

εἶναι νεώτερα πλάσματα τοῦ 5^{ου} αἰῶνος, ἀλλ' ὅτι ἡ ἀπουσία των ἀπὸ τοὺς ἄλλους κώδικας εἶναι ζήτημα διαφορᾶς γραφῆς. Τὴν γνώμην μου ἐνισχύει καὶ τὸ ἐποιοῦσαν ἡ προβοήμις τοῦ ἐποιοῦσαν, τὸ ὅποῖον φέρεται ὁμοίως μόνον εἰς τὸν Ἀλεξανδρινὸν κώδικα. Δὲν ἦτο δυνατόν νὰ πλασθῇ ὁ τύπος ὁκτὼ αἰῶνας βραδύτερον, ἐνῶ ὁ τονικῶς ἐξωμαλισμένος ἐποιοῦσαν (Ίωβ 1, 4) ἐλέγετο τὸν 3^{ον} π. Χ. αἰῶνα. Ἡ διαφορὰ τοῦ ἐποιοῦσαν ἀπὸ τὸ ἐποιοῦσαν καὶ γενικῶς ἀπὸ τοὺς λοιποὺς τονικῶς ἐξωμαλισμένους παρατατικούς ἐξηγεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἄλλος ἦτο ὁ μεταφραστὴς τῶν Μακκαβαίων καὶ ἄλλοι τῶν λοιπῶν βιβλίων.

Διὰ τῶν παρατηρήσεων τούτων ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ νέα δημοτικὴ ἀρχίζει ἀπὸ τοὺς π. Χ. αἰῶνας καὶ ὅτι ἂν γράφωμεν σήμερον ἐπολεμοῦσα ἀντὶ ἐπολέμουν, γράφομεν πάντως ἀρχαῖα Ἑλληνικά.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. — Über die Beweglichkeit der Polyeder. Das statische Analogon* von **A. Roussopoulos**. Ἀνεκρινώθη ὑπὸ κ. Κωνσταντίνου Μαλτέζου.

I. DAS KONTINUIERLICHE POLYEDER UND SEINE ELEMENTE. DEFINITIONEN. — 1. — Ein beliebig zweiseitiges Polyeder im Raume wird durch eine kontinuierliche polyedrische Haut mit ebenen polygonalen Flächen gestaltet.

Zwei beliebige beiliegende Flächen des Polyeders haben eine Seite ihres polygonalen Umrisses gemeinsam, die man als Kante des Polyeders bezeichnet. Jede freie Seite der Flächen, die nämlich nur einer Fläche gehört, heisst Seite des Polyeders. Ein geschlossenes Polyeder wird keine Seite besitzen. Die Seiten eines offenen Polyeders bilden im Raume einen

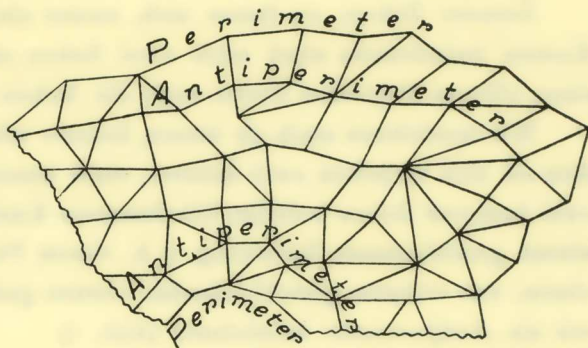


Abb. 1.

oder mehrere geschlossene Polygonzüge, die wir als Perimeter des offenen Polyeders bezeichnen können. (Abb. 1).

2.— Zwei oder mehrere aufeinander folgende Seiten einer Fläche

* Α, ΡΟΥΣΟΠΟΥΛΟΥ. — Ἐπὶ τῶν κινητῶν πολυέδρων καὶ τοῦ στατικῆς ἀναλόγου αὐτῶν.

können, ohne Einfluss auf die späteren Betrachtungen, durch ihre Sehne ersetzt werden, sodass jede Seite einer beliebigen Fläche immer zwischen zwei Kanten derselben Fläche sich befindet. (Abb. 2^a).

Eine mehrfach zusammenhängende polygonale Fläche (Abb. 2^{c,d}) können wir durch ein beliebig aus einfach zusammenhängenden Flächen (Abb. 2^b) gestaltetes Polyeder ersetzen, dessen Perimeter mit der Perimetern

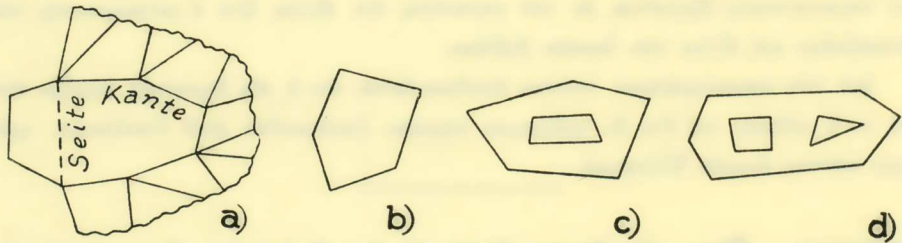


Abb. 2.

der ersetzten Fläche zusammenfallen. Es wird nur beachtet, dass das Ersatzpolyeder ein unbewegliches Polyeder sein muss, wie es später gezeigt wird.

