ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 26ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1981

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΚΑΡΜΙΡΗ

ΦΥΣΙΚΗ.— **Γενίκευσις τοῦ νόμου τοῦ Stokes,** *ὑπὸ Δανιὴλ Μ. Λέκκα* *

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Καίσαρος Ἀλεξοπούλου.

ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

e : φορτίον ἠλεκτρονίου.
F : ἀντίστασις τριβῆς ἐξ εὐθυγράμμου ὁμαλῆς κινήσεως σφαίρας.
dφ : ὡς ἄνω, ἐφαπτομένη εἰς στοιχειώδη ἐπιφάνειαν σφαίρας.
a : ἀκτὶς σφαιρικοῦ σταγονιδίου.
η : συντελεστὴς ἰξώδους, ἀέρος.
v : ταχύτης σταγόνος.
f : συνάρτησις διορθώσεως τοῦ Milikan.
A : σταθερὸς συντελεστής.
L : ἐλευθέρα διαδρομὴ μορίων ἀέρος.
m : μᾶζα σταγονιδίου ἐλαίου.
σ : πυκνότης ἐλαίου.
ρ : πυκνότης ἀέρος.
g : ἐπιτάχυνσις βαρύτητος.
E : ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου.
U : πεδίον ταχύτητος μορίων ρευστοῦ.
e_N : βάσις λογαρίθμων τοῦ Neper.

* DANIEL M. LEKKAS, **Généralisation de la loi de Stokes.**

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. 1. Ἐξετάζοντας τὸν πίνακα ἀποτελεσμάτων τῶν μετρήσεων τοῦ Ἀμερικανοῦ καθηγητοῦ Milikan, διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ φορτίου τοῦ ἠλεκτρονίου, διαπιστώνομεν τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ φορτίον ἠλεκτρονίου e_1 ὑπολογισθὲν διὰ τοῦ νόμου τοῦ Stokes (χωρὶς διόρθωσιν) παρουσιάζει μεγάλην ἀπόκλισιν ἀποτελεσμάτων. Μεταξὺ τῶν μετρήσεων ὑπ' ἀριθμ. 2 (5,024) καὶ ὑπ' ἀριθμ. 25 (6,854) ἡ ἀπόκλισις εἶναι 26,7 %, ἑπομένως ὀρθῶς ὠδηγήθη ὁ ἐρευνητὴς εἰς τὴν ἀναζήτησιν ἐμπειρικῆς συναρτήσεως f διὰ τὴν διόρθωσιν τοῦ νόμου τούτου.

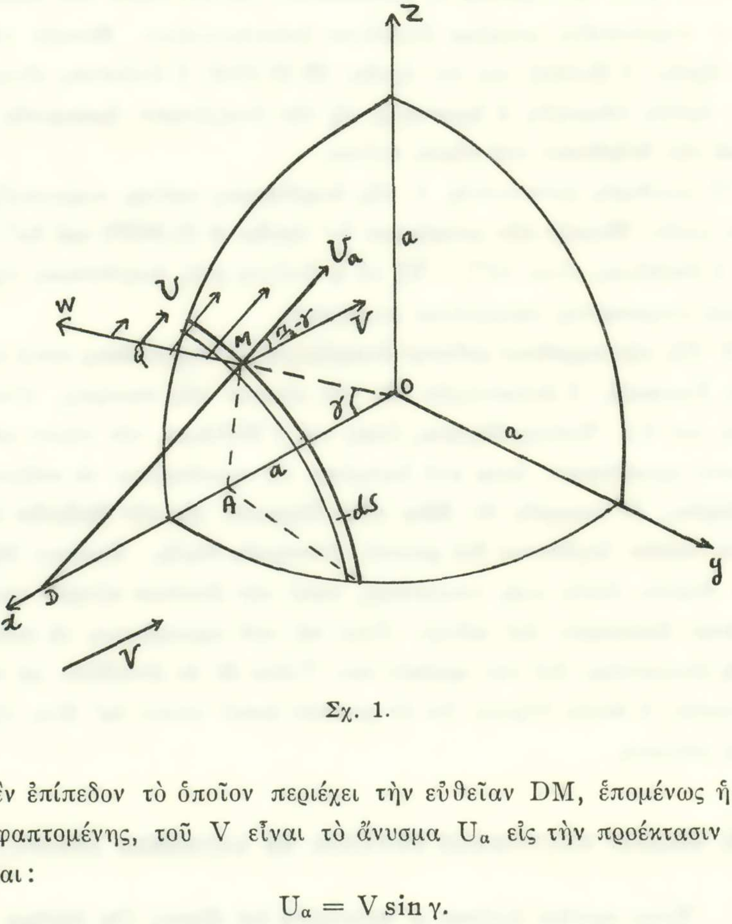
β) Ὁ σταθερὸς συντελεστὴς A τῆς διορθώσεως ταύτης παρουσιάζει ἐπίσης ἀπόκλισιν τιμῶν. Μεταξὺ τῶν μετρήσεων ὑπ' ἀριθμ. 6 (0,9626) καὶ ὑπ' ἀριθμ. 15 (0,8592) ἡ ἀπόκλισις εἶναι 12%. Ἐξ οὗ ἡ ἀνάγκη μιᾶς διορθώσεως ὑψηλοτέρου βαθμοῦ καὶ στερουμένης σφαλμάτων μετρήσεων.

