ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 17ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1994

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗ ΔΙΑΝΝΕΛΙΔΗ

ΧΑΟΣ — FRACTALS — ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ὁ σκοπὸς τῆς σημερινῆς ὁμιλίας εἶναι νὰ δοθεῖ στὸν ἀκροατὴ (καὶ ἀργότερα στὸν ἀναγνώστη) μιὰ γενικὴ εἰκόνα τῶν ἐννοιῶν ποὺ εὑρίσκονται στὴ βάση τῶν θεωριῶν τοῦ «Χάους», τῶν «Fractals» καὶ τῶν «Δυναμικῶν Συστημάτων».

Θὰ καταβληθεῖ προσπάθεια, μεταξὺ ἄλλων, νὰ παρουσιασθεῖ τὸ θέμα στὴν καλῶς ἐννοούμενη ἐκλαϊκευμένη μορφή του, καθόσον ἐκλαϊκεύσεις οἱ ὁποῖες συχνὰ ἐπιχειροῦνται διὰ τῶν μέσων μαζικῆς ἐνημερώσεως ἐπιφέρουν τὸ ἀντίθετο ἀπὸ τὸ ἐπιδιωκόμενο ἀποτέλεσμα.

Θὰ ἦταν χρήσιμο στὸν ἀναγνώστη, ἡ σημερινὴ ὁμιλία νὰ συσχετισθεῖ μὲ προγενέστερη ὁμιλία μου (22-11-1988, Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, Τόμ. 63, 1988) μὲ τίτλο «Ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals» ὅπου εἶχα παρουσιάσει τὶς εἰσαγωγικὲς ἔννοιες τῆς γεωμετρίας αὐτῆς χωρὶς νὰ ἀναφερθῶ στὶς θεωρίες τοῦ Χάους καὶ τῶν Δυναμικῶν Συστημάτων. Σήμερα θὰ προσπαθήσω νὰ δείξω τὴν σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ «Χάους», τῶν Fractals καὶ ἄλλων κλάδων τῶν μαθηματικῶν, καθὼς ἐπίσης τὴν ὑπάρχουσα σχέση μεταξὺ τῶν θεωριῶν αὐτῶν καὶ διαφόρων φυσικῶν φαινομένων.

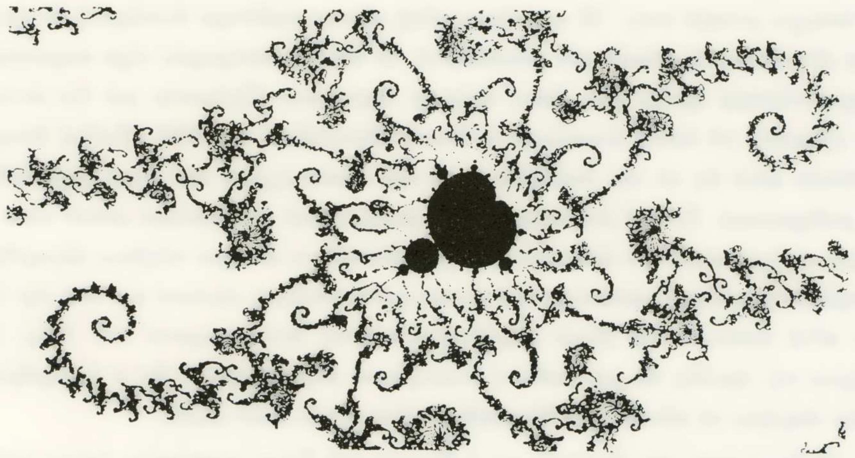
Οἱ ἐν λόγῳ θεωρίες ἔχουν προκαλέσει τὸ ζωηρὸ ἐνδιαφέρον καὶ τὸν ἐνθουσιασμὸ τοῦ εὐρύτερου κοινοῦ. Αὐτές, τὸν μὲν σπουδαστὴ τὸν μεταφέρουν ἀπὸ τὸν χῶρο *τῆς ἀρχαίας ἱστορίας στὸν 21ο αἰώνα, εἰς δὲ τὸν ὥριμο ἐπιστήμονα προσφέρουν ἕνα κατάλληλο καὶ πλούσιο περιβάλλον γιὰ τὴ διερεύνηση καὶ τὴν ἐπὶ μέρους κατασκευὴ προτύπων (modeling) τῆς πολύπλοκης ὑφῆς τῆς φύσης.*

Ἕνας ἀπὸ τοὺς λόγους, ὄχι ὁ σπουδαιότερος, γιὰ τοὺς ὁποίους οἱ νέες αὐτὲς περιοχὲς ἔρευνας τῶν μαθηματικῶν ἀσκοῦν μιὰ ἔντονη γοητεία στὸ κοινὸ εἶναι ὅτι ἔχουν δημιουργήσει εἰκόνες μὲ τέτοιο δυναμισμὸ ὥστε νὰ ἀποτελέσουν, οἱ εἰκόνες αὐτές, μιὰ σειρὰ ἐκθέσεων τὶς ὁποῖες πραγματοποίησε τὸ Goethe Institute καὶ οἱ ὁποῖες στέφθηκαν μὲ μεγάλη ἐπιτυχία. Θὰ ἀναφέρω μόνο τὴν ἔκθεση στὸ London Museum of Science, μὲ τίτλο: Frontiers of Chaos: Images of Complex Dynamical Systems.

Ἡ ἔκθεση προσείλκυσε περισσότερους ἀπὸ 140.000 ἐπισκέπτες. Ἀπὸ τὸ 1985 καὶ πέραν ἡ ἔκθεση ταξίδεψε σὲ περισσότερες ἀπὸ 100 πόλεις καὶ σὲ περισσότερες ἀπὸ 30 χῶρες στὸν κόσμο.

Ὅμως ὁ σπουδαιότερος λόγος γιὰ τὴν γοητεία ποὺ ἀσκοῦν ἡ Θεωρία τοῦ Χάους καὶ ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals, εἶναι ὅτι αὐτὲς διόρθωσαν - ἄλλαξαν τὴν ἐπικρατοῦσα μέχρι σήμερα ἀπηρχαιωμένη ἀντίληψη γιὰ τὸ Σύμπαν. Σχετικὰ μὲ τὴν ἀλλαγὴ αὐτὴ τῆς ἀντίληψης γιὰ τὸ Σύμπαν, ἂν καὶ θὰ ἐπανέλθομε ἀργότερα στὸ θέμα αὐτό, μποροῦμε συνοπτικὰ νὰ παρατηρήσομε τὰ ἑξῆς: Οἱ ἐπιτυχίες ποὺ μέχρι σήμερα εἶχαν σημειωθεῖ στὶς Θετικὲς Ἐπιστῆμες καὶ στὴν Τεχνολογία εἶχαν δημιουργήσει τὴν ἀπατηλὴ ἐντύπωση ὅτι ὁ ὑλικὸς κόσμος, στὸ σύνολό του, λειτουργοῦσε ὅπως ἕνας τεράστιος ὡρολογιακὸς μηχανισμὸς τοῦ ὁποίου οἱ νόμοι λειτουργίας δὲν ἦταν μὲν πλήρως γνωστοί, ἀνεμένετο ὅμως νὰ ἀνακαλυφθοῦν βῆμα πρὸς βῆμα. Ὁ ἄνθρωπος ἐπίστευε ὅτι ὅταν οἱ νόμοι αὐτοὶ θὰ γίνονταν πλήρως γνωστοί, τότε ἡ ἐξέλιξη ἢ ἡ ἀνάπτυξη τῶν διαφόρων συστημάτων θὰ μποροῦσε, θεωρητικὰ τουλάχιστον, νὰ προβλεφθεῖ μὲ ἀκρίβεια. Ἡ δημιουργηθεῖσα αὐτὴ πεποίθηση εἶχε ἐπιπλέον ἐνισχυθεῖ ἀπὸ τὴν συντελεσθεῖσα πρόοδο στὴν τεχνολογία τῶν ὑπολογιστῶν, στοὺς ὁποίους πολλοὶ εἶχαν ἐναποθέσει τὶς ἐλπίδες τους, ὅτι θὰ βοηθοῦσαν στὴν ἐπαλήθευση τῆς πεποιθήσεως αὐτῆς. Ὅμως σήμερα αὐτοὶ ἀκριβῶς οἱ ἐρευνητὲς οἱ ἐργαζόμενοι στὸν πυρήνα τῆς σύγχρονης ἐπιστήμης διακηρύσσουν ὅτι οἱ παραπάνω ἐλπίδες πρέπει νὰ θεωροῦνται ἀβάσιμες.

Ἕνα ἀπὸ τὰ συμπεράσματα ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὶς νέες αὐτὲς θεωρίες, οἱ ὁποῖες εὑρίσκονται ἀκόμα στὴν νεαρή τους ἡλικία, εἶναι ὅτι οἱ ἔννοιες «ἀπόλυτος ντετερμινισμὸς» καὶ «τυχαία μεταβολὴ» ὄχι μόνο δὲν ἀποκλείουν ἡ μία τὴν ἄλλη, ἀλλὰ μποροῦν νὰ συνυπάρχουν καὶ ὅτι ἡ συνύπαρξη αὐτὴ ἀποτελεῖ νόμο τῆς φύσης. Ἡ θεωρία τοῦ Χάους καὶ ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals ἀναφέρονται ἀκριβῶς στὸ θέμα αὐτὸ τῆς συνύπαρξης. Ὅταν ἐξετάζομε τὴν μεταβολὴ μιᾶς διαδικασίας ποὺ λαμβάνει χώραν



Τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot.

κατὰ τὴν διάρκεια μιᾶς χρονικῆς περιόδου, τότε χρησιμοποιοῦμε ὅρους καὶ ἔννοιες τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους. Ὅταν ὅμως μᾶς ἐνδιαφέρει περισσότερο ἡ δομὴ τῶν διαφόρων μορφῶν τὶς ὁποῖες ἀφήνει στὸ πέρασμά της μιὰ «χαοτικὴ διαδικασία», τότε χρησιμοποιοῦμε τὴν ὁρολογία τῆς Γεωμετρίας τῶν Fractals, ἡ ὁποία, γεωμετρία, εἶναι στὴν πραγματικότητα ἐκείνη, οἱ δομὲς τῆς ὁποίας προσδίδουν «τάξη» στὸ χάος.

Μὲ ἄλλα λόγια, γιὰ νὰ γίνομε πιὸ σαφεῖς, ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals εἶναι πρῶτ' ἀπ' ὅλα μιὰ νέα γλώσσα ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ περιγράψει, νὰ δώσει πρότυπα καὶ νὰ ἀναλύσει τὶς πολύπλοκες μορφὲς ποὺ παρατηροῦνται στὴ φύση, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι, ἐνῶ τὰ στοιχεῖα τῆς «παραδοσιακῆς γλώσσας», τῆς γνωστῆς δηλαδὴ Εὐκλείδειας Γεωμετρίας, εἶναι βασικὲς συγκεκριμένες μορφὲς ὅπως εἶναι οἱ εὐθεῖες, οἱ κύκλοι καὶ οἱ σφαῖρες, τὰ στοιχεῖα τῆς νέας γλώσσας δὲν προσφέρονται γιὰ ἀπ' εὐθείας παρατήρηση. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εἶναι οἱ ἀλγόριθμοι διὰ τῶν ὁποίων λαμβάνομε σχήματα καὶ δομὲς μόνο μὲ τὴν βοήθεια τῶν ὑπολογιστῶν. Ἐπιπλέον τὸ πλῆθος τῶν ἀλγοριθμικῶν αὐτῶν στοιχείων εἶναι ἀνεξάντλητα μεγάλο, καὶ εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ἱκανὰ νὰ μᾶς παρέξουν ἕνα ἰσχυρὸ περιγραφικὸ ἐργαλεῖο. Ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ γίνεται δυνατὴ ἡ ἐκμάθηση τῆς νέας αὐτῆς γλώσσας μπορεῖ κανεὶς νὰ περιγράψει, λ.χ. τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει ἕνα σύννεφο μὲ τὴν ἴδια εὐκολία ποὺ ἕνας ἀρχιτέκτων μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τὴν παραδοσιακὴ γεωμετρία, νὰ περιγράψει ἕνα κτίσμα.