So werden wir uns im Folgenden mit Polyedern beschäftigen die nur einfach zusammenhängende Flächen besitzen.

3.—Kanten und Seiten stossen sich an den *Ecken* des Polyeders, die auch die Ecken der polygonalen Flächen bilden. Wir bezeichnen weiter:

Innere Ecken an denen sich nur Kanten stossen.

Äussere Ecken, an denen sich, ausser einer beliebigen Nummer von Kanten (mindestens eine) noch zwei Seiten stossen. Die äusseren Ecken eines offenen Polyeders bilden auch die Ecken eines Perimeters.

Wir bezeichnen auch als innere, äussere oder freie eine Kante, je nachdem sie sich zwischen zwei inneren, einer inneren und einer äusseren oder zwei äusseren Ecken befindet. Die äusseren Kanten erstrecken sich zwischen einem geschlossenen Seitenzug, d. h. einem Perimeter des Polyeders, und einem, den ersteren gleichlaufenden ebenso geschlossenen Kantenzug, den wir als *Antiperimeter* bezeichnen (Abb. 1).

Zwischen einem Perimeter und dem gleichlaufenden Antiperimeter wird ein ringförmiger Teil des Polyeders bestimmt, welcher nur äussere Kanten als Sehnen besitzt, und welchen wir als *Perimeterstreifen* bezeichnen (Abb. 1).

BEMERKUNG: Wenn auf der Kante AB einer Fläche F sich mehrere Ecken des Polyeders befinden, muss man jeden Teil der Strecke AB als einzelne Kante der Fläche F rechnen. (Abb. 3).

II. DIE BEWEGLICHKEIT DES POLYEDERS. — 4. — Als beweglich bezeichnet man bekanntlich ein Polyeder, wenn eine Deformation des Polyeders möglich ist, nur durch Veränderung eines oder mehrerer Keilwinkel, zwischen zwei benachbarten Flächen um die gemeinsame Kante,

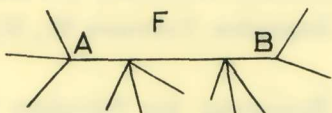


Abb. 3.

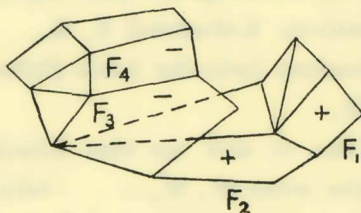


Abb. 4.

ohne also irgendeine Veränderung der ebenen Winkel der Flächen oder der Länge der Seiten oder Kanten.

Um die Bewegung des Polyeders im Raume völlig und eindeutig darzustellen, führen wir die folgenden Festsetzungen ein:

a) Eine der beiden entgegengesetzten Ansichten der kontinuierlichen polyedrischen Fläche des Polyeders bezeichnen wir als positiv, die andere als negative. (Abb. 4).

b) Die relative Rotation zweier benachbarten Flächen um ihre gemeinsame Kante mn (Abb. 5^a), d. h. die Änderung des eingefassten Keilwinkels, werden wir als positive bezeichnen, wenn der zwischen den positiven Ansichten der Flächen sich befindende Keilwinkel φ vergrößert und als negativ bezeichnen, wenn er verkleinert wird. Diese relative Rotation oder Winkeländerung bezeichnen wir W ($=\Delta\varphi$).

c) Die relative Rotation W wird nach Grösse und Richtung durch zwei gleichgrosse und entgegengesetzte auf der Kante (Rotationsachse) mn

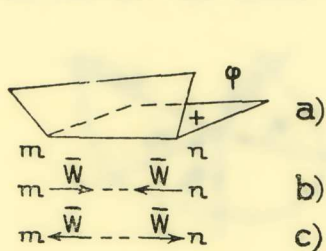


Abb. 5.

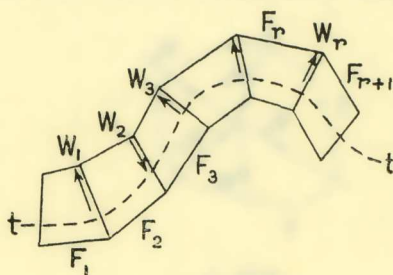


Abb. 6.

liegende Vektoren von der Grösse $|W|$ dargestellt in der Weise, dass beide Vektoren die Enden der Kante mn gegeneinander zusammenziehen (Abb. 5^b) oder abstossen (Abb. 5^c), je nachdem W positiv oder negativ ist.