1. 2. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἀναφέρομαι εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς Reynold, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ 0,2. Ἐπίσης δέχομαι, ὅπως καὶ ὁ Milikan, τὸν νόμον τοῦ Stokes ἀκριβῆ κατὰ προσέγγισιν, ὅπερ μοῦ ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσω τὸ πεδίον ταχύτητος τοῦ ἀερίου, ἐν συνεχείᾳ δὲ δίδω νέαν ἔκφρασιν εἰς τὴν βαθμίδα ταχύτητος τοῦ πεδίου τούτου ἰσχύουσαν διὰ ρευστὰ ἀσυνεχοῦς δομῆς. Κατόπιν δέχομαι ὅτι ἓν μόριον ἀερίου, ἐγγὺς μιᾶς ἐπιφανείας, κατὰ τὴν ἄτακτον κίνησίν του, λαμβάνει τοιαύτην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτήν, ὥστε νὰ τοῦ προσφέρεται τὸ πιθανώτερον τμῆμα τῆς ἐπιφανείας διὰ τὴν κροῦσίν του. Τοῦτο δὲ ἐν ἀντιθέσει μὲ τὴν κλασσικὴν φυσικήν, ἡ ὁποία δέχεται ὅτι ἓν ρευστὸν ἀσκεῖ πίεσιν ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς σώματος.

2. ΠΕΔΙΟΝ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΚ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

2. 1. Ἔστω σφαῖρα ἀκτῖνος a κινουμένη ἐπὶ ἄξονος Ox (σχῆμα 1) παρατηρουμένη τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κέντρον της συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O, καὶ ἔστω V ἡ σταθερὰ ταχύτης της παράλληλος πρὸς Ox. Ἐκ τοῦ σημείου O ἄγομεν πρὸς τυχοῦσαν διεύθυνσιν ἄξονα Ow, ὅστις τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς σημεῖον M, καὶ καλοῦμεν w τὴν μεταβλητὴν τὴν ἐκφράζουσαν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου τοῦ Ow ἀπὸ τὸ O. Ἐπίσης φέρομεν τὴν MA κάθετον εἰς Ox καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς M τὴν τέμνουσαν τὸν ἄξονα Ox, ἔστω εἰς σημεῖον D. Ὀνομάζομεν δὲ γ τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων Ox καὶ Ow.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν ἀντίστασιν τριβῆς θεωροῦμεν μόνον τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς Ox διὰ μεγάλον κύκλον, καὶ συντρέχουσαι πρὸς αὐτὸν διὰ μικρὸν κύκλον. Τὸ ἄνυσμα τῆς ταχύτητος V τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ M ὁρίζει μετὰ



Σχ. 1.

τοῦ Ox ἓν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν εὐθεῖαν DM, ἑπομένως ἡ προβολὴ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης, τοῦ V εἶναι τὸ ἄνυσμα U_α εἰς τὴν προέκτασιν τῆς DM, καὶ ἰσοῦται:

$$U_\alpha = V \sin \gamma. \tag{2.1}$$

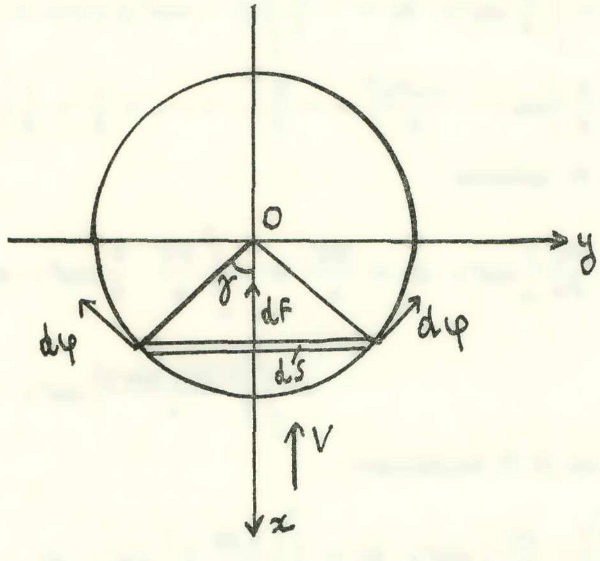
Ἐκ τῆς σχέσεως 2. 1 συνάγομεν, ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων περιφερείας κύκλου καθέτου εἰς Ox, τὰ ὁποῖα ἔχουν $\gamma = C^{te}$ ἔχουν καὶ $U_\alpha = C^{te}$, ἢ ἡ U_α εἶναι σταθερὰ διὰ μίαν στοιχειώδη ἐπιφάνειαν σφαιρικῆς ζώνης:

$$ds = 2\pi (AM)(a \cdot d\gamma) = 2\pi a^2 \sin \gamma d\gamma. \tag{2.2}$$

Ἡ ταχύτης U μεταδίδεται διὰ τοῦ ρευστοῦ ἀπὸ στρῶσιν εἰς στρῶσιν δημιουργῶντας πεδίον ταχύτητος U (w, γ) κάθετον πρὸς τὸ ἄξονα Ow.

2. 2. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν συνάρτησιν U παρατηροῦμεν ὅτι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ στοιχειώδης ἀντίστασις ἡ προβαλλομένη, ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ, εἰς στοιχειώδη ἐπιφάνειαν ἐν κινήσει, εἶναι ἐφαπτομένη πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἴση πρός:

$$d\varphi = -\eta\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)_\alpha \cdot ds. \tag{2.3}$$



Σχ. 2.