Ἡ σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ Χάους καὶ τῆς Γεωμετρίας τῶν Fractals δὲν εἶναι καθόλου συμπτωματική. Ἀντιθέτως ἀποδεικνύει τὴν βαθειὰ συγγένεια ποὺ ὑπάρχει μεταξύ τους. Ἡ συγγένεια αὐτὴ γίνεται καλύτερα ἀντιληπτὴ ἂν προσεκτικὰ ἐξετάσομε τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot, τὸ ὁποῖο λεπτομερῶς εἶχα παρουσιάσει σὲ προγενέστερη ὁμιλία μου, ὅπως ἀνέφερα παραπάνω. Πρόκειται γιὰ ἕνα ἀντικείμενο (fractal) τὸ ὁποῖο ἀνεκάλυψε ὁ Benoit Mandelbrot τὸ 1980. Πολλοὶ θεωροῦν τὸ σύνολο αὐτὸ ὡς τὸ πιὸ πολύπλοκο καὶ πιὸ ὡραῖο σχῆμα ποὺ ποτὲ ἐμφανίσθηκε στὰ μαθηματικά. Τὸ πιὸ ἐντυπωσιακὸ χαρακτηριστικὸ τοῦ συνόλου αὐτοῦ εἶναι ὅτι μπορεῖ νὰ ἑρμηνευθεῖ ὅτι ἀποτελεῖ μιὰ ἐγκυκλοπαίδεια ἀπείρου πλήθους ἀλγορίθμων ὅτι πρόκειται γιὰ μιὰ καταπληκτικὰ ὀργανωμένη ἀποθήκη εἰκόνων καὶ ὑπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴ ἀποτελεῖ ἕνα ἔξοχο παράδειγμα τάξεως ποὺ ἐπικρατεῖ στὸ Χάος. Στὴ συνέχεια τῆς ὁμιλίας θὰ μᾶς δοθεῖ ἡ εὐκαιρία νὰ παρατηρήσομε ὅτι ὁ ἀλγόριθμος ὁ ὁποῖος παράγει τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot εἶναι παρὰ πολὺ ἁπλός.

Ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals καὶ ἡ Θεωρία τοῦ Χάους συνδέονται ἐπίσης μεταξύ τους καὶ μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι ἀρκετὲς ἀπὸ τὶς σύγχρονες ἀνακαλύψεις κατέστησαν δυνατὲς μόνο μὲ τὴν χρήση ὑπολογιστῶν. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἀξιολογούμενο ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς καὶ μὲ τὰ μέχρι σήμερα χρησιμοποιούμενα κριτήρια ἀποτελεῖ γιὰ ἄλλους μὲν ἕνα ἰσχυρὸ ἀνανεωτικὸ καὶ ἀπελευθερωτικὸ βῆμα πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐνῶ γιὰ ἄλλους ἀποτελεῖ δεῖγμα «ἐκφυλισμοῦ». Πάντως ὅπως καὶ ἂν ἔχει τὸ πράγμα ἕνα εἶναι βέβαιο, ὅτι ἡ ἱστορία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν ἔχει ἐμπλουτισθεῖ μὲ τὶς θεωρίες αὐτὲς μὲ ἕνα ἀπαραίτητο νέο κεφάλαιο. Ἂν ἐξετάσομε τὰ πράγματα πιὸ προσεκτικά, παρατηροῦμε ὅτι, οὐσιαστικά, ἡ Θεωρία τοῦ Χάους καὶ ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals, ἐξετάζουν τὸ πῶς ἀντιλαμβανόμαστε τὴν ἰσορροπία —καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν ἁρμονία καὶ τὴν τάξη— ποὺ ἐπικρατεῖ στὴν φύση καθὼς καὶ σὲ ἄλλες καταστάσεις, καὶ προσπαθοῦν νὰ δώσουν γιὰ πρώτη φορὰ ἕνα ὁλοκληρωμένο πρότυπο τὸ ὁποῖο νὰ περιλαμβάνει μιὰ ὄψη, ἔστω, τῆς πραγματικῆς πολυπλοκότητας τῆς φύσης.

Φαίνεται πολὺ πιθανὸ ὅτι οἱ νέες αὐτὲς μέθοδοι καὶ ὁρολογίες θὰ μᾶς ἐπιτρέψουν, παραδείγματος χάριν, νὰ ἀντιληφθοῦμε πολὺ καλύτερα τὶς οἰκολογικὲς καὶ κλιματολογικὲς μεταλλαγές, καὶ θὰ συντελέσουν στὴν ἀποτελεσματικότερη ἀντιμετώπιση ὁρισμένων ἐκ τῶν γιγαντιαίων προβλημάτων ποὺ ἀπασχολοῦν τὴν ἀνθρωπότητα.

Αὐτὰ εἶχα νὰ πῶ σχετικὰ μὲ τὴν συνοπτικὴ αἰτιολόγηση τοῦ γιατὶ οἱ θεωρίες τοῦ Χάους καὶ τῶν Fractals πιστεύεται ὅτι ἐπέφεραν διορθώσεις-ἀλλαγὲς στὴν μέχρι σήμερα ὑπάρχουσα εἰκόνα τῆς «πραγματικότητας», κάτι ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐπανάσταση στὸν χῶρο τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν. Σὲ τί ὅμως συνίστανται οἱ ἀλλαγὲς αὐτὲς τῆς εἰκόνας τῆς πραγματικότητας; Στὸ ἐρώτημα αὐτὸ καθὼς καὶ σὲ ἄλλα παρομοίας φύσεως σχετικὰ μὲ τὴν φιλοσοφία τῆς φύσης θὰ ἀναφερθοῦμε κάπως ἀναλυτικότερα στὴ συνέχεια.

Ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ ποὺ διακρίνει τὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες συνίσταται στὴν ἱκανότητα αὐτῶν νὰ συσχετίζουν τὸ αἴτιο μὲ τὸ αἰτιατό. Π. χ. χρησιμοποιώντας τοὺς γνωστοὺς νόμους τῆς βαρύτητας, ἀστρονομικὰ φαινόμενα ὅπως οἱ ἐκλείψεις ἢ οἱ ἐμφανίσεις κομητῶν μποροῦν νὰ προβλεφθοῦν χιλιάδες χρόνια πρίν. Ἡ πρόβλεψη ὅμως ἄλλων φαινομένων εἶναι πολὺ πιὸ δύσκολη. Λόγου χάριν ἂν καὶ οἱ κινήσεις τῆς ἀτμόσφαιρας ὑπακούουν στοὺς νόμους τῆς φυσικῆς, ἐξίσου ὅπως καὶ οἱ κινήσεις τῶν πλανητῶν, ἡ πρόβλεψη τοῦ καιροῦ εἶναι μᾶλλον προβληματική. Παραθέτω ἐν συντομία τὰ ἀναγραφόμενα σὲ ἕνα ἐνδιαφέρον ἄρθρο τῆς Encyclopedia Britannica (1990), σχετικὸ μὲ τὴν πρόβλεψη φαινομένων: «Ἀφοῦ οἱ ἐπιστήμονες μποροῦν καὶ προβλέπουν μὲ ἀκρίβεια τὶς παλίρροιες, καὶ συντάσσουν μάλιστα ἀκριβεῖς πίνακες γι' αὐτές, γιατί δυσκολεύονται τόσο πολὺ στὴν πρόβλεψη τοῦ καιροῦ; Ὁ κόσμος βέβαια ἔχει συνηθίσει στὴν διαφορὰ αὐτὴ καὶ δὲν ἐκπλήσσεται ὅταν ἡ καλοκαιρία ποὺ μᾶς ὑποσχέθηκε τὸ μετεωρολογικὸ δελτίο μετατρέπεται σὲ χιονοθύελλα, ἐνῶ κυριολεκτικὰ ἐπαναστατεῖ ὅταν ἀντὶ τῆς πλημμυρίδας ποὺ ὑπόσχεται ὁ σχετικὸς πίνακας ὑπάρξει ἄμπωτις. Θὰ πεῖτε, συνεχίζει ὁ ἀρθρογράφος, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ συστήματα εἶναι διαφορετικά. Ὁ καιρὸς εἶναι ἕνα ἐξαιρετικὰ πολύπλοκο φαινόμενο: ἐξαρτᾶται ἀπὸ δώδεκα καὶ παραπάνω ποσότητες ὅπως εἶναι ἡ θερμοκρασία, ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεση, ἡ ὑγρασία, ἡ ταχύτητα τοῦ ἀνέμου, ἡ νέφωση κ.ἄ. Ὅμως τὸ φαινόμενο τῆς παλίρροιας εἶναι ἁπλούστερο; Θεωρεῖται ὅτι εἶναι ἁπλούστερο μᾶλλον διότι μπορεῖ νὰ προβλεφθεῖ εὐκολότερα ἀπὸ τὸν καιρό. Στὴν πραγματικότητα τὸ σύστημα ποὺ παρέχει τὴν παλίρροια ἐξαρτᾶται καὶ αὐτό, ὅπως στὴν περίπτωση τοῦ καιροῦ, ἀπὸ πολλὲς μεταβλητὲς ὅπως εἶναι τὸ σχῆμα τῶν ἀκτῶν, ἡ θερμοκρασία τῆς θάλασσας, ἡ περιεκτικότητα αὐτῆς σὲ ἁλάτι, οἱ πιέσεις, τὰ ἐπιφανειακὰ κύματα, οἱ θέσεις τοῦ Ἥλιου καὶ τῆς Σελήνης κ.ἄ. Ὅμως οἱ μεταβλητὲς στὴν περίπτωση τῶν παλιρροιῶν ἀλληλοεπιδροῦν μεταξύ τους κατὰ τρόπο ποὺ μπορεῖ νὰ προβλεφθεῖ. Μὲ ἄλλα λόγια οἱ παλίρροιες εἶναι ἕνα φαινόμενο τάξεως, ἕνα φαινόμενο ντετερμινιστικό, ἐνῶ ὁ καιρὸς δὲν εἶναι. Στὴν περίπτωση τοῦ καιροῦ οἱ διάφορες μεταβλητὲς δροῦν μεταξύ τους κατὰ τρόπο ἄτακτο καὶ μὴ δυνάμενο νὰ προβλεφθεῖ. Ἤτοι ὁ καιρὸς ἀποτελεῖ ἕνα χαοτικὸ φαινόμενο».

