ἤδη παρὰ τῷ Γλυκᾷ καὶ Προδρόμῳ, συγγραφεῦσι τοῦ ΙΒ' αἰῶνος, εὑρίσκομεν φράσεις οἷον (Γλυκᾶ 167) *ἂς τὸν ἐκέρδησες, ἂς τὸν ἐχάρῃς, ἂς εἶδες*, καὶ (Προδρ. Α' 164 κ. ἑξ.). *ἂς ἐκάθου*... καὶ *ἂς ἔκνηθες* τὴν *λέπραν σου καὶ ἂς ἤφινες ἐμένα, ἂς ἔλαβες ὁμοίαν σου καπήλου θυγατέραν, καὶ ἂς ἐγινόμην ἔπαρχος κἂν 15 ἡμέρας* κλπ.

Οὕτω διὰ τῆς βοηθείας τῶν στοιχείων τούτων, τοῦ *θὰ* καὶ τοῦ *ἂς* ἐσχηματίσαμεν δύο νέας ἐγκλίσεις, τὴν μὲν δηλωτικὴν τοῦ κατ' εἰκασίαν, ὑπόνοιαν καὶ φόβους τοῦ λέγοντος, τὴν δὲ τοῦ ἐπιτετραμμένου, ἐλεύθερον εἶναι, οὐ κωλύεσθαι, ὅθεν καὶ προτροπῆς, προσταγῆς κλπ.

SUR LA THÉORIE DE LA GÉNÈSE DES GAMMES DIATONIQUES[1]

PAR M. **CONST. MALTÉZOS**

Toute gamme diatonique à intervales rationnels, possèdant les premiers intervales consonnants $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$, doit avoir un nombre impaire d'intervales consecutifs $a_1, a_2, \dots a_{2n+1}$. On en conclue que $a_{n+1} = \frac{9}{8}$; une telle gamme possède donc l'intervale $^9/_8$.

Cherchons, en premier lieu, toutes ces gammes *théoriquement possibles*, qui ont deux intervales toniques inégaux, dont l'un $^9/_8$.

On aura

$$(1) \quad \left(\frac{9}{8}\right)^m d^r = 2,$$

où m et r désignent des nombres entiers positifs, satisfaisant la relation

$$(2) \quad m + r = 2n + 1,$$

d'où

$$(3) \quad d = \sqrt[r]{\frac{2^{3m+1}}{3^{2m}}}$$

Pour que l'intervale d soit rationnel, on doit avoir simultanément

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{3m+1}{r} = k \text{ (entier)} \\[2ex] \dfrac{2m}{r} = \lambda \text{ (entier)} \end{cases}$$

En tenant compte de la relation (2), nous trouvons la condition mathématique de la possibilité d'une telle gamme

$$(5) \quad (2n+1)k - (3n+2)\lambda = 1.$$

[1] ΚΩΝΣΤ. ΜΑΛΤΕΖΟΥ. — Ἐπὶ τῆς θεωρίας τῆς γενέσεως τῶν διατονικῶν κλιμάκων.

Les solutions de cette équation doivent, en plus, donner des intervales *musicalement tolérés.*

Pour $n=1$, nous trouvons une seule solution possible, donnant $d=\frac{4}{3}$ c.-à-d. la gamme archaïque grecque à quatre notes.[1]

Pour $n=2$, nous trouvons la seule gamme possible, satisfaisant les conditions posées, la gamme d'Olympe ou Gaélique.[2]

Pour $n=3$, nous trouvons comme seule[3] gamme diatonique possible la pythagoricienne.

Cherchons, en second lieu, les solutions possibles pour les gammes possédant trois intervales toniques inégaux, dont l'un égal à $^9/_8$, et les deux autres d_1, d_2. En remarquant qu'on aura $a_{n+1}=\frac{9}{8}$, les deux moitiés de la gamme seront symétriques, et l'on aura l'équation

$$(6) \qquad \left(\frac{9}{8}\right)^m (d_1\, d_2)^r = 2$$

avec

$$(7) \qquad m+2r=2n+1.$$

En procédant comme précédemment, nous arrivons à l'équation de la possibilité mathématique d'une telle gamme

$$(8) \qquad (2n+1)\,k-(3n+2)\,\lambda=2$$

les k, λ devant aussi désigner des nombres entiers et positifs.