III. INFINITESIMALE BEWEGLICHKEIT. DAS STATISCHE ANALOGON. —

5. — Ist eine kontinuierliche Linie tt auf dem Polyeder geführt, so trifft sie nacheinanderfolgend die Kanten K_1, K_2, \dots, K_r (Abb. 6). Von jedem der Vektorpaare $(W_1, W_1), (W_2, W_2), \dots$, welche die Änderung der positiven Keilwinkel K_1, K_2, \dots darstellen, betrachten wir nur die auf derselben Seite der Linie (Schnittes) tt liegenden Vektoren W_1, W_2, \dots, W_r .

Wenn es sich um eine infinitesimale Bewegung des Polyeders handelt¹, also wenn W_1, W_2, \dots infinitesimale Grössen sind, dann setzen sich die Vektoren der relativen infinitesimalen Rotationen als Kräfte im Raume zusammen. Nämlich, die gegenseitige Bewegung der Flächen F_1 und F_2 wird eine Rotation die nach Grösse und Richtung durch den Vektor W_1 gegeben ist, die gegenseitige Momentanbewegung der Flächen F_1 und F_3 wird eine Rotation, die nach Richtung und Grösse durch die resultierende R_w der Vektoren W_1 und W_2 gegeben wird, u.s.w. Im allgemeinen die gegenseitige Momentanbewegung der Flächen F_1 und F_{r+1} wird durch die, nach den Regeln der räumlichen Statik zu findende, resultierende R_w der Vektoren W_1, W_2, \dots, W_r nach Richtung und Grösse gegeben.

6.—Es folgt, nach Obigem, für eine infinitesimale Bewegung irgendwelches Polyeders:

a) Auf irgendeinen geschlossenen Weg tt über das Polyeder geführt, muss immer die resultierende R_w gleich Null sein, da die relative Rotation einer Fläche gegen sich gleich Null sein muss (Abb. 1). So bilden die Rotationen W ein Gleichgewichtssystem.

b) Um eine innere Ecke wird auch immer $R_w = 0$, weil es immer

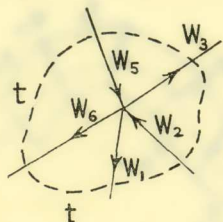


Abb. 7.

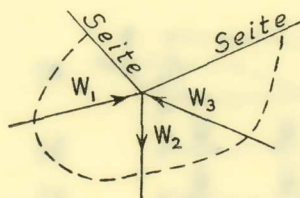


Abb. 8.

einen geschlossenen Weg tt gibt (Abb. 7), also um eine innere Ecke bilden die Rotationen W stets ein Gleichgewichtssystem.

¹ Siehe A. KOKOTSAKIS: Über bewegliche Polyeder, *Mathematische Annalen*, 1932, 4.

c) Um eine offene Ecke oder über einen beliebigen offenen Weg tt ist eine relative Rotation der Endflächen möglich, insofern der Zusammenhang des ganzen Polyeders es nicht verhindert; es kann folglich $Rw \neq 0$ sein (Abb. 8).

Es folgt unmittelbar:

Eine innere Ecke bei der genau drei nicht koplanäre Kanten sich stossen ist starr, weil kein Gleichgewicht möglich ist zwischen drei nicht koplanären von Null verschiedenen Kräften die sich in einem Punkte zusammenstossen. Dagegen wenn die drei Kanten koplanäre sind, dann ist eine infinitesimale Bewegung möglich.

Eine innere Ecke mit n Kanten ($n > 3$) besitzt $n - 3$ Bewegungsfreiheiten, insofern der Zusammenhang des ganzen Polyeders es nicht verhindert, da es möglich ist den $n - 3$ beliebigen Kanten beliebige Winkeländerungen W_1, W_2, \dots, W_{n-3} zuzuordnen und nach den Regeln der räumlichen Statik für die übriggebliebenen 3 Kanten Werte W zu bestimmen, die mit W_1, W_2, \dots, W_{n-3} ein Gleichgewichtssystem bilden.

7. Nach den vorigen Betrachtungen, können wir die Deformierbarkeit eines Polyeders durch die einzige Bedingung feststellen, dass für alle möglichen auf den Polyeder zu führenden geschlossenen Wege, die Winkeländerungsvektoren W , die nach der einen Seite des Weges betroffen sind, stets ein Gleichgewichtssystem bilden.

Diese Bedingung lässt sich durch analytische oder geometrische Beziehungen für jeden speziellen oder allgemeineren Fall ausdrücken. Es ist aber einfacher, und interessant, das Problem der Beweglichkeit des Polyeders auf ein Analogon aus der räumlichen Statik durchzuführen.

8. Stellen wir uns nämlich vor, ein räumliches Fachwerk, dessen alle Stäbe mit den inneren Kanten des Polyeders zusammenfallen, das also dem Polyeder, ohne