Μιλᾶμε γιὰ τὸ ἀπρόβλεπτο τοῦ καιροῦ ὅπως ἀκριβῶς κάμνουμε ὅταν ρίχνουμε τὰ ζάρια ἢ ὅταν ἀφήνουμε ἕνα μπαλόνι νὰ ξεφουσκώσει καὶ παρατηροῦμε τὴν ἀκανόνιστη τροχιά του καθὼς ὁ ἀέρας διαφεύγει ἀπὸ αὐτό. Ἐπειδὴσ τὶς τελευταῖες αὐτὲς περιπτώσεις δὲν ὑπάρχει σαφὴς σχέση μεταξὺ τῆς αἰτίας καὶ τοῦ ἀποτελέσματος, ἀποφαινόμαστε ὅτι στὰ φαινόμενα αὐτὰ ὑπάρχουν στοιχεῖα τυχαιότητας, ἂν καὶ κατ' *ἀρχὴν δὲν ἀμφιβάλλομε ὅτι θὰ μποροῦσε νὰ ὑπάρξει ἀκριβὴς πρόβλεψη ἂν μπορούσαμε νὰ συγκεντρώσομε καὶ νὰ ἐπεξεργασθοῦμε περισσότερες καὶ ἀκριβέστερες πληροφορίες γιὰ τὰ ὑπὸ μελέτην φαινόμενα, ὅπως π.χ. στὴν περίπτωση τοῦ καιροῦ ἂν τὸ δίκτυο τῶν μετεωρολογικῶν σταθμῶν παρατηρήσεως ἦταν πυκνότερο καὶ ἐξοπλισμένο μὲ μεγάλο ἀριθμὸ Η/Υ οἱ ὁποῖοι νὰ ἀσχολοῦνται ἀποκλειστικὰ καὶ μόνο μὲ τὴν ἀνάλυση τῶν στοιχείων τοῦ καιροῦ. Ὅπως ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, θὰ τονίσω καὶ πάλι, ὅτι μερικὰ ἀπὸ τὰ συμπεράσματα στὰ ὁποῖα κατέληξε ἡ Θεωρία τοῦ Χάους μετέβαλαν τὴν τελευταία αὐτὴ διατυπωθεῖσα ἄποψη σχετικὰ μὲ τὴν ἀκριβέστερη πρόβλεψη τῶν φαινομένων ἂν τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως ἦταν περισσότερα. Μὲ ἄλλα λόγια ἀποδείχθηκε ὅτι ἁπλὰ ντετερμινιστικὰ συστήματα ἀποτελούμενα ἀπὸ λίγα μόνο στοιχεῖα μποροῦν νὰ παρουσιάσουν τυχαία συμπεριφορά, ὅτι ἡ τυχαιότητα αὐτὴ ἀποτελεῖ ἕνα θεμελιῶδες φαινόμενο, καὶ ὅτι μὲ τὴν συγκέντρωση μεγαλύτερου ἀριθμοῦ πληροφοριῶν (DATA) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαλειφθεῖ ἡ «τυχαιότητα» ποὺ παρουσιάζει τὸ σύστημα.*

Ἡ παρατηρούμενη αὐτὴ θεμελιώδης τυχαιότητα ὀνομάσθηκε ΧΑΟΣ.

Τὸ παράδοξο εἶναι ὅτι τὸ χάος εἶναι ντετερμινιστικό. Παράγεται δηλαδὴ ἀπὸ σταθεροὺς κανόνες οἱ ὁποῖοι δὲν ἐμπεριέχουν στοιχεῖα τύχης. Θεωρητικά, τὸ μέλλον καθορίζεται πλήρως ἀπὸ τὸ παρελθόν. Στὴν πράξη ὅμως ὑπάρχουν μικρὲς ἀβεβαιότητες, ὅπως εἶναι τὰ πολὺ μικρὰ σφάλματα ποὺ γίνονται στὶς μετρήσεις, σφάλματα τὰ ὁποῖα ὅταν ὑπεισέρχονται στοὺς ὑπολογισμοὺς γίνονται στὴ συνέχεια ὁλοένα καὶ μεγαλύτερα μὲ ἀποτέλεσμα, μολονότι ἡ συμπεριφορὰ τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου βραχυπρόθεσμα εἶναι προβλέψιμη, εἶναι δηλαδὴ ντετερμινιστική, καθίσταται μακροπρόθεσμα μὴ προβλέψιμη, δηλαδὴ χαοτική.

Χάος = διακοπὴ προβλεψιμότητας

Τάξις = προβλεψιμότητα.

Ἡ ἀνακάλυψη τῆς συμπεριφορᾶς αὐτῆς ἑνὸς συστήματος κατὰ τὴν μελέτη ἑνὸς φαινομένου, ἐπαναλαμβάνω ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ σπουδαῖα ἐπιτεύγματα τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους.

Ἕνα ἄλλο ἐπίτευγμα τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους ἀποτελοῦν οἱ μεθοδολογίες ποὺ ἔχουν ἐξευρεθεῖ γιὰ μιὰ ἀκριβὴ ἐπιστημονικὴ ἀξιολόγηση τῆς παρουσίας χαοτικῆς συμπεριφορᾶς σὲ μαθηματικὰ πρότυπα καθὼς καὶ σὲ φυσικὰ φαινόμενα. Μὲ τὴν χρήση τῶν μεθοδολογιῶν αὐτῶν εἶναι τώρα, ἐν γένει, δυνατὸν νὰ ἐκτιμηθεῖ ὁ λεγόμενος «ὁρίζοντας προβλέψεως» ἑνὸς συστήματος. Πρόκειται περὶ μιᾶς μαθηματικῆς, φυσικῆς ἢ χρονικῆς παραμέτρου ἡ ὁποία προσδιορίζει τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων εἶναι θεωρητικὰ δυνατὴ ἡ πρόβλεψη, ἐνῶ πέραν τῶν ὁρίων αὐτῶν δὲν θὰ εἶναι ποτὲ δυνατὸν νὰ γίνει μετὰ βεβαιότητος καμμιὰ πρόβλεψη. Π.χ. ἔχει καθορισθεῖ ὅτι ὁ ὁρίζοντας *προβλέψεως γιὰ τὸν καιρὸ δὲν ὑπερβαίνει τὶς δύο ἢ τρεῖς ἑβδομάδες. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὅσο ἀκριβέστερα καὶ ἂν συλλέξομε καὶ ἀναλύσομε τὰ δεδομένα (DATA) γιὰ τὸν καιρό, δὲν θὰ μπορέσομε ποτὲ νὰ προβλέψομε τὸν καιρὸ μὲ ἀκρίβεια πέραν τοῦ χρονικοῦ αὐτοῦ ὁρίζοντος προβλέψεως.*

Ὅμως, προτοῦ προχωρήσομε στὴν περαιτέρω παρουσίαση τῶν στόχων τοὺς ὁποίους ἐπιδιώκει ἡ θεωρία τοῦ Χάους, θὰ ἦταν χρήσιμη μιὰ σύντομη ἱστορικὴ ἀναδρομὴ ἐπὶ τοῦ θέματος.

Ἐξετάζοντας τὴν ἐξέλιξη τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἀπὸ παλαιότερες ἐποχὲς μέχρι σήμερα, διακρίνει κανεὶς στὴν ἐποχή μας μιὰ τάση πρὸς ἀνακεφαλαίωση τῶν μέχρι τοῦδε κτηθέντων, σὲ διαφορετικὸ ὅμως ἐπίπεδο.

Στὶς ἀρχὲς τῆς ἱστορίας του, ὁ ἄνθρωπος θεωροῦσε τὰ φυσικὰ φαινόμενα καθαρῶς χαοτικά, τελείως τυχαῖα. Ἀργότερα μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου καὶ τὴν ἀνάπτυξη τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἡ περιοχὴ ὅπου «ἐβασίλευε» τὸ χάος ἄρχισε ὁλοένα νὰ μικραίνει, καθόσον ὁλοένα καὶ γιὰ περισσότερα φαινόμενα ἄρχισαν νὰ ἀναγνωρίζονται οἱ διέποντες αὐτὰ φυσικοὶ νόμοι, συγχρόνως δὲ μὲ τὴν παράλληλη ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν ἡ ἑρμηνεία ἑνὸς φαινομένου ἄρχισε νὰ μαθηματικοποιεῖται. Ἔτσι εἶχε ἀρχίσει νὰ δημιουργεῖται ἡ ἀπατηλὴ ἐντύπωση ὅτι ἦταν ἁπλῶς ζήτημα χρόνου καὶ τελειοποίησης τῶν μηχανικῶν μέσων ἡ πλήρης ἀπαλοιφὴ τοῦ χάους ἀπὸ τὴν ἀνθρώπινη ἐμπειρία. Ἕνα γεγονὸς μάλιστα ποὺ συνετέλεσε σὲ πολὺ μεγάλο βαθμὸ στὸ νὰ ἐπιτευχθεῖ ἡ δημιουργία τῆς ἐντυπώσεως αὐτῆς ὑπῆρξε ἡ τεράστια πρόοδος τὴν ὁποίαν ἐσημείωσε ὁ Ἀπειροστικὸς Λογισμός, μὲ πρωτεργάτες τοὺς δύο κολοσσοὺς τῶν μαθηματικῶν, τὸν Sir Isaac Newton (1643-1727) καὶ τὸν Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646-1716). Ὁμιλία σχετικὴ μὲ τὴν ζωὴ καὶ τὸ ἔργο τοῦ Newton εἶχε γίνει ἀπὸ τὸν ὁμιλοῦντα στὶς 19-4-1988 ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ (Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν, Τομ. 63, 1988). Οἱ μαθηματικὲς ἰδέες ποὺ ἐνυπῆρχαν στὸν Ἀπειροστικὸ Λογισμὸ ἀπετέλεσαν τὴν βάση γιὰ τὴν ἔκφραση φυσικῶν νόμων οἱ ὁποῖοι διέπουν τὴν κίνηση τῶν πλανητῶν, τὴν πληθυσμιακὴ μεταβολή, τὴν μετάδοση τοῦ ἤχου διὰ μέσου ἀερίων, τὴν μετάδοση τῆς θερμότητας στὰ διάφορα μέσα, τὴν ἀλληλεπίδραση μεταξύ τους τοῦ μαγνητισμοῦ καὶ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ἢ ἀκόμα τὴν πορεία τῶν μετεωρολογικῶν φαινομένων.

Ἐπίσης μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου εἶχε ἀρχίσει νὰ ἐκκολάπτεται ἡ κρυφὴ ἐλπίδα ὅτι οἱ ὅροι «ντετερμινισμὸς» καὶ «δυνατότητα πρόβλεψης» ἦταν ἰσοδύναμοι.

Τὸ σύμβολο τῆς ἐποχῆς τοῦ ντετερμινισμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶχε ἑδραιωθεῖ ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς ἐπὶ τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ὑπῆρξε τὸ ἀκόλουθο, ἀποκαλούμενο «δαιμόνιο τοῦ Laplace»:

«Ἂν μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε κάποιο ὂν μὲ ἀρκετὰ ἰσχυρὴ συνείδηση ὥστε νὰ εἶναι ἱκανὸ νὰ γνωρίζει τὶς ἀκριβεῖς θέσεις καὶ ταχύτητες ὅλων τῶν ἀντικειμένων τοῦ σύμπαντος καθὼς καὶ ὅλες τὶς ἐνεργοῦσες δυνάμεις, τότε γιὰ τὸ ὂν αὐτὸ δὲν θὰ ὑπῆρχε κανένα μυστικό, τίποτε τὸ ἀβέβαιο. Θὰ μποροῦσε αὐτὸ νὰ ὑπολογίσει κάθε τι τὸ σχετικὸ μὲ τὸ παρελθὸν ἢ τὸ μέλλον χρησιμοποιώντας τὸν νόμο τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ». Ὑπενθυμίζομε ὅτι ὁ Pierre Simon de Laplace (1749-1829), κάτοικος τοῦ Παρισιοῦ, ὑπῆρξε μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι τὸ κύριο «πιστεύω» τοῦ ντετερμινισμοῦ εἶναι ὅτι: Τὸ Σύμπαν παρομοιάζεται μὲ ἕνα τεράστιο ὡρολόϊ ἀκριβείας τὸ ὁποῖο λειτουργεῖ κανονικὰ καὶ στὸ ὁποῖο ἡ παροῦσα κατάσταση ἑνὸς συστήματος εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἄμεση συνέπεια τῆς πρὸ αὐτῆς καταστάσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ αἴτιο τῆς καταστάσεως ποὺ θὰ τὴν ἀκολουθήσει. Ἤτοι τὸ παρόν, τὸ παρελθὸν καὶ τὸ μέλλον συνδέονται μεταξύ τους μὲ σχέσεις αἰτιότητας, τὸ δὲ πρόβλημα τῆς ἀκριβοῦς προγνώσεως συνίσταται μόνο στὴν ἐπακριβὴ καταγραφὴ ὅλων τῶν σχετικῶν δεδομένων (DATA).