Διὰ λόγους συμμετρίας (σχῆμα 2) μόνον ἡ συνιστῶσα dF ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox ἔχει ἄθροισμα διάφορον τοῦ μηδενός, καὶ ἰσοῦται μέ:

$$dF = d\varphi \cdot \sin\gamma \tag{2.4}$$

$$\text{ἢ} \quad dF = -2\pi\eta a^2 \sin^2\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)_\alpha \cdot d\gamma \tag{2.5}$$

ἐκ τῶν σχέσεων (2. 2), (2. 3) καὶ (2. 4) ὁλοκληρώνοντας τὴν (2. 5) ἀπὸ O ἕως π ἔχομεν:

$$F = -2\pi\eta\alpha^2\int_0^\pi\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)_\alpha \sin^2\gamma \cdot d\gamma.$$

Ὑποθέτοντας τὸν τύπον τοῦ Stokes ἀκριβῆ εἰς πρώτην προσέγγισιν ἔχομεν:

$$F = 6\pi\eta a V = -2\pi\eta a^2\int_0^\pi\left[\frac{\partial U}{\partial w}\right]_\alpha \sin^2\gamma \cdot d\gamma \Longrightarrow \int_0^\pi\left[-\frac{\partial U}{\partial w}\right]_\alpha \sin^2\gamma \cdot d\gamma = \frac{3V}{a} \tag{2.6}$$

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως (2. 6) πολλαπλασιάζομεν τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἕνα παράγοντα παραγωγήσεως Φ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, καὶ ὅστις ἔχει μορφὴν ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, ἀπὸ Ο ἕως π, μίας συναρτήσεως τοῦ γ. Εὐκόλως προσδιορίζομεν ἕναν τοιοῦτον παράγοντα:

$$\Phi = \int_0^\pi \frac{3}{4}\sin^3\gamma \cdot d\gamma = -\frac{3}{4}\int_0^\pi (1-\cos^2\gamma)\, d(\cos\gamma) =$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\cos\gamma - \frac{\cos^3\gamma}{3}\right]_0^\pi = -\frac{3}{4}\left[-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = 1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2. 6) γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\pi \left[-\frac{\partial U}{\partial w}\right]_\alpha \sin^2\gamma \cdot d\gamma &= \frac{3V}{a}\cdot\Phi = \int_0^\pi \frac{3V}{a}\cdot\frac{3}{4}\sin^3\gamma\cdot d\gamma = \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{2{,}25V\sin\gamma}{a}\right]\sin^2\gamma\cdot d\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (2.\,7)$$

Ἐκ τῶν (2. 1) καὶ (2. 7) λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\pi \left[-\frac{\partial U}{\partial w}\right]_\alpha \sin^2\gamma \cdot d\gamma &= \int_0^\pi \left[\frac{2{,}25}{a}U\right]_\alpha \sin^2\gamma\cdot d\gamma, \\ \text{ἢ} \quad \int_0^\pi \left[\frac{2{,}25}{a}U + \frac{\partial U}{\partial w}\right]_\alpha &\sin^2\gamma\cdot d\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.\,8)$$

Ἵνα ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2. 8) ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν φυσικὴν πραγματικότητα πρέπει νὰ πληροῖ τοὺς ἀκολούθους ὅρους:

α) Διὰ $w = a \Rightarrow U = V\sin\gamma$.

β) Διὰ $w \to \infty \Rightarrow U \to 0$.

γ) Ὁ μηχανισμὸς μεταδόσεως τῆς ταχύτητος ἀπὸ στρῶσιν εἰς στρῶσιν εἶναι ὁ αὐτὸς δι' οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ρευστοῦ, ἑπομένως ἡ ἀπόσβεσις τῆς ταχύτητος U εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ γ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$U(w,\gamma) = \Psi'(w)\cdot\Psi(\gamma) \qquad (2.\,9)$$

ὅπου:

$$\Psi = K\sin\gamma \qquad (2.\,10)$$

διότι τὸ Ψ ἀνεξάρτητον τοῦ w διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ Ow καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (2. 1) λαμβάνομεν τὴν (2. 10).

Ἐκ τῶν (2.8), (2.9) καὶ (2.10) λαμβάνομεν:

$$\left[\frac{2{,}25}{a}\Psi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial w}\right]_\alpha \cdot K \cdot \int_0^\pi \sin^3\gamma \cdot d\gamma = 0$$

ἐφόσον ὅμως τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἔχομεν:

$$\left[\frac{2{,}25}{a}\Psi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial w}\right]_\alpha = 0 \tag{2.11}$$

ἐπειδὴ ὅμως τὸ a δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, ἔχομεν δικαίωμα νὰ γράψωμεν τὴν (2.11):

$$\frac{2{,}25}{a}\Psi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial w} = 0.$$

Ἡ διαφορικὴ αὕτη ἐξίσωσις ἔχει ὡς λύσιν: $\Psi' = Ce_N^{-\frac{2,25}{a}(w+b)}$ λαμβάνοντας δὲ ὑπ' ὄψιν τοὺς ἀνωτέρω ὅρους α καὶ β καὶ τὰς τὰς σχέσεις (2.9) καὶ (2.10) καταλήγομεν εἰς:

$$U = V\sin\gamma \cdot e_N^{-\frac{2,25}{a}(w-\alpha)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial U}{\partial w} = -\frac{2{,}25}{a} V\sin\gamma \cdot e_N^{-\frac{2,25}{a}(w-a)}. \tag{2.12}$$

Διὰ μεταθέσεως τῆς ἀρχῆς τοῦ Ow ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$w' = w - a$$

καὶ ἡ (2.12) γράφεται:

$$\frac{\partial U}{\partial w'} = -\frac{2{,}25}{a} V\sin\gamma \cdot e_N^{-\frac{2,25}{a}w'} : \text{ Βαθμὶς ταχύτητος} \tag{2.13}$$

Εἰσάγοντας τὴν (2.13) εἰς (2.5) καὶ ὁλοκληρώνοντας ἀπὸ O ἕως π:

$$F = -2\pi\eta a^2 \int_0^\pi \left[-\frac{2{,}25}{a} V\sin\gamma \cdot e_N^{-\frac{2,25}{a}w'}\right]_{w'=0} \cdot \sin^2\gamma \cdot d\gamma = 6\pi\eta a V$$

εὑρίσκομεν τὸν τύπον τοῦ Stokes διὰ συνεχὲς ῥευστόν.

3. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ STOKES ΔΙ' ΑΣΥΝΕΧΕΣ ΡΕΥΣΤΟΝ

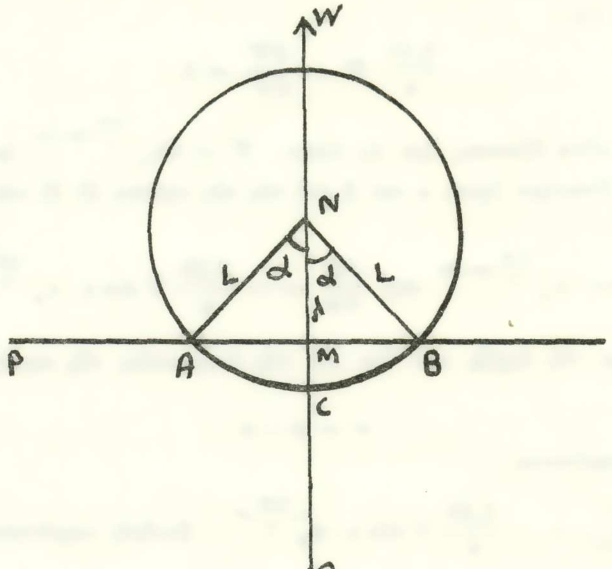
3.1. Μὲ τὴν κβαντοποίησιν τοῦ ῥευστοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον κινεῖται ἡ σφαῖρα, ἡ βαθμὶς ταχύτητος (2.13) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial w'}\right]_i = -\frac{2{,}25}{a} V\sin\gamma \cdot e_N^{-\frac{2,25}{a}w_i} \tag{3.1}$$

εἰς τὴν ὁποίαν w_i', διὰ $i = 1, 2, 3, \ldots \infty$, εἶναι αἱ διαδοχικαὶ ἀποστάσεις τῶν κέντρων τῶν μορίων τοῦ ρευστοῦ, ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τὴν θεωρουμένην στιγμήν, ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ow.

Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας, ἐκ τριβῆς, προβάλλεται ἀπὸ τὴν πρώτην στρῶσιν μορίων ρευστοῦ περιβαλλόντων αὐτήν. Ἑπομένως θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς πρώτης ἀποστάσεως w_i' τὴν ὁποίαν χρειαζόμεθα.

3.2. Ἓν μόριον ἀερίου εὑρίσκεται, κατὰ τὴν ἄτακτον κίνησίν του, ὡρισμένον χρόνον, ἐντὸς μίας σφαίρας κέντρου N καὶ ἀκτῖνος L, ἴσης πρὸς τὴν ἐλευ-



Σχ. 3.

θέραν διαδρομὴν τοῦ μορίου, ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν (σχῆμα 3). Ἵνα εἴπωμεν ὅτι τὸ μόριον εὑρίσκεται πλησίον ἐπιπέδου P θὰ πρέπει ἡ ἀπόστασις $MN = \lambda$ νὰ εἶναι: $0 \leqslant \lambda \leqslant L$ καὶ νὰ ἀκολουθῇ τοὺς κατωτέρω πιθανολογικοὺς νόμους τοὺς ὁποίους θὰ ἀναπτύξωμεν:

Λέγοντας ὅτι ἡ διεύθυνσις κινήσεως τοῦ μορίου σχηματίζει, ὡρισμένον χρόνον, μίαν γωνίαν α μετὰ τοῦ ἄξονος Ow, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ μόριον θὰ προσκρούσῃ εἰς σημεῖον τῆς στοιχειώδους σφαιρικῆς ζώνης:

$$dS_\alpha = 2\pi L^2 \sin\alpha \cdot d\alpha. \tag{3.2}$$

Ἡ ἐπιφάνεια (3. 2) ἀποτελεῖ στοιχεῖον ἑνὸς συνεχοῦς συνόλου:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dS_\alpha , \tag{3.3}$$

$$dS_\alpha \in \int_0^{\frac{\pi}{2}} dS_\alpha . \tag{3.4}$$

Ἐπομένως ἡ στοιχειώδης πιθανότης ὅπως τὸ μόριον κινεῖται ὑπὸ γωνίαν α μετὰ τοῦ Ow εἶναι:

$$dp_\alpha = \frac{dS_\alpha}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dS_\alpha} = \frac{2\pi L^2 \sin\alpha \cdot d\alpha}{2\pi L^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \cdot d\alpha} = \sin\alpha \cdot d\alpha, \quad \text{ὅπου:} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dp_\alpha = 1.$$

Ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ μόριον κινεῖται ὑπὸ μίαν τυχοῦσαν γωνίαν μεταξὺ O καὶ α_i, μετὰ τοῦ ἄξονος Ow, εἶναι ἕνα ὑποσύνολον X_i, ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν πιθανοτήτων:

$$X_i = \sum_{K=1}^{i} dp_{\alpha_K}, \qquad X_i \subseteq X .$$

Τὸ γενικὸν σύνολον τοῦ X_i εἶναι:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{i} dp_{\alpha_K}, \tag{3.5}$$

ἐάν: $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$. Ἡ πιθανότης λοιπὸν ὅπως τὸ μόριον κινεῖται μεταξὺ O καὶ α_i εἶναι, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι dp_{α_K} συνεχές:

$$p_{\alpha_i} = \frac{X_i}{X} = \frac{\sum_{K=1}^{i} dp_{\alpha_K}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{i} dp_{\alpha_K}} = \frac{\int_0^{\alpha_i} \sin\alpha \cdot d\alpha}{\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\alpha} \sin\alpha \cdot d\alpha} = \frac{1-\cos\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} (1-\cos\alpha_i)}, \tag{3.6}$$