Pour $n=2$, nous trouvons $d_1 . d_2=\frac{4}{3}$; ils existent donc des solutions *théoriquement possibles* en nombre infini. Des telles gammes, présentant un certain intérêt, sont les suivantes:

$\left(d_1=\frac{5}{4}, d_2=\frac{16}{15}\right)$, $\left(d_1=\frac{6}{5}, d_2=\frac{10}{9}\right)$, $\left(d_1=\frac{27}{25}, d_2=\frac{100}{81}\right)$. Ces solutions n'ont pas été mis, paraît-il, en usage, excepté la seconde qui est celle que

[1] Voir ma note précédente sur les gammes diatoniques p. 105.

[2] Loc. cit. p. 105.—La gamme diatonique archaïque des tuyaux sonores, des Chinois, ne contient pas l'intervale $\frac{4}{3}$, et se trouve ainsi hors du cadre proposé.

A remarquer qu'on aurait une autre gamme musicalement possible, mais avec l'intervale d irrationnel. C'est une gamme ayant l'intervale de la quarte-quinte égal à $^9/_8$, et les quatre autres toniques égaux entre eux et à $\sqrt{\frac{4}{3}}=1,1547$, avec le demi-ton 1,0746.

[3] A remarquer qu'on pourrait avoir deux autres gammes musicalement possibles, mais avec un intervale irrationnel; ce sont, l'une à trois intervales toniques égaux à $^9/_8$ et quatre égaux à $\sqrt{\frac{32}{27}}=1,08866$; l'autre à un intervale égal à $^9/_8$ et tous les autres égaux à $\sqrt[3]{^4/_3} \simeq \frac{11}{10}$.

nous avons trouvé comme la gamme archaïque des instruments à corde chinois[1], la même des Assyrobabyloniens[2], et l'une des anciens Égyptiens[3].

Pour $n=3$, l'équation (8) devient

$$(9) \quad 7k - 11\lambda = 2,$$

dont les solutions entières et positives sont

$$(10) \quad \begin{cases} k = 5 + 11\omega, \\ \lambda = 3 + 7\omega, \end{cases}$$

avec $\omega = 0, 1, 2, \ldots$

Pour $\omega = 0$, on a $d_1 . d_2 = \frac{32}{27}$; il y a donc une infinité des solutions théoriques possibles, dont celles connues jusqu'à présent et contenant l'intervale $^9/_8$ sont données dans la première partie de notre Mémoire; et nous savons que pour la plus naturelle de ces gammes on a $d_1 = \frac{10}{9}$, $d_2 = \frac{16}{15}$.

Le nombre de ces gammes est limité musicalement par la valeur du plus petit intervale, qui ne doit pas être très éloigné du demi-ton, ou, au plus, ne doit pas être inférieur de la dièse enharmonique[4].

Pour $\omega = 1$ on a $d_1\, d_2 = \frac{2^{16}}{3^{10}} = 1{,}1098 \simeq \frac{10}{9}$. Ces gammes possèdent les cinq intervales toniques égaux à $^9/_8$ et les deux autres égaux à demi-tons, inégaux entre eux, mais peu différents. A ces gammes appartient la gamme classique des tuyaux sonores des Chinois[5], dans laquelle les deux demi-tons, comme nous avons vu, sont respectivement égaux à 1,0515 et à 1,068, c.-à-d. aux deux demi-tons pythagoriciens (le λεῖμα et l' ἀποτομή).

Pour $\omega \overline{\gtrless} 2$, il n'existe pas de solution.

Parmi les solutions mentionnées plus haut ne sont pas rangées celles qui ne contiennent pas la qninte, p.ex. celle d'Aristoxène, celle du genre diatonique mou de Ptolémée, celle de Chrysanthe, la gamme que je crois

[1] L. c. p. 109.