Ὅμως σὲ λιγότερο ἀπὸ 100 χρόνια μετὰ τὴν ἐξαγγελία αὐτὴ τοῦ Laplace ὁ καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Παρισίων Jules-Henri Poincaré, μελετώντας τὶς ἀντιδράσεις ποὺ παρουσιάζουν μεταξύ τους τρία σώματα κινούμενα ἐλεύθερα ὑπὸ τὴν ἐπίδραση τῶν ἀμοιβαίων ἕλξεων μεταξύ τους, κατέληξε στὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ νόμοι τοῦ Νεύτωνος δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ἀκριβὴ πρόβλεψη τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων αὐτῶν. Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ ἀπετέλεσε τὴν πρώτη στοιχειώδη ὑποδομὴ τῆς θεωρίας, γνωστῆς σήμερα ὡς Θεωρίας τοῦ Χάους. Ὁ Poincaré ἀπέδειξε ὅτι ἡ παραμικρὴ ἀπόκλιση ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ θέση ἢ ταχύτητα ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν σωμάτων θὰ μποροῦσε νὰ ὁδηγήσει σὲ τεράστιες ἀποκλίσεις στὴν μελλοντικὴ συμπεριφορὰ τῶν σωμάτων. Ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζομε τὴν ἀκριβὴ κατάσταση τοῦ ἡλιακοῦ μας συστήματος (μπορεῖ λόγου χάριν ἡ ὑποτιθέμενη θέση ἑνὸς πλανήτου νὰ διαφέρει ἀπὸ τὴν πραγματικὴ κατὰ τὸ ἕνα δέκατο τῆς διαμέτρου ἑνὸς ἀτόμου) καθιστᾶ ἀδύνατη τὴν ἀκριβὴ πρόβλεψη τῆς μελλοντικῆς του καταστάσεως, ὁσοδήποτε ἰσχυρὰ καὶ ἂν εἶναι τὰ ὑπολογιστικὰ ὄργανα ποὺ χρησιμοποιοῦμε, κάτι ποὺ ἐπιβεβαιώνεται ὅλο καὶ περισσότερο μὲ τὴν χρήση Η/Υ.

Ἐπίσης ἡ Θεωρία τοῦ Χάους βοήθησε στὸ νὰ γίνει ἀξιοσημείωτη πρόοδος στὴν βαθύτερη κατανόηση φαινομένων ὅπως εἶναι ὁ στροβιλισμός, οἱ ἰνιδικὲς καρδιακὲς (fibrillation of the heart) συστολές, τὰ φαινόμενα ἀσταθείας στὶς ἀκτίνες laser, οἱ ἀνώμαλες κλιματολογικὲς μεταβολές, καθὼς καὶ οἱ λειτουργικὲς ἀνωμαλίες τοῦ ἐγκεφάλου.

Τὸ «πιστεύω» αὐτὸ τοῦ ἀπολύτου ντετερμινισμοῦ, χαρακτηριστικὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Newton, ἔπαυσε νὰ ἰσχύει ὡς πρὸς τὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες ὅταν τὸ 1927 ἐξαγγέλ-

θηκε ἀπὸ τὸν *Werner Heisemberg* ἡ «᾿Αρχὴ τῆς ᾿Αβεβαιότητας» (ἢ ᾿Αρχὴ τῆς ᾿Απροσδιοριστίας) ἡ ὁποία πρεσβεύει τὰ ἀκόλουθα:

«῾Η θέση καὶ ἡ ταχύτητα ἑνὸς ἀντικειμένου δὲν εἶναι δυνατὸν (καὶ θεωρητικὰ ἀκόμα) νὰ ὑπολογισθοῦν συγχρόνως καὶ μὲ ἀπόλυτη ἀκρίβεια. Πράγματι αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ ἔννοια τῆς συμπτώσεως τῆς ἀκριβοῦς θέσεως καὶ τῆς ἀκριβοῦς ταχύτητας δὲν ἔχει νόημα στὴ φύση».

῾Η συνήθης ὅμως ἐμπειρία ποὺ ἔχομε τῶν πραγμάτων δὲν παρέχει καμμιὰ ἔνδειξη ὑπὲρ τῆς ὀρθότητας τῆς ἐν λόγῳ ἀρχῆς. Μᾶς φαίνεται π.χ. ὅτι εἶναι εὔκολο νὰ μετρήσομε συγχρόνως τὴν ταχύτητα καὶ τὴν θέση ἑνὸς αὐτοκινήτου. ῞Ομως αὐτὸ συμβαίνει διότι οἱ ἀβεβαιότητες στὶς ὁποῖες ἀναφέρεται ἡ ἐν λόγῳ ἀρχὴ εἶναι στὴν περίπτωση αὐτὴ παρὰ πολὺ μικρὲς γιὰ νὰ γίνουν ἀντιληπτές. ῾Η ᾿Αρχὴ τῆς ᾿Αβεβαιότητας καθίσταται σημαντικὴ ὅταν πρόκειται γιὰ σωματίδια μικρότερα τοῦ ἀτόμου ὅπως εἶναι τὰ ἠλεκτρόνια.

Μὲ ἄλλα λόγια στὴν διατύπωση τοῦ νόμου τῆς αἰτιότητας, ὅτι ὅταν γνωρίζομε μὲ ἀκρίβεια τὸ παρὸν μποροῦμε νὰ ὑπολογίσομε τὸ μέλλον, τὸ λανθασμένο μέρος τοῦ νόμου αὐτοῦ, κατὰ τὸν *Heisemberg*, εἶναι ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσομε τὸ παρὸν μὲ ὅλες του τὶς λεπτομέρειες. Κατὰ συνέπειαν ἡ γνώση ποὺ ἔχομε τοῦ παρόντος ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ ἐπιλογὴ ποὺ κάμνομε ἀπὸ μιὰ ἀφθονία δυνατοτήτων, κάτι ποὺ ὁδηγεῖ ἐπίσης σὲ περιορισμένο ἀριθμὸ δυνατοτήτων στὸ μέλλον. ῾Η μόνη πραγματικότητα ποὺ ὑπάρχει εἶναι αὐτὴ ποὺ ἀποκαλύπτεται ἀπὸ τὶς παρατηρήσεις μας. ᾿Επειδὴ ὅμως ὅλα τὰ πειράματα ὑπόκεινται στοὺς νόμους τῆς Κβαντομηχανικῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου στὴν ἀρχὴ τῆς ἀβεβαιότητας, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μέρος τῆς Κβαντομηχανικῆς, ἡ μὴ ἰσχὺς τοῦ νόμου τῆς ἀπολύτου αἰτιότητας ἔγινε ἀποδεκτὴ ἀπὸ τοὺς σύγχρονους φυσικοὺς ἐπιστήμονες. Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ προσθέσω ὅτι οἱ ἐπιπτώσεις τῆς ἀρχῆς τῆς ἀβεβαιότητας δὲν ἔχουν κατανοηθεῖ ἀπὸ πολλοὺς φιλοσόφους καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀμφισβητήσεις καὶ ἀντιδικίες ἐξακολουθοῦν νὰ ὑπάρχουν.

῾Ο *Albert Einstein* ἐπίστευε ὅτι ἡ ἀβεβαιότητα ποὺ ὑπεισέρχεται στὴν παρατήρηση δὲν ἀντιφάσκει μὲ τὴν ὕπαρξη νόμων οἱ ὁποῖοι καθορίζουν τὴν συμπεριφορὰ τῶν σωματιδίων ἢ μὲ τὴν ἱκανότητα τῶν ἐρευνητῶν νὰ ἀποκαλύψουν τοὺς νόμους αὐτούς.

῞Ομως ἡ ᾿Αρχὴ τῆς ᾿Αβεβαιότητας δὲν ἐσήμανε πλήρως τὸ τέλος τοῦ ντετερμινισμοῦ, ἁπλῶς τὸν τροποποίησε. Διότι οἱ ἐπιστήμονες στὴν πραγματικότητα δὲν εἶχαν ποτὲ λάβει ὑπόψη τὸ «πιστεύω» τοῦ *Laplace* μὲ πλήρη σοβαρότητα, δηλαδὴ σὰν ἕνα ἀπαράβατο δόγμα. Διότι μὲ ὅση προσοχὴ καὶ σχολαστικότητα καὶ ἂν διεξαχθεῖ ἕνα πείραμα, δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ ἀπομονωθεῖ ἀπὸ τὶς ἐπιδράσεις τοῦ περιβάλλοντος, ἡ δὲ κατάσταση στὴν ὁποία εὑρίσκεται ἕνα σύστημα δὲν εἶναι ποτὲ πλήρως *γνωστὴ σὲ καμμιὰ χρονικὴ στιγμή. Ἡ ἀπόλυτη μαθηματικὴ ἀκρίβεια τὴν ὁποία προϋποθέτει ὁ Laplace εἶναι ἀδύνατον, στὴν πραγματικότητα, νὰ ἐπιτευχθεῖ. Κατὰ κανόνα, πάντοτε, μιὰ κάποια λεπτεπίλεπτη, ἔστω, ἀνακρίβεια εἶναι πάντα παροῦσα. Οὐσιαστικὰ λοιπὸν αὐτὸ ποὺ ἐπίστευαν οἱ ἐπιστήμονες ἦταν ὅτι: στὴν φύση καθὼς καὶ σὲ κάθε καλοσχεδιασμένο πείραμα περίπου οἱ ἴδιες αἰτίες ἔχουν περίπου τὰ ἴδια αποτελέσματα. Φυσικὰ αὐτὸ συμβαίνει συχνά, ἰδίως ὅταν τὸ παρατηρούμενο φαινόμενο ἢ τὸ ἐκτελούμενο πείραμα εἶναι μικρῆς διάρκειας. Ἐξάλλου, ἂν αὐτὸ δὲν συνέβαινε, δὲν θὰ εἴμασταν ποτὲ σὲ θέση νὰ διατυπώνομε φυσικοὺς νόμους καὶ οὔτε θὰ μπορούσαμε νὰ κατασκευάσομε λειτουργοῦσες μηχανές.*

Ὅμως καὶ ἡ παραπάνω φαινομενικὰ εὔλογη ὑπόθεση ποὺ ἔκαμναν οἱ ἐπιστήμονες, ἐν γένει, δὲν ἀληθεύει, εἰδικότερα μάλιστα ὅταν πρόκειται γιὰ φαινόμενα ἢ πειράματα μακρᾶς διαρκείας. Τὸ λανθασμένο τῆς ὑπόθεσης αὐτῆς ἀνακαλύφθηκε τὸ 1960 ἀπὸ τὸν Ed Lorenz στὸ φαινόμενο ποὺ παρατηρήθηκε κατὰ τὴν μελέτη προτύπου γιὰ χρήση ἀριθμητικῶν προβλέψεων τοῦ καιροῦ. Τὸ ἐν λόγω φαινόμενο πῆρε τὴν ὀνομασία «Batterfly Effect», ἡ ὁποία ὀφείλεται σὲ μιὰ ἐργασία τοῦ Lorenz μὲ τίτλο: «Can the flap of a butterfly's wing stir up a tornado in Texas?». Στὴν ἐργασία αὐτὴ ὁ Lorenz περιγράφει τὸ «ντετερμινιστικὸ χάος» ὡς ἑξῆς: Ὅταν κατὰ τὴν διάρκεια μιᾶς σειρᾶς διαδοχικῶν μετρήσεων μιᾶς ποσότητας γίνει κάποιο σφάλμα, τότε τὸ σφάλμα αὐτὸ μὲ τὴν ἐπανάληψη τῆς μέτρησης διαρκῶς μεγαλώνει. Τὸ φαινόμενο τοῦ χάους ἐκδηλώνεται ὅταν τὸ μέγεθος τοῦ σφάλματος αὐξανόμενο γίνει τόσο μεγάλο ὅσο καὶ τὸ μέγεθος τῆς ἀρχικὰ μετρηθείσας ποσότητας.