ὅπου: $\sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i} = 1$. Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας τὸ μόριον θὰ προσκρούσῃ ἐπὶ σημείου τῆς ἐπιφανείας σ_{α_i} τοῦ ἐπιπέδου P, ἥτις εἶναι ἡ τομὴ τοῦ P καὶ τῆς νοητῆς σφαίρας, ἰσοῦται δὲ μέ:

$$\sigma_{\alpha_i} = \pi (AM)^2 = \pi L^2 \sin^2 \alpha_i . \tag{3.7}$$

Σύμφωνα μὲ τὸν λογισμὸν τῶν πιθανοτήτων, ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ τὸ σ_α εἶναι ἡ μέση τιμὴ ἰσορροπίας $\sigma_{\bar{\alpha}}$, ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου: $\sigma_{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\alpha_i} p_{\alpha_i}$, ἀλλὰ $\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos\alpha_i)$ ἀνεξάρτητον τοῦ i, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐκ τῶν σχέσεων (3.6), (3.7) καὶ τῆς τελευταίας:

$$\sigma_{\bar{\alpha}} = \frac{\pi L^2 \sum_{i=1}^{n} \sin^2\alpha_i (1 - \cos\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos\alpha_i)}. \tag{3.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ dα ἔχομεν, ὅταν τὸ πλῆθος n τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\bar{\alpha}} = \pi L^2 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \cdot d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \cdot d(\sin\alpha)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot d\alpha} = \pi L^2 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{\pi}{2} - 1} =$$

$$= 0{,}79198\, \pi L^2. \tag{3.9}$$

Ἐκ τῶν (3.7) καὶ (3.9) λαμβάνομεν τὸ $\bar{\alpha}$ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τοῦ μορίου:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2\bar{\alpha} = 0{,}79198, \quad \sin\bar{\alpha} = 0{,}8899, \quad \cos\bar{\alpha} = 0{,}45608, \\ \cot g\,\bar{\alpha} = 0{,}514, \quad \bar{\alpha} = 62^0{,}8. \end{array}\right\} \tag{3.9α}$$

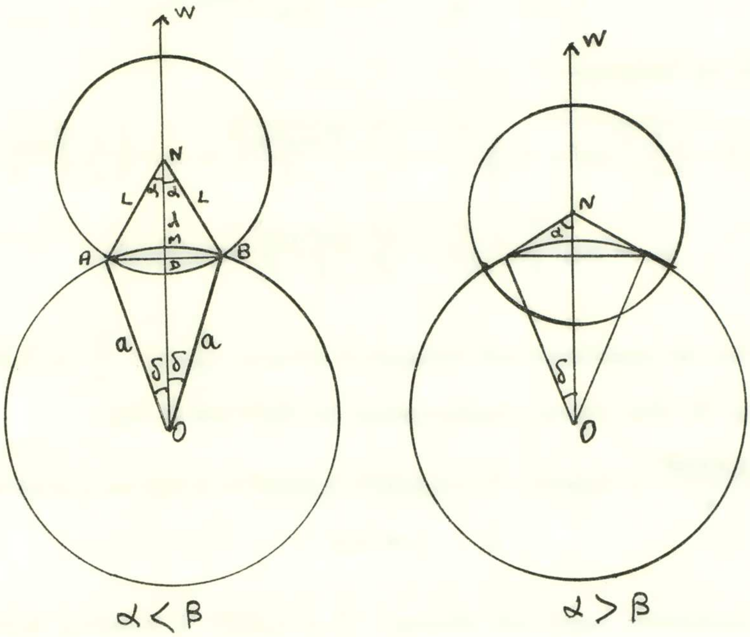
Ἐκ τοῦ $\bar{\alpha}$ λαμβάνομεν τὴν ἀπόστασιν $\bar{\lambda}$ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον: $\bar{\lambda} = L\cos\bar{\alpha}$.

Ἡ γωνία $\bar{\alpha}$ μᾶς ὁρίζει τὸ $\bar{\lambda}$ καὶ $\sigma_{\bar{\alpha}}$, δηλαδὴ τὰς συνθήκας κρούσεως τῶν μορίων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι διὰ σταθερὰν θερμοκρασίαν ($L = C^{te}$) μᾶς ὁρίζει τὴν ἀσκουμένην πίεσιν, ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ πίεσις αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος a τῆς ἐπιφανείας. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὸ $\bar{\alpha}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ a.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ἰδιαιτέρως τὴν περίπτωσίν μας.

3.3. Μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς νοητῆς σφαίρας N ἀπὸ μίαν σφαῖραν (O, a) (σχῆμα 4). Ἐὰν β εἶναι ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ γωνία α ὅταν αἱ ἀκτῖνες NA καὶ NB εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (O, a):

$$\widehat{OAN} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{L}, \quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{L}{a}. \tag{3.10}$$



Σχ. 4.

Περιοριζόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν: α < β (σχ. 4), καὶ $\frac{L}{a} < 0{,}514$ ἢ

$$\operatorname{cotg} \bar{\alpha} > \operatorname{cotg} \beta, \qquad 0 < (\bar{\alpha}, \beta) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{\alpha} < \beta$$

ὁπότε:
$$\lambda = MN = ND - MD = ND - a + OD \tag{3.11}$$

ἀλλὰ $\quad ND = L\cos\alpha\,, \quad OD = a\cos\delta = a\sqrt{1-\sin^2\delta} = a\sqrt{1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\sin^2\alpha}$

καὶ τὸ (3.11) γράφεται:

$$\lambda = L\cos\alpha - a\left[1 - \sqrt{1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\sin^2\alpha}\right]. \tag{3.12}$$

Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα AMB τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ λ εἶναι:

$$\sigma_\alpha = 2\pi a^2(1-\cos\delta) = 2\pi a^2\left[1 - \sqrt{1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\sin^2\alpha}\right]. \tag{3.13}$$

Ἐάν :

$$\left(\frac{L}{a}\right)^4 \frac{\sin^4\alpha}{4} \leqslant 1-\left(\frac{L}{a}\right)^2 \sin^2\alpha \qquad (3.13\alpha)$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\sqrt{1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\sin^2\alpha} = \sqrt{\left[1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\frac{\sin^2\alpha}{2}\right]^2} = 1-\left(\frac{L}{a}\right)^2\frac{\sin^2\alpha}{2}$$

καὶ

$$\sigma_\alpha = 2\pi a^2\left[1-\left(1-\frac{L^2}{a^2}\,\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)\right] = \pi L^2\sin^2\alpha. \qquad (3\ 14)$$

Εἰδικῶς διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ συνημμένου πίνακος ἔχομεν : $\frac{L}{a} \leqslant 0{,}3137$ καὶ ἡ ἀνισότης (3. 13α) γίνεται, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ (3. 9α) :

$$0{,}3137^4\,\frac{0{,}8899^4}{4} = 0{,}0015, \quad 1-0{,}3137^2\cdot 0{,}8899^2 = 0{,}922 \Longrightarrow 0{,}0015 \leqslant 0{,}922$$

$$\text{ἢ} \quad 1 \leqslant 614$$

διὰ τὰς ὑπολοίπους τιμὰς τοῦ πίνακος: $\frac{L}{\alpha} < 0{,}3137$ ἡ ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον.

Ἑπομένως διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθὼς καὶ διὰ a ἀκόμη μεγαλύτερον, δεχόμεθα τὴν ταυτότητα τῶν σχέσεων (3. 7) καὶ (3. 14). Ἐφόσον λοιπὸν ἰσχύει ἡ παρατήρησις τῆς παραγράφου 3. 2 ὅτι τὸ $\bar{\alpha}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος, εὑρίσκομεν τὴν πιθανωτέραν ἀπόστασιν τοῦ N ἀπὸ τὴν σφαῖραν ἐκ τοῦ $\bar{\alpha} = 62^0{,}8$ καὶ τῆς σχέσεως (3. 12):

$$\bar{\lambda} = 0{,}45608\,L - a\left[1-\sqrt{1-0{,}79198\left(\frac{L}{a}\right)^2}\right]. \qquad (3.15)$$

3. 4. Θέτομεν: $\xi = \frac{2{,}25}{a}\bar{\lambda}$ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (3. 15) λαμβάνομεν:

$$\xi = 1{,}026\,\frac{L}{a} - 2{,}25\left[1-\sqrt{1-0{,}79198\left(\frac{L}{a}\right)^2}\right]. \qquad (3.16)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (3. 1) θέτομεν $w_1' = \bar{\lambda}$ καὶ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὴν (3. 16):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial w'}\right)_1 = -\frac{2{,}25}{a}\,V\sin\gamma\cdot e_N^{-\xi}. \qquad (3.17)$$

Ἀντικαθιστῶντας τὴν (3. 17) εἰς τὴν (2. 5) καὶ ὁλοκληρώνοντας ἀπὸ O ἕως π

$$\left.\begin{aligned} F &= -2\pi\eta a^2\int_0^\pi \sin^2\gamma\left[-\frac{2{,}25}{a}V\sin\gamma\, e_N^{-\xi}\right]d\gamma = 4{,}5\pi\eta a V e_N^{-\xi}\int_0^\pi \sin^3\gamma\cdot d\gamma, \\ &\int_0^\pi \sin^3\gamma\cdot d\gamma = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{F = 6\pi\eta a V e_N^{-\xi}} \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

εἶναι ὁ γενικευμένος τύπος τοῦ Stokes δι' ἀσυνεχῆ ῥευστά.

4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ (3. 18)

4. 1. Ἐφαρμόζοντας τὸν τύπον (3. 18) εἰς τὰς μετρήσεις Milikan, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δεδομένα τῆς σημειώσεως I, ὁ παράγων διορθώσεως γίνεται e_N^{ξ} ἀντὶ $\left(1 + A\frac{L}{a}\right)$ καὶ ὅτι ὁ δεύτερος (τοῦ Milikan) ἀποτελεῖ προσέγγισιν τοῦ πρώτου.

Πράγματι ἐὰν $\frac{L}{a} \ll 1$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$e_N^{\xi} = 1 + \xi \quad (4.1)$$

$$\xi = 1{,}026\frac{L}{a} - 2{,}25\left[1 - \sqrt{1 - 0{,}79198\left(\frac{L}{a}\right)^2}\right] \approx$$

$$\approx 1{,}026\frac{L}{a} - \left[1 - \left(1 - \frac{0{,}79198}{2}\frac{L^2}{a^2}\right)\right]2{,}25$$

καὶ
$$1 + \xi = 1 + 1{,}026\frac{L}{a} - 0{,}89\left(\frac{L}{a}\right)^2. \quad (4.2)$$

Ἵνα δυνηθῶμεν νὰ συγκρίνωμεν τὴν (4. 2) μὲ τὴν συνάρτησιν $\left(1 + A\frac{L}{a}\right)$ πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν, κατὰ προσέγγισιν, εἰς τὴν (4. 2) τὸν ὅρον δευτέρου βαθμοῦ δι' ἑνὸς πρώτου, καὶ τοῦτο ἐντὸς τῶν πλαισίων τῶν ἐν λόγῳ μετρήσεων.

