὐτὰς καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

Οὕτω, δὲν ἔχομεν ἀνάγκην θερμοστάτου οὐδ' ἐπιβλέψεώς τινος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀναστροφῆς, ὡς ἐπίσης δὲν ἔχομεν ἀνάγκην προσδιορισμοῦ τοῦ ἀνεστραμμένου σακχάρου μετὰ διάφορα χρονικὰ διαστήματα.

Τὴν ἀρχὴν τῆς μεθόδου ἐνεπνεύσθημεν ἐκ προγενεστέρας ἡμῶν ἐργασίας.

Ὡς γνωστὸν αἱ σταθεραὶ τῆς ταχύτητος ἀναστροφῆς αἱ χρησιμεύουσαι πρὸς μέτρησιν PH ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἰόντα ὑδρογόνου εἶναι ὡσαύτως ἀνάλογοι καὶ πρὸς τὰς σταθερὰς ἠλεκτρολυτικῆς διαστάσεως τῶν ὀξέων τῶν διδόντων τὰ ἰόντα ταῦτα.

Ἀλλ' αἱ μεταβολαὶ τῆς σταθερᾶς διαστάσεως ὀξέος τινὸς μετὰ τῆς θερμοκρασίας παρέχονται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Van't Hoff.

$$\frac{d \log K}{d T} = - \frac{Jg}{R T^2} \qquad (I)$$

---

* N. C. ROUSSOPOULOS. — **Sur un procédé simple de détermination chimique de l'acidité réelle du moût.** —Ἐκ τοῦ Γεωργικοῦ καὶ Βιομηχανικοῦ Ἰνστιτούτου Σταφίδος.

* Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 23 Ὀκτωβρίου.