Τὰ παραπάνω ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ ἀρχὴ τῆς ἀβεβαιότητας τοῦ Heisemberg καταρρίπτει μερικῶς μόνο τὴν ντετερμινιστικὴ ἄποψη, διότι ὁ Heisemberg συμπεραίνει ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ εἶναι λανθασμένη διότι οἱ ὑποθέσεις ποὺ κάμνει αὐτὴ (τῆς συγχρόνου δηλαδὴ γνώσεως τῆς θέσεως καὶ τῆς ταχύτητας ἑνὸς ἀντικειμένου) εἶναι ἀνέφικτες. Ὁ Lorenz ὅμως μὲ τὰ πειράματά του ἀπέδειξε ὅτι καὶ τὸ συμπέρασμα τῆς ἀρχῆς τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ εἶναι ἐπίσης λανθασμένο. Μὲ ἄλλα λόγια οἱ νόμοι τῆς φύσης δὲν ἀπορρίπτουν τὴν δυνατότητα τοῦ χάους, ποὺ σημαίνει ὅτι οἱ ἔννοιες «ντετερμινισμὸς» καὶ «πρόβλεψη» δὲν εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἕνα ἐπίσης ἐκπληκτικὸ εὕρημα τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους εἶναι ὅτι τὰ φαινόμενα τὰ ὁποῖα παρετήρησε ὁ Lorenz λαμβάνουν χώραν καὶ σὲ συστήματα πολὺ πιὸ ἁπλὰ ἀπὸ ἐκεῖνο τοῦ καιροῦ, ὅπως λόγου χάριν εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὁ ἀλγόριθμος εἶναι $z \rightarrow z^2 + c$*, γιὰ τὸ ὁποῖο θὰ μιλήσουμε ἀργότερα.*

Ἐπιπλέον τὸ «χάος» καὶ ἡ «τάξις» (ἡ ἀρχὴ δηλαδὴ τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ) μπορεῖ νὰ συμβεῖ νὰ συνυπάρχουν στὸ ἴδιο σύστημα, ἡ μία παραπλεύρως τῆς ἄλλης. Μπορεῖ δηλαδὴ νὰ ὑπάρχει ἀφ' ἑνὸς μὲν μιὰ γραμμικὴ αὔξηση σφαλμά-

των ἡ ὁποία εἶναι χαρακτηριστικὴ τοῦ ντετερμινιστικοῦ συστήματος τὸ ὁποῖο κυβερνᾶται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ (στὸ ἴδιο σύστημα) μπορεῖ νὰ ὑπάρχει αὔξηση σφαλμάτων ἀκολουθοῦσα μιὰ ἐκθετικὴ συνάρτηση, (ὅπως συμβαίνει στὴν περίπτωση τοῦ «butterfly effect»), αὔξηση ποὺ δηλώνει τὴν μὴ τήρηση τῆς ἀρχῆς τῆς αἰτιότητας στὸ σύστημα αὐτό.

Συνοψίζοντας τὰ ὅσα τελευταίως ἀναφέραμε γιὰ τὴν ἀρχὴ τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ συμπεραίνομε ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ διδάγματα τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους εἶναι ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ αἰτίου καὶ τοῦ αἰτιατοῦ ἀπὸ τὴ μιά της ἄκρη ἀποδυναμώθηκε μὲ τὴν διατύπωση τῆς ἀρχῆς τῆς ἀβεβαιότητας, ἀπὸ δὲ τὴν ἄλλη ἄκρη της μὲ τὶς παρατηρηθεῖσες σύμφυτες ἰδιότητες ἀστάθειας τῶν φυσικῶν νόμων, ὅπως προέκυψε ἀπὸ τὰ πειράματα τοῦ Lorenz.

Καὶ τώρα ἂς στρέψομε τὴν προσοχή μας περισσότερο στὶς βασικὲς ἔννοιες τῆς θεωρίας τῶν Fractals.

Συνήθως ὅταν ἀναφερόμαστε σὲ Fractals ὡς εἰκόνες ἢ σχήματα ἢ δομές, ἔχουμε τὴν ἀντίληψη, τὰ θεωροῦμε, ὅτι εἶναι ἀντικείμενα στατικά, ὅπως λ.χ. στὴν περίπτωση ἑνὸς δένδρου ἢ νέφους κ.ἄ. Μιὰ τέτοια ὅμως θεώρηση ἐλάχιστα μᾶς πληροφορεῖ σχετικὰ μὲ τὴν ἐξέλιξη ἢ μὲ τὴν γένεση μιᾶς δοθείσας δομῆς.

Πολὺ συχνά, ὅπως π.χ. συμβαίνει στὴν Βοτανική, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν πολύπλοκη γεωμετρικὴ εἰκόνα ποὺ παρουσιάζει ἕνα πλήρως ἀνεπτυγμένο φυτό, μᾶς ἐνδιαφέρει πάρα πολὺ νὰ γνωρίσομε τὸν τρόπο, τὴν δυναμικὴ ἀναπτύξεως τοῦ φυτοῦ αὐτοῦ. Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὰ βουνά, μὲ τὶς ὀροσειρές, τῶν ὁποίων ἡ γεωμετρικὴ μορφὴ εἶναι ἀποτέλεσμα γεωλογικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ φλοιοῦ τῆς γῆς καὶ φαινομένων διαβρώσεως, αἴτια τὰ ὁποῖα ἐξακολουθοῦν καὶ σήμερα καὶ θὰ ἐξακολουθήσουν στὸ μέλλον νὰ ἐπηρεάζουν τὸ σχῆμα τῶν βουνῶν.

'Ανάλογες παρατηρήσεις μποροῦμε νὰ κάνουμε γιὰ τὸ φαινόμενο συσσωρεύσεως ψευδαργύρου κατὰ τὴν διάρκεια ἑνὸς πειράματος ἠλεκτρολύσεως, ἢ γιὰ τὴν δημιουργία τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύμονος. Μὲ ἄλλα λόγια τὸ νὰ ὁμιλεῖ κανεὶς γιὰ Fractals καὶ νὰ ἀγνοεῖ συγχρόνως τὴν δυναμικὴ διαδικασία ποὺ ἀκολουθεῖται γιὰ τὸν σχηματισμό τους, εἶναι ἀνεπαρκὲς καὶ ἄνευ ἀντικειμένου.

Βέβαια ἡ τελευταία αὐτὴ ἄποψη φαίνεται ὅτι μπορεῖ νὰ μᾶς ὁδηγήσει σὲ πάρα πολὺ πολύπλοκες διαδικασίες. Ποιὲς ὅμως εἶναι οἱ διαδικασίες αὐτὲς καὶ ποιὸ εἶναι τὸ κοινὸ μαθηματικὸ νῆμα ποὺ τὶς συνδέει; Μήπως ἡ πολυπλοκότητα τῶν μορφῶν ποὺ παρατηροῦμε στὴ φύση εἶναι ἀποτέλεσμα ἐξίσου πολυπλόκων διαδικασιῶν; Τὸ τελευταῖο αὐτὸ ἀληθεύει σὲ πολλὲς περιπτώσεις, ἀπέχει ὅμως πολὺ ἀπὸ τοῦ νὰ ἀληθεύει ἐν γένει. 'Αντιθέτως εἶναι πολὺ πιθανὸ ἡ δημιουργὸς αἰτία (ὁ ἀλγόριθμος) μιᾶς πολύπλοκης δομῆς νὰ εἶναι μιὰ πάρα πολὺ ἁπλὴ διαδικασία, ἀποτελεῖ δὲ ἡ *τελευταία αὐτὴ διαπίστωση ἕνα ἀπὸ τὰ ἐκπλήσσοντα διδάγματα τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους καὶ τῆς Γεωμετρίας τῶν Fractals. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἁπλότητα μιᾶς διαδικασίας δὲν πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ ἀπατηλὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ οἱ συνέπειες τῆς διαδικασίας αὐτῆς θὰ εἶναι καὶ αὐτὲς εὐκολονόητες καὶ ἁπλές.*

Ἡ κυριότερη διαδικασία ἡ ὁποία ἀκολουθεῖται κατὰ τὴν δημιουργία τῶν Fractals εἶναι ἡ «ἐπανάληψη» (iteration) ἢ ἡ συνώνυμη πρὸς αὐτήν, «ἐπανατροφοδοσία» (feedback). Πρόκειται καὶ ἐδῶ περὶ ἀλγορίθμου καὶ ἀποτελεῖ μιὰ θεμελιώδη διαδικασία ἡ ὁποία παρατηρεῖται σὲ ὅλες τὶς λεγόμενες ἀκριβεῖς ἐπιστῆμες. Τὸ εἶδος καὶ τὸ πλῆθος τῶν διαδικασιῶν αὐτῶν εἶναι ἀνεξάντλητο. Μιὰ τέτοια διαδικασία παρομοιάζεται μὲ μιὰ μηχανὴ ἀποτελούμενη ἀπὸ τρεῖς μονάδες:

μονάδα εἰσαγωγῆς — μονάδα ἐπεξεργασίας — μονάδα ἐξαγωγῆς

Τὸ σπουδαιότερο παράδειγμα ἁπλῆς διαδικασίας μὲ πάρα πολὺ πολύπλοκες συνέπειες εἶναι ἡ διαδικασία ποὺ καθορίζεται ἀπὸ τὴν τετραγωνικὴ μορφὴ x^2+c. Ἂς τὴν περιγράψουμε ἐν συντομίᾳ.