Ὁ μέσος ὅρος τοῦ $\left(\frac{L}{a}\right)^2$ ἐκ τοῦ συνημμένου πίνακος εἶναι:

$$\overline{\left(\frac{L}{a}\right)^2} = 0{,}0295 \quad \text{καὶ} \quad \overline{\left(\frac{L}{a}\right)} = \sqrt{0{,}0295} = 0{,}171.$$

Ἡ (4. 2) γράφεται λοιπόν, κατὰ προσέγγισιν, ἐντὸς τῶν πλαισίων Milikan

$$1+\xi = 1+\left[1{,}026-0{,}89\left(\sqrt{\frac{L}{a}}\right)\right]\frac{L}{a} = 1+(1{,}026-0{,}89\times 0{,}171)\,\frac{L}{a} =$$

$$= 1+0{,}784\,\frac{L}{a}$$

ἤτοι ἔχομεν:

$$e_N^{\xi} \approx 1+0{,}874\,\frac{L}{a}\,.$$

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ὅμιλος ἐρευνητῶν Milikan προσδιώρισε διὰ τὴν σταθερὰν A τιμὰς ἀπὸ 0,8592 ἕως 0,9626 κατὰ τὰς τελευταίας μετρήσεις του, κατὰ δὲ τὴν σειρὰν τῶν 58 μετρήσεών του προσδιώρισε διὰ τὸ A τὴν μέσην τιμὴν $\bar{A} = 0{,}874$, ἐξ οὗ ἡ συνάρτησις:

$$1+f = 1+0{,}874\,\frac{L}{a}\,.$$

4. 2. Εἰς δευτέραν προσέγγισιν ἐὰν $\frac{L}{a} \rightarrow 0$ ἔχομεν $\xi \rightarrow 0$ καὶ $e_N^{-\xi} \rightarrow 1$ ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέσις (3. 18) μᾶς δίδει τὸν νόμον τοῦ Stokes.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ὁ καθαρῶς θεωρητικὸς νόμος τοῦ Stokes ἰσχύει διὰ κίνησιν σφαιριδίου ἐντὸς μέσου συνεχοῦς μορφῆς. Ἐὰν λοιπὸν ἐπεκτείνομεν τὸν νόμον τοῦτον καὶ δι' ἀσυνεχὲς μέσον τότε λαμβάνομεν ἕναν γενικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος διὰ διαδρομὴν μορίων τείνουσαν πρὸς τὸ μηδὲν μᾶς δίδει τὸν γνωστὸν τύπον συνεχῶν ρευστῶν.

Ὅπως ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς παραγράφου 4 ὁ θεωρητικὸς τύπος (3. 18), γραφόμενος κατὰ προσέγγισιν διὰ $\frac{L}{a} \leqslant 1$ μᾶς δίδει τὸν ἐμπειρικὸν τύπον τοῦ Milikan, ἐντὸς τῶν πλαισίων τῶν μετρήσεών του, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται πειραματικῶς ἐπαληθευθείς.

Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι ὁ τύπος, τῆς παρούσης ἐργασίας, ὡς γενικὸς καὶ θεωρητικός, στερούμενος σφαλμάτων μετρήσεων, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΞ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ «MILIKAN»

α/α	$\frac{L}{a}$	$\left(\frac{L}{a}\right)^2$	$e_1^{2/3}\times 10^8$	$e^{2/3}\times 10^8$	A	$e_1\times 10^{10}$	$e\times 10^{10}$
1	0,04111	0,00169	63,21	61,03	0,868	5,025	4,767
2	0,04115	0,00169	63,204	61,03	0,865	5,024	4,768
3	0,0409	0,00167	63,54	61,16	0,951	5,049	4,783
4	0,06205	0,00385	64,27	60,97	0,872	5,151	4,760
5	0,06484	0,0042	64,63	61,21	0,861	5,195	4,788
6	0,06502	0,00422	65,02	61,19	0,9626	5,242	4,786
7	0,07329	0,00537	65,07	61,20	0,862	5,249	4,787
8	0,07608	0,00578	65,13	61,11	0,864	5,256	4,777
9	0,07850	0,00616	65,19	61,05	0,863	5,263	4,770
10	0,07680	0,00589	65,21	61,16	0,862	5,266	4,783
11	0,1078	0,01162	66,70	61,01	0,865	5,447	4,765
12	0,1146	0,01313	67,12	61,07	0,864	5,499	4,772
13	0,1114	0,0124	67,14	61,26	0,861	5,501	4,794
14	0,1477	0,02181	68,90	61,11	0,863	5,719	4,777
15	0,1437	0,02064	68,97	61,39	0,8592	5,728	4,810
16	0,1630	0,0265	69,88	61,27	0,862	5,841	4,795
17	0,1878	0,03526	70,85	60,94	0,865	5,963	4,757
18	0,2014	0,04056	71,60	60,98	0,864	6,058	4,761
19	0,2297	0,05276	73,34	61,20	0,863	6,280	4,787
20	0,2472	0,0611	74,27	61,22	0,862	6,400	4,790
21	0,2570	0,066	74,54	60,97	0,866	6,439	4,760
22	0,2659	0,0707	75,00	60,97	0,865	6,495	4,760
23	0,2724	0,0742	75,62	61,24	0,862	6,575	4,792
24	0,2781	0,0773	75,92	61,24	0,861	6,615	4,792
25	0,3137	0,0984	77,74	61,18	0,862	6,854	4,785

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ι

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΕΛΑΙΟΥ

Ὁ Ἀμερικανὸς καθηγητὴς Robert - Andrew - Milikan, ἀπὸ τὸ 1908 ἕως τὸ 1917, ἐπανέλαβε τὰς ἐργασίας του εἰς τὰ ἐργαστήρια Ryerson τοῦ Chicago διὰ τὸν ἀπ' εὐθείας προσδιορισμὸν τοῦ φορτίου τοῦ ἠλεκτρονίου.