[2] L. c. p. 109.

[3] L. c. p. 109.

[4] Je crois digne d'une mention spéciale la gamme *harmonique* suivante

$$1 \quad \frac{8}{7} \quad \frac{9}{7} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{12}{7} \quad \frac{27}{14} \quad 2,$$

dont les intervales toniques sont: le majeur $^8/_7$ (proposé par Archytas), le mineur $^9/_8$ et le plus petit $\frac{28}{27}$ est égal presque à $\sqrt[19]{2}$. Dans cette gamme l'octave peut-être divisée, à la mode tempérée, en 19 parties égales, le majeur en contenant quatre et le mineur trois parties; elle en contient presque la dièse enharmonique pythagoricienne.

[5] L. c. p. 108.

être l'archaïque Hindoue et celle que je crois être celle des instruments à corde chinois. Mais, nous pouvons régarder la plupart de ces gammes à part comme composées de deux tetracordes, donnant la quarte, disjoints par l'intervale $^9/_8$, sans le contenir.

Un tel système se réduit, en dernier lieu, à une gamme possédant quatre intervales toniques inégaux. Et, si cette gamme est à huit notes, on aura $d_1 . d_2 . d_3 = \frac{4}{3}$, où aucun des d n'est exactement égal à $^9/_8$, mais l'un au moins de celles-ci doit différer du $^9/_8$ d'un intervale moindre du comma acoustique.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ ἀνακοινώσει παρέχω μαθηματικὴν θεωρίαν τῆς γενέσεως τῶν διατονικῶν κλιμάκων καὶ ἀναζητῶ πάσας τὰς δυνατὰς θεωρητικῶς μουσικὰς κλίμακας, τὰς παρεχούσας τὰς συμφωνίας $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$, καὶ ἐχούσας πρῶτον τρία, δεύτερον πέντε, τέλος ἑπτὰ τονιαῖα διαστήματα. Ἀνευρίσκω δέ, πλὴν ἄλλων, πάσας τὰς γνωστὰς ἱστορικῶς μουσικὰς κλίμακας, ὡς καὶ τὰς ἐπὶ πλέον ἀνευρεθείσας ὑπ' ἐμοῦ ἐν τῇ πρώτῃ ἀνακοινώσει. Εἰς τὰς οὕτω θεωρητικῶς εὑρισκομένας κλίμακας, προφανῶς δὲν κατατάσσονται αἱ μὴ περιέχουσαι ἀκριβῶς τὴν πέμπτην, οἷαι ἡ τοῦ ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ, ἡ τοῦ μαλακοῦ διατονικοῦ γένους τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ, ἡ τοῦ ΧΡΥΣΑΝΘΟΥ, ἡ κλῖμαξ τὴν ὁποίαν ἐκάλεσα ἀρχαϊκὴν τῶν Ἰνδῶν καὶ ἐκείνη τὴν ὁποίαν νομίζω οὖσαν τῶν ἐγχόρδων ὀργάνων τῶν Σινῶν, περὶ ὧν ἀνέφερον ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀνακοινώσει. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὰς πλείστας τούτων ὡς συντιθεμένας ἐκ δύο τετραχόρδων μὴ ἐχόντων τονιαῖον διάστημα τὸ $\frac{9}{8}$, διεζευγμένων ὅμως κατὰ τὸ $\frac{9}{8}$.

Τοιοῦτο σύστημα τελειωτικῶς ἀνάγεται εἰς κλίμακα ἔχουσαν τέσσαρα τονιαῖα διαστήματα ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἡ κλῖμαξ αὕτη εἶνε ὀκτώηχος, θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον $d_1 . d_2 . d_3$ ἴσον πρὸς $\frac{4}{3}$, ἔνθα οὐδὲν τῶν διαστημάτων d ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς $\frac{9}{8}$, ἀλλ' ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ $\frac{9}{8}$ ὀλιγώτερον τοῦ ἀκουστικοῦ κόμματος.