Προετοιμασία: *Ἐκλέγομε τὸν ἀριθμὸ c, καὶ ἔστω $c=-2$. Ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγομε μιὰ τιμὴ γιὰ τὸ x, ἔστω $x=0.5$.*

Ἐπαναληπτική διαδικασία: *Ὑπολογίζομε τὴν παράσταση x^2+c γιὰ $c=-2$, $x=0.5$. Εὑρίσκομε $0.25-2=-1.75$. Ἐπαναλαμβάνομε τὴν ἴδια διαδικασία θέτοντας στὴ θέση τοῦ x τὴν τιμὴ -1.75. Εὑρίσκομε 1.0625, κ.ο.κ.*

Ὁ ἀκόλουθος πίνακας περιλαμβάνει τὰ ἀποτελέσματα ποὺ λαμβάνομε μετὰ ἀπὸ 4 ἐπαναλήψεις τῆς ἴδιας διαδικσίας.

x	$x^2+c \quad c=-2$
0.5	−1.75
−1.75	1.0625
1.0625	−0.87109375
−0.87109375	−1.2411956787109375

Ἤδη γίνεται ἀντιληπτὸ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ποὺ λαμβάνομε μετὰ ἀπὸ κάθε ἐπανάληψη τῆς διαδικασίας διπλασιάζεται, πράγμα ποὺ καθιστᾶ ἀδύνατη τὴν ἀπόκτηση, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἀκριβῶν ἀποτελεσμάτων διότι οἱ ὑπολογιστὲς ἔχουν θέσεις γιὰ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων. Ἂν τώρα συνεχίσομε τὴν παραπάνω διαδικασία λαμβάνοντας μόνο κατὰ προσέγγιση τιμὲς (λ.χ μέχρι καὶ τὸ 3ο δεκ. ψηφίο), τότε τὸ σφάλμα ποὺ κάνομε, ὅσο μικρὸ καὶ ἂν εἶναι στὴν *ἀρχή, αὐξάνει ὁλοένα καὶ ἀποκτᾶ μεγάλες διαστάσεις, καθιστώντας τὰ λαμβανόμενα ἀποτελέσματα ἄνευ ἀξίας.*

Ἡ παραπάνω διαδικασία εἶναι ἐκείνη ποὺ παρέχει καὶ τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot ποὺ ἀνέφερα προηγουμένως: Θεωροῦμε πάλι τὴν παράσταση x^2+c *ὅπου τὰ* x *καὶ* c *εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Διατηροῦμε κατὰ ἀρχὰς τὸ* c *σταθερὸ (ἀπροσδιόριστο) καὶ θέτομε στὴν παράσταση αὐτὴ* $x=0$. *Προκύπτει ὁ ἀριθμὸς* c. *Θέτομε τώρα στὴν παράσταση ὅπου* x *τὸ* c, *ὁπότε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς* c^2+c. *Θέτομε πάλι ὅπου* x *τὸ* c^2+c *καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς* $(c^2+c)+c$, *κ.ο.κ. ὁπότε προκύπτει ἡ ἀκολουθία ἀριθμῶν*

$$c,\ c^2+c,\ (c^2+c)^2+c, \ldots$$

Γνωρίζομε ὅτι σὲ κάθε ἀριθμὸ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολο τῶν ὅρων τῆς παραπάνω ἀκολουθίας γιὰ ἄλλες μὲν τιμὲς τοῦ c *παραμένει φραγμένο (π.χ.* $c=0$, $c=-1$*) ἐνῶ γιὰ ἄλλες δὲν εἶναι φραγμένο (π.χ.* $c=1$, $c=-3$, $c=2-1$*).*

Τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἐκεῖνα τὰ c *γιὰ τὰ ὁποῖα ἡ παραπάνω ἀκολουθία παραμένει φραγμένη, ποὺ σημαίνει ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας κεῖνται μέσα σὲ κάποιο δεδομένο κύκλο.*

Ἡ λεπτομερὴς μελέτη τῆς διαδικασίας ποὺ παρέχει τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot παρουσιάζει πολὺ μεγάλες δυσκολίες, διότι οἱ καταστάσεις ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν ἐπιλογὴ τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου ἐμπλέκονται μεταξύ τους κατὰ τρόπον ἐξαιρετικὰ πολύπλοκον ὅπως ἐξάλλου αὐτὸ φαίνεται καὶ στὸ σχῆμα ὅπου ἀπεικονίζεται τὸ σύνολο αὐτό. Μὲ ἄλλα λόγια ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα μπορεῖ νὰ συμπεριφερθεῖ κατὰ δύο τελείως διαφορετικοὺς τρόπους παρουσιάζοντας καταστάσεις τελείως διαφορετικὲς μεταξύ τους καὶ ὅπου ἡ μετάβαση ἀπὸ τὴν μία κατάσταση στὴν ἄλλη γίνεται κατὰ τρόπον ἀπότομο.

Τὸ παράδειγμα τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot δείχνει τὴν σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς Θεωρίας τοῦ Χάους καὶ τῆς Γεωμετρίας τῶν Fractals. Ἴσως ὁ καλύτερος τρόπος γιὰ νὰ ἐκφράσει κανεὶς τὴν σχέση αὐτὴ εἶναι νὰ πεῖ ὅτι ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals εἶναι ἡ Γεωμετρία τοῦ Χάους.

Στὴν μέχρι τώρα παρουσίαση τοῦ ὅλου θέματος προσπάθησα νὰ χρησιμοποιήσω ὅσο τὸ δυνατὸν λιγότερες μαθηματικὲς ἔννοιες καὶ σύμβολα, μὲ σκοπὸ νὰ δώσω ἔστω καὶ μιὰ διαισθητικὴ εἰκόνα τῶν ἐννοιῶν ποὺ εὑρίσκονται στὴν βάση τῶν νέων αὐτῶν θεωριῶν καθὼς καὶ τῶν σχέσεων ποὺ ὑπάρχουν μεταξύ τους. Ἡ προσπάθεια ποὺ καταβλήθηκε γιὰ τὴν ὅσο τὸ δυνατὸν σαφέστερη παρουσίαση τοῦ κειμένου ὑπὸ ἐκλαϊκευμένη μορφὴ πιθανὸν νὰ ἔγινε εἰς βάρος τῆς κομψότητος τοῦ λόγου (ἐπαναλήψεις-μακρηγορίες).

Στὴ συνέχεια θὰ ἐπιχειρήσομε μιὰ σύντομη θεώρηση τοῦ θέματος ἀπὸ αὐστηρότερη μαθηματικὴ σκοπιά.

Ἡ λέξη «σημεῖο» στὰ μαθηματικὰ εἶναι ταυτόσημη μὲ τὴν φράση «στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου». Ἂς θεωρήσομε τὸ ἀκόλουθο κάπως πολύπλοκο σύνολο.

Ἔστω $I=[0,1]$ καὶ X τὸ σύνολο ὅλων τῶν πεπερασμένου πλήθους συνενώσεων κλειστῶν διεζευγμένων γνησίων ὑποδιαστημάτων τοῦ I. Θὰ καλέσομε σημεῖο κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου X.

Ἔστω T_c ἡ ἀπεικόνιση $T_c : X \to X$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Ἂν $P \in X$ τότε $T_c(P)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν διαστημάτων ποὺ προκύπτουν ἂν ἀπὸ κάθε διάστημα τοῦ P ἀφαιρέσομε τὸ μεσαῖο ἀνοικτὸ ἕνα τρίτο διάστημα αὐτοῦ. Π.χ. ἀφοῦ τὸ I εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ X ἔχομε $T^c(I)=[0,1/3]\cup[2/3,1]$. Τί τώρα συμβαίνει ὅταν ἡ T_c ἐφαρμοσθεῖ διαδοχικὰ ἐπὶ τῆς ἑκάστοτε λαμβανομένης εἰκόνας; Ἂς ξεκινήσομε μὲ τὸ I καὶ ἂς θεωρήσομε τὴν ἀκολουθία $T^c(I)$, $T_c^2(I)$, $T_c^3(I)$.... Ἡ φθίνουσα αὐτὴ ἀκολουθία πεπερασμένου πλήθους ἑνώσεων κλειστῶν διαστημάτων εἶναι γνωστὴ στὸν κάθε ἕνα ποὺ ἔχει διδαχθεῖ τὴν θεωρία συνόλων πραγματικῶν ἀριθμῶν, διότι ἡ τομὴ ὅλων τῶν συνόλων τῆς ἀκολουθίας εἶναι τὸ γνωστὸ σὲ ὅλους σύνολο τοῦ Cantor, καὶ γι' αὐτὸ ἐξάλλου χρησιμοποιήθηκε ἐξ ἀρχῆς τὸ γράμμα c ὡς δείκτης στὴ T_c.

Ὁ μετασχηματισμὸς T_c ἀποτελεῖ ἕνα παράδειγμα δυναμικοῦ συστήματος. Γενικότερα, καλοῦμε δυναμικὸ σύστημα κάθε ἀπεικόνιση ἑνὸς συνόλου ἐντὸς τοῦ ἑαυτοῦ του. Βέβαια ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς εἶναι πολὺ γενικός, καθίσταται δὲ χρήσιμος ὅταν τὸ σύνολο καὶ ἡ ἀπεικόνιση ἔχουν κάποια ἐνδιαφέρουσα δομὴ ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς (ἀλγεβρική, ἀναλυτικὴ ἢ γεωμετρική).

Ἡ Θεωρία τοῦ Χάους μελετᾶ ἐν γένει τὴν συμπεριφορὰ ἑνὸς δυναμικοῦ συστήματος στὸ ἄπειρο. Ἂς θεωρήσομε μιὰ τυχοῦσα ἀπεικόνιση $T:X \to X$ καὶ τὴν ἀκολουθία T, T^2, T^3, ... καὶ ἂς διατυπώσουμε κάποιο ἐνδιαφέρον ἐρώτημα σχετικὸ μὲ τὴν ἀκολουθία αὐτή. Ἔχομε τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1. Ἔστω $X=R$ ἡ πραγματικὴ εὐθεία καὶ γιὰ $x \varepsilon R$ ἂς θέσομε $Tx=\cos x$. Πῶς συμπεριφέρεται ἡ ἀκολουθία Tx, T^2x, T^3x,... γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τοῦ x; Ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι εὔκολη. Ἂν ὅμως τὸ παράδειγμα αὐτὸ δὲν σᾶς ἔχει ἀπασχολήσει, μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε ἕνα μικρὸ ὑπολογιστὴ ὁ ὁποῖος νὰ ἔχει τὸ κουμπὶ «cos», νὰ ἀρχίσετε μὲ κάποιο x καὶ στὴ συνέχεια νὰ πατᾶτε διαδοχικὰ τὸ κουμπὶ «cos».

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2. Τὸ T_c ποὺ ἀναφέραμε προηγουμένως ἀποτελεῖ παράδειγμα δυναμικοῦ συστήματος.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 3. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ δυναμικοῦ συστήματος παίζει σπουδαῖο ρόλο στὴν Μαθηματικὴ Ἀνάλυση (Unilateral shift operator). Ἔστω X τὸ κλειστὸ διάστημα $[0,1]$, ὅπου τὰ δύο ἄκρα ἔχουν ταυτισθεῖ. Μὲ ἄλλα λόγια ἕνα σημεῖο τοῦ X εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1 (συμπεριλαμβανομένων), μὲ τὴν διαφορὰ ὅτι τὸ 0 καὶ τὸ 1 θεωροῦνται τὸ ἴδιο σημεῖο. Ἔστω $T_2: X \to X$ ἡ ἀπεικόνιση κατὰ τὴν ὁποίαν γιὰ $x \in X$ ἔχομε $T_2(x)=2x(\mathrm{mod}\ 1)$. Ἔτσι

$$T_2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},\quad T_2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad T_2\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$T_2\left(\sqrt{2}-1\right)=T_2(1.4142...-1)=\left(2\sqrt{2}-2\right)(\mathrm{mod}\ 1)=2.8284...-2=0.8284...$$

Πῶς ὅμως συμπεριφέρεται ἡ ἀκολουθία x, T_2x, T_2^2x, T_2^3x,... γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τοῦ x; Συγκλίνει σὲ κάποιο ὅριο; Εἶναι δυνατὸν τὸ περίβλημά της (closure) νὰ περιλαμβάνει ἕνα ἀνοικτὸ διάστημα; Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἂν καὶ φαίνεται «ἀθῶο» ἔχει βαθειὲς ρίζες.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 4. Διαλέγομε δύο πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β καὶ ὁρίζομε τὴν ἀπεικόνιση $T = T_{\alpha\beta}$ στὸ R^2 μὲ τὴν σχέση

$$T_{\alpha\beta}(x,\psi)=(\psi+1-\alpha x^2,\ \beta x),\qquad (x,\psi)\in R^2$$

Ἀπεικονίσεις τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἰσήχθησαν καὶ μελετήθηκαν ἀπὸ τὸν Hénon. Ἡ μελέτη τῶν ἀσυμπτωτικῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀπεικονίσεων αὐτῶν εἶναι λεπτὴ καὶ ἐνδιαφέρουσα, καὶ φυσικὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς παραμέτρους α καὶ β. Ἂν λ.χ. $\alpha=1.3$ καὶ $\beta=0.3$ τότε ὑπάρχουν 7 σημεῖα στὸ ἐπίπεδο τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα «περιοδικὸ πόλο ἕλξεως». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ ἐπαναληπτικὲς εἰκόνες ἑνὸς σημείου πλησιάζουν ὅλο καὶ περισσότερο τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 7 σημεῖα, μετὰ πλησιάζουν τὸ ἑπόμενο, μετὰ τὸ τρίτο κ.ο.κ. καὶ στὸ ὄγδοο βῆμα ἐπανέρχονται πλησιέστερα στὸ 1ο σημεῖο μετὰ στὸ 2ο κ.ο.κ.