Ἡ μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν ἰσορρόπησιν ἰονισμένων σταγονιδίων ἐλαίου ἐντὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, καθὼς καὶ ἡ μέτρησις τῆς ταχύτητός των εἰς ἐλευθέραν πτῶσιν. Ὁ νόμος τοῦ Sir George Stokes μᾶς δίδει τὰς σχέσεις:

$$Ee_n - mg = 6\pi\eta a v_2 , \qquad (\Sigma I.\ 1)$$

$$mg = 6\pi\eta a v_1 \qquad (\Sigma I.\ 2)$$

ὅπου τὸ n ὡς δείκτης σημαίνει ὅτι ἡ σταγὼν συνέλεξε n ἰόντα.

Ἐκ τῶν σχέσεων (ΣΙ. 1) καὶ (ΣΙ. 2) λαμβάνομεν:

$$\frac{mg}{Ee_n - mg} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{ἢ} \quad e_n = \frac{mg}{E} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1} \qquad (\Sigma I.\ 3)$$

ὅπου:

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 (\sigma - \varrho) . \qquad (\Sigma I.\ 4)$$

Ἐκ τῶν (ΣΙ. 2) καὶ (ΣΙ. 4) ἐξάγομεν:

$$v_1 = \frac{2}{9}\,\frac{ga^2}{\eta}(\sigma - \varrho) \qquad (\Sigma I.\ 5)$$

καί:

$$a = \left(\frac{9\eta}{2g(\sigma - \varrho)}\right)^{1/2} v_1^{1/2} . \qquad (\Sigma I.\ 6)$$

Ἐν συνεχείᾳ εἰς τὰς σχέσεις (ΣΙ. 3), (ΣΙ. 4) καὶ (ΣΙ. 6), θέτομεν $v_2 = 0$ (ἰσορροπία), καὶ μᾶς δίδουν:

$$e_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{9\eta}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{g(\sigma - \varrho)}\right)^{1/2} \cdot \frac{v_1^{3/2}}{E} . \qquad (\Sigma I.\ 7)$$

Τὰ ἀποτελέσματα πολλῶν μετρήσεων ἔδειξαν εἰς τὸν ἐρευνητήν, ὅτι ὅλα τὰ μετρηθέντα e_n ἔχουν ἕνα κοινὸν διαιρέτην e_1, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου. Ὁ τύπος ὁ δίδων τὸ e_1 ἔχει τὴν μορφὴν (ΣΙ. 7).

Ἀλλὰ καθὼς ἐμφαίνεται εἰς τὸν συνημμένον πίνακα τὸ e_1 μεταβάλλεται μὲ τὸ a, διότι αἱ σχέσεις (ΣΙ. 1) καὶ (ΣΙ. 2) εἶναι ἀκριβεῖς μόνον ὅταν αἱ διαδρομαὶ τῶν μορίων ἀέρος εἶναι ἀμελητέαι ὡς πρὸς a. Καθὼς ὅμως δὲν συμβαίνει τοῦτο ὁ καθηγητὴς ὡδηγήθη εἰς τὴν ἀνάγκην εἰσαγωγῆς μίας συναρτήσεως $f\left(\frac{L}{a}\right)$, ἀγνώστου μορφῆς, πρὸς διόρθωσιν τῆς σχέσεως (Σ I. 5) εἰς:

$$v_1 = \frac{2}{9}\frac{ga^2}{\eta}(\sigma-\varrho)\left[1+f\left(\frac{L}{a}\right)\right] \qquad (\Sigma\,I.\,8)$$

ἀναπτύσσοντας τὴν $f\left(\frac{L}{a}\right)$ εἰς: $f = A\frac{L}{a} + B\left(\frac{L}{a}\right)^2 + C\left(\frac{L}{a}\right)^3 + \cdots\cdots$

ὁ καθηγητὴς ἠρκέσθη, κατὰ προσέγγισιν, εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, ἤτοι:

$$1+f = 1+A\frac{L}{a} \quad \text{καὶ} \quad v_1 = \frac{2}{9}\frac{ga^2}{\eta}(\sigma-\varrho)\left(1+A\frac{L}{a}\right). \qquad (\Sigma\,I.\,9)$$

Ἐκ τῶν (Σ I. 7) καὶ (Σ I. 9) λαμβάνομεν:

$$e^{2/3} = \frac{e_1^{2/3}}{\left(1+A\frac{L}{a}\right)} \qquad (\Sigma\,I.\,10)$$

θεωρῶντας εἰς πρώτην προσέγγισιν ἀκριβῆ τὸν νόμον τοῦ Stokes, καὶ προσδιορίζοντας τὸ A πειραματικῶς, δηλαδὴ μὲ σφάλμα μετρήσεως.

RÉSUMÉ

La loi de Stokes exprime la résistance de frottement, opposée par un fluide continu, a une sphére en mouvement.

Dans le présent travail, j'ai cherché, par voie théorique, une expression générale de cette loi qui soit valable pour des milieux discontinus.

Afin de vérifier expérimentalement cette expression, je l'ai comparée, sous une forme approximative, avec l'expression empirique de correction de la loi de Stokes, imaginée par Milikan pour la mesure de la charge de l'électron. Alors j'ai constaté l'identité de ces deux expressions, malgré que la premiére est purement théorique, basée sur des lois probabilistiques et ainsi depourvue d'erreur de mesure.