Ἂν τώρα λάβομε $\alpha=1.4$ καὶ $\beta=0.3$, τότε οἱ ἐπαναληπτικὲς εἰκόνες μερικῶν σημείων τείνουν στὸ ἄπειρο, ἐνῶ οἱ εἰκόνες ἄλλων σημείων συσσωρευόμενες σχηματίζουν πολύπλοκο σύνολο καμπύλων καλούμενο «ἰδιότυπος πόλος ἕλξεως» (strange attractor) ἢ Hénon attractor. Ἰδιότυποι πόλοι ἕλξεως παρατηροῦνται στὴν μελέτη τοῦ φαινομένου τοῦ στροβιλισμοῦ (turbulence).

Καὶ τίθεται τὸ ἐρώτημα, γιὰ ποιὸ λόγο χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «Χάος» στὴ μελέτη θεμάτων τοῦ εἴδους ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω. Ὁ λόγος φαίνεται νὰ εἶναι ἡ ἀντίδραση ποὺ παρουσιάζει τὸ ἄτομο ἔναντι ἑνὸς φαινομένου ἀσυνεχείας ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ἐκεῖ ποὺ κανεὶς δὲν τὸ περιμένει. Ἂς γίνομε σαφέστεροι. Στὸ τελευταῖο παράδειγμα τοῦ δυναμικοῦ συστήματος μὲ τὶς παραμέτρους α καὶ β εἴδαμε ὅτι τὴν *μικρὴ ἀλλαγὴ τῆς τιμῆς τῶν παραμέτρων ἐπακολούθησε μιὰ τεράστια ἀλλαγὴ στὴν συμπεριφορὰ τῶν εἰκόνων τῆς ἀκολουθίας. Ἡ αἰφνίδια αὐτὴ ἀλλαγὴ καθὼς καὶ ἡ ἐμφάνιση τοῦ ἰδιοτύπου πόλου ἕλξεως θεωροῦνται ὅτι εἶναι χαοτικὲς-ἀπρόβλεπτες.*

Βεβαίως ἀπρόβλεπτα ἀποτελέσματα παρατηροῦνται καὶ σὲ ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν καὶ ἴσως ὁ ὅρος «χάος» δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ χρησιμοποιεῖται ἁπλῶς καὶ μόνο ὅταν ἀρχικὰ δεδομένα παράγουν ἕνα πολύπλοκο καὶ ἀσυνεχὲς φάσμα ἀποτελεσμάτων. Ὅμως ἡ ὁρολογία αὐτὴ ἐπεκράτησε.

Τὸ δυναμικὸ σύστημα T_c *ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, παρουσιάζεται συχνὰ στὴ Θεωρία τοῦ Χάους, καὶ ὅπως εἴδαμε ὁδηγεῖ στὸ σύνολο τοῦ Cantor. Μιὰ περίεργη καὶ σπουδαία ἰδιότητα τοῦ συνόλου τοῦ Cantor εἶναι ὅτι τὸ μέρος τοῦ συνόλου ποὺ εὑρίσκεται στὸ διάστημα* $[0,1/3]$ *εἶναι ὅμοιο μὲ ὁλόκληρο τὸ σύνολο τοῦ Cantor. Ἀρκεῖ κάθε σημεῖο τοῦ μέρους αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιασθεῖ ἐπὶ 3 καὶ λαμβάνομε τότε ὁλόκληρο τὸ σύνολο τοῦ Cantor. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὸ μέρος τοῦ συνόλου τοῦ Cantor ποὺ εὑρίσκεται στὸ διάστημα* $[2/3, 7/27]$*. Γενικότερα, κάθε γειτονία ἑνὸς σημείου τοῦ συνόλου τοῦ Cantor περιλαμβάνει ἕνα ὑποσύνολο τὸ ὁποῖο εἶναι ὅμοιο μὲ ὁλόκληρο τὸ σύνολο τοῦ Cantor. Ἡ κατ' ἐπανάληψιν ἐφαρμογὴ τῆς ἀπεικονίσεως τείνει νὰ παράγει σύνολα τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν ὁμοιότητα μὲ τὰ ἀρχικά. Μὲ ἄλλα λόγια τὰ παραγόμενα σύνολα παραμένουν ἀναλλοίωτα ὅταν ἡ κλίμακα μεγέθους ἀλλάζει.*

Τὸ σύνολο τοῦ Cantor εἶναι ἕνα Fractal, ὅπως ἐπίσης καὶ κάθε ἄλλο σύνολο ποὺ κατασκευάζεται μὲ παρόμοιο τρόπο (ἀφαιρώντας λ.χ. τὰ μεσαῖα πέμπτα τῶν προκυπτόντων διαστημάτων).

Ποιός ὅμως εἶναι ὁ μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῆς ἔννοιας Fractal;

Εἶναι γνωστὸ ὅτι σὲ κάθε σύνολο τοῦ Εὐκλειδείου χώρου, ὁσοδήποτε παθολογικὸ καὶ ἂν εἶναι αὐτό, ἀντιστοιχεῖ ἡ «τοπολογική του διάταση» D_T *καὶ εἶναι αὐτὴ ἕνας μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ τοπολογικὴ διάσταση ἑνὸς σημείου εἶναι, 0, ἐκείνη ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι 1, τοῦ κύκλου εἶναι 2 ἐνῶ τοῦ κύβου εἶναι 3. Στὸ ἴδιο σύνολο ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνας δεύτερος ἀριθμός, «ἡ διάσταση τοῦ συνόλου κατὰ Hausdorff - Besicovitch (1922), ἡ ὁποία σημειώνεται μὲ D καὶ δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος ἀριθμός, ἰσχύει ὅμως ἡ ἀνισότητα* $D_T \leq D$.

Καλεῖται Fractal κάθε σύνολο γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχομε $D_T < D$*. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ τὸ σύνολο τοῦ Cantor εἶναι ἕνα Fractal διότι γιὰ τὸ σύνολο τοῦ Cantor ἔχομε* $D_T = 0$*, καθότι αὐτὸ εἶναι πλήρως μὴ συνεκτικὸ ἐνῶ γιὰ τὸ ἴδιο σύνολο ὑπολογίζεται ὅτι*

$$D = log2/log3.$$

Ἡ ἀκόλουθη παρατήρηση σχετικὴ μὲ τὰ Fractals εἶναι ἄκρως διαφωτιστικὴ γιὰ τὴν σαφέστερη κατανόηση τῆς ἔννοιας «Fractal».

Τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot, καθὼς καὶ πολλὰ ἄλλα Fractals, προκύπτουν μὲ κάποια ἐπαναληπτικὴ διαδικασία κατασκευῆς ἡ ὁποία συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον καὶ οὐδέποτε σταματᾶ. Σὲ κάθε πεπερασμένο στάδιο τῆς διαδικασίας ἔχει παραχθεῖ κάποιο ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο ἔχει βέβαια κάποια δομὴ περισσότερο ἢ λιγότερο πολύπλοκη ἀνάλογα μὲ τὸ πόσο ἔχει διαρκέσει ἡ διαδικασία κατασκευῆς μέχρι ἐκείνη τὴ στιγμή, ὅμως ἀπέχει ἀπὸ τὴν τελικὴ δομὴ τοῦ Fractal τὸ ὁποῖο «ὑπάρχει» ὡς ἕνα ἐξιδανικευμένο ἀντικείμενο, τὸ ὁποῖο θὰ προέκυπτε ἂν ἡ διαδικασία συνεχίζονταν ἐπ' ἄπειρον. Μὲ ἄλλα λόγια τὰ Fractals αὐτὰ εἶναι ὁριακὰ ἀντικείμενα, ἡ δὲ ὕπαρξή τους δὲν εἶναι τόσο φυσικὴ ὅσο φαίνεται νὰ εἶναι. Ἡ μαθηματικὴ θεμελίωση τῶν ὁριακῶν αὐτῶν ἀντικειμένων εἶναι ἀναγκαία.

Τὰ ὅρια μᾶς ὁδηγοῦν συνήθως σὲ νέες ποσότητες, σὲ νέα ἀντικείμενα, καὶ αὐτὸ ἰσχύει καὶ γιὰ τὰ Fractals. Εἶναι γνωστὸ ὅτι δοθείσας μιᾶς ἀκολουθίας ἀριθμῶν, αὐτὴ μπορεῖ νὰ συγκλίνει σὲ κάποιο ὅριο ἢ νὰ ἀποκλίνει. Π.χ. ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ *ἀποκλείνει, ἐνῶ ἐκείνη τῆς σειρᾶς* $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ *συγκλίνει στὸν ἀριθμὸ* $\pi^2/6$. *Ἂς θυμηθοῦμε ἐπίσης τὴν περίπτωση τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς. Δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ* $-1 < q < 1$ *ἐρωτᾶται ἂν τὸ ἄθροισμα*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

τείνει σὲ κάποιο ὅριο καὶ ἂν ναὶ ποιὸ εἶναι τὸ ὅριο αὐτό. Γιὰ νὰ ἀπαντήσομε στὸ ἐρώτημα αὐτὸ θεωροῦμε τὰ ἀθροίσματα

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

τὰ ὁποῖα γράφονται

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅσο τὸ n *γίνεται μεγαλύτερο τὸ* q^{n+1} *γίνεται μικρότερο, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ* S_n *πλησιάζει τὸν ἀριθμὸ* $1/(1-q)$, *γεγονὸς ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψουμε*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Ἄς περιγράψομε τώρα τὸν τρόπο κατασκευῆς τοῦ Fractal ποὺ φέρει τὴν ὀνομασία «Νησίδα τοῦ Koch».

Βῆμα 1: Θεωροῦμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο, T, πλευρᾶς α.

Βῆμα 2: Κατασκευάζομε 3 ἰσόπλευρα τρίγωνα τὸ καθένα μὲ πλευρὰ τὸ 1/3 τῆς α, καὶ τὸ τοποθετοῦμε στό, T, ὅπως φαίνεται στὸ παρακάτω σχῆμα. Τὸ προκῦπτον σχῆμα ἔχει περίγραμμα ἀποτελούμενο ἀπὸ $3\times 4=12$ εὐθύγραμμα τμήματα ἕκαστον μήκους α/3.

Βῆμα 3: Κατασκευάζομε $3\times 4=12$ ἰσόπλευρα τρίγωνα τὸ καθένα μὲ πλευρὰ (1/3) (1/3)α καὶ τὰ τοποθετοῦμε ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα. Τὸ περίγραμμα τοῦ νέου σχήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ $3\times 4\times 4 = 48$ εὐθύγραμμα τμήματα τὸ καθένα μήκους (1/3) (1/3)α.

Βῆμα 4: . . .

Θεωροῦμε τὴν διαδικασία αὐτὴ ἐπαναλαμβανόμενη ἐπ' ἄπειρον, τὸ δὲ προκῦπτον «νέο» ἀντικείμενο καλεῖται «Νησίδα τοῦ Koch».

Ἡ κατασκευὴ τῆς Νησίδας τοῦ Koch εἶναι ἀνάλογη μὲ ἐκείνην τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, ὅπου ἀκολουθήθηκε ἡ ἑξῆς διαδικασία:

Βῆμα 1: Θεωροῦμε τὸν ἀριθμὸ 1.

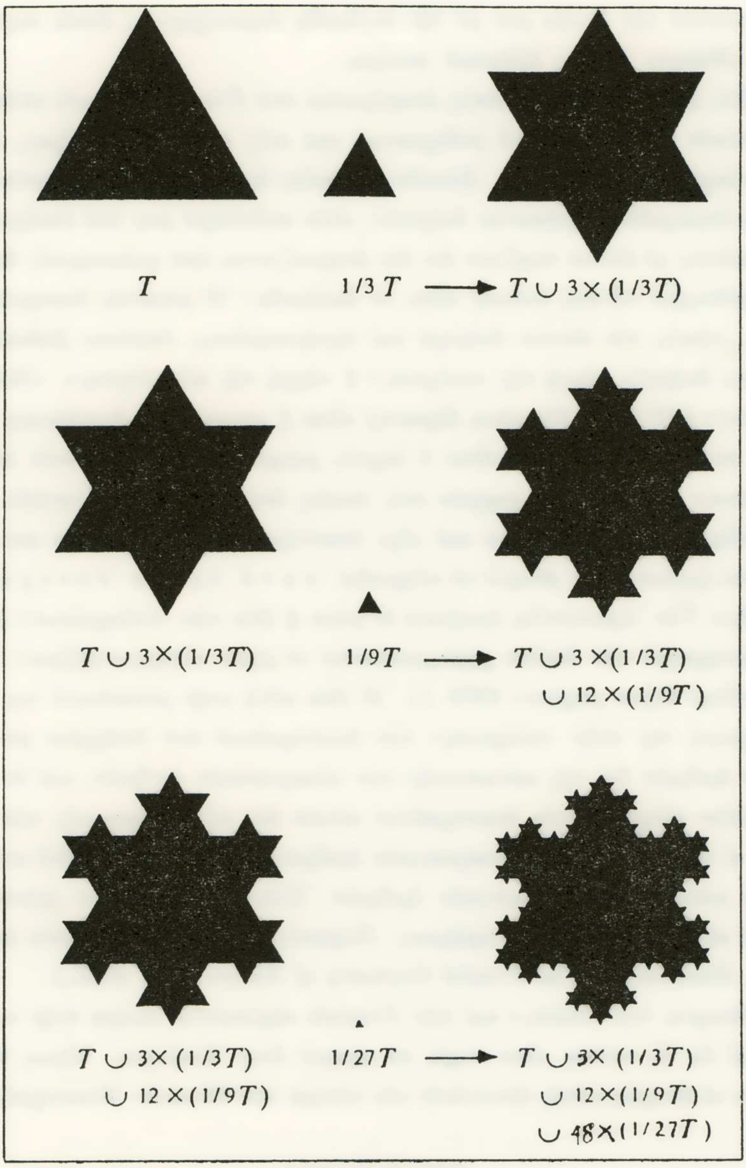
Βῆμα 2: Πολλαπλασιάζομε τὸ 1 ἐπὶ q, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς q τὸν ὁποῖο προσθέτομε στὸ 1 καὶ λαμβάνομε τὸ $1+q$.

Βῆμα 3: Πολλαπλασιάζομε τὸ 1 ἐπὶ $q\times q= q^2$ καὶ προσθέτομε τὸ q^2 στὸ $1 + q$ καὶ λαμβάνομε $1 + q + q^2$

Βῆμα 4: . . .

Καὶ ἐδῶ ἡ ἐπ' ἄπειρον συνεχιζόμενη κατασκευὴ μᾶς ὁδηγεῖ σὲ κάποιο νέο ἀντικείμενο ποὺ εἶναι τὸ ὅριο τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς Νησίδας τοῦ Koch ὑπολογίζεται ὡς τὸ ἄθροισμα μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὅτι ἰσοῦται μὲ $(2/5)\sqrt{3}\alpha^2$. Ἡ ὕπαρξη τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ ἀποτελεῖ ἤδη μιὰ ἰσχυρὴ ἔνδειξη ὅτι ἡ Νησίδα τοῦ Koch εἶναι ἕνα ὑπαρκτὸ ἀντικείμενο. Ἡ αὐστηρὴ μαθηματικὴ ἀπόδειξη ὅτι ἡ παραπάνω περιγραφεῖσα διαδικασία ὁδηγεῖ ὄντως σὲ κάποιο νέο ἀντικείμενο ποὺ ἤδη τὸ ὀνομάσαμε «Νησίδα τοῦ Koch», ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξη μιᾶς νέας γλώσσας ἡ ὁποία θὰ μᾶς ἐπιτρέψει νὰ χειρισθοῦμε τὴν διαδικασία προσθήκης νέων καὶ ὁλοένα μικροτέρων σχημάτων στὴν παραπάνω κατασκευή, ὅπως δηλαδὴ κάναμε στὴν περίπτωση τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς ἢ ὁποιασδήποτε ἄλλης ἀριθμητικῆς σειρᾶς. Ἡ νέα αὐτὴ γλώσσα ὑπάρχει. Ἕνα ἀπὸ τὰ μεγάλα ἐπιτεύγματα τοῦ κλάδου ἐκείνου τῶν μαθηματικῶν



ὁ ὁποῖος φέρει τὸ ὄνομα «σημειακὴ τοπολογία» ὑπῆρξε ἡ ἐπέκταση τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου, ποὺ γνωρίζομε γιὰ τοὺς ἀριθμούς, καὶ σὲ ἀντικείμενα πολὺ πιὸ ἀφηρημένα. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἔννοια «ἀπόσταση τοῦ Hausdorff» ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς γνωστῆς ἔννοιας τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων, παρέχει τὸ πλαίσιο ἐντὸς τοῦ ὁποίου καθίσταται δυνατὴ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ποὺ ἀναφέραμε σχετικὰ μὲ τὴν Νησίδα τοῦ Koch, καθὼς καὶ ἄλλων ἀναλόγων προβλημάτων.

Θὰ κλείσω τὴν ὁμιλία μου μὲ τὴν ἀκόλουθη παρατήρηση ἡ ὁποία περιποιεῖ τιμὴν στὸ ἀθάνατο ἀρχαῖο ἑλληνικὸ πνεῦμα.

Πολλὲς βασικὲς ἰδέες οἱ ὁποῖες ἀναφέρονται στὰ Fractals μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὅτι ἀποτελοῦν ἐφαρμογές, στὰ μαθηματικὰ καὶ στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες, ἀορίστων μὲν ἀλλὰ ἰσχυρῶν (δυναμικῶν) ἐννοιῶν οἱ ὁποῖες ὀφείλονται στὸν Ἀριστοτέλη καὶ οἱ ὁποῖες διαπεροῦν, εὑρίσκονται διάχυτες, στὸν πολιτισμό μας καὶ ἐπιδροῦν ἀκόμα καὶ σὲ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι νομίζουν ὅτι δὲν ἐπηρεάζονται ἀπὸ φιλοσοφικὲς θεωρήσεις. Ἕνα παράδειγμα τέτοιας ἔννοιας εἶναι τὸ ἀκόλουθο: Ὁ γνωστὸς διαπρεπὴς μαθηματικὸς Leibniz, τὸν ὁποῖον ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, ἐπίστευε βαθειὰ σ' αὐτὸ ποὺ ὁ ἴδιος ὀνόμαζε «ἀρχὴ τῆς συνέχειας» ἢ «ἀρχὴ τῆς πληρότητας». «Natura non facit saltus» (Ἡ Φύση δὲν κάνει ἅλματα) εἶναι ἡ γνωστότερη διατύπωση τῆς «ἀρχῆς τῆς συνεχείας» ἡ ὁποία εἶναι ὁ ἰσχνὸς μακρινὸς πρόδρομος τῶν λεγομένων «ἐνδιαμέσων» γεωματρικῶν μορφῶν στὶς ὁποῖες ἀνήκουν καὶ τὰ Fractals. Ὅμως ὁ Ἀριστοτέλης εἶχε ἤδη πιστέψει καὶ εἶχε ὑποστηρίξει ὅτι «τὸ χάσμα ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ δύο ἐμβίων εἰδῶν μπορεῖ νὰ πληρωθεῖ κ α τ ὰ τ ρ ό π ο σ υ ν ε χ ῆ μὲ ἄλλα ἔμβια εἴδη». Τὸν Ἀριστοτέλη ἐγοήτευε ἐν γένει ἡ ἰδέα τῶν «ἐνδιαμέσων» ὄντων γιὰ τὸν χαρακτηρισμὸ τῶν ὁποίων χρησιμοποιοῦσε τὸ ρῆμα «ἐπαμφοτερίζειν» (Ἀριστοτέλους, «Περὶ Ζῴων μορίων» 697b 1). Ἡ ἰδέα αὐτὴ στὴν γενικότητά της εὑρίσκει τὴν ἐφαρμογή της στὴν «πλήρωση» τῶν διαστημάτων ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διὰ τῆς κατασκευῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἐν συνεχεία τὴν ἐπιπλέον πλήρωση τῶν διαστημάτων αὐτῶν διὰ τῆς κατασκευῆς τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι ὅρια κλασματικῶν ἀριθμῶν. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ κατασκευάσθηκε τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐλλείψει διαθέσιμου χρόνου δὲν θὰ ἐπεκταθῶ σὲ περισσότερες λεπτομέρειες. Παραπέμπω τὸν ἐνδιαφερόμενο στὸ βιβλίο τοῦ B.B. Mandelbrot, «The Fractal Geometry of Nature» (βλ. Βιβλ.).

Οἱ Θεωρίες τοῦ «Χάους» καὶ τῶν Fractals εὑρίσκονται ἀκόμα στὴν νεαρή τους ἡλικία καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι νωρὶς νὰ γραφεῖ ἕνας Ἐπίλογος. Ὅμως θεωρεῖται βέβαιο ὅτι οἱ θεωρίες αὐτὲς ἀποτελοῦν νέα σύνορα τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ν. Κ. Ἀρτεμιάδης: «Ἡ Γεωμετρία τὸν Fractals». Π Α Α Τόμ. 63 (1988).
2. M. Barnsley: «Fractals Everywhere» Academic Press, 1988.
3. Π. Παναγιωτόπουλος: «Ἡ Μηχανικὴ τῶν Fractals». Π Α Α Τόμ. 65 (1990).
4. B. B. Mandelbrot: «The Fractal Geometry of Nature» W. H. Freeman and Company, N.Y., 1982.
5. Peitgen - Jürgens - Saupe: «Chaos and Fractals» Springer - Verlag, 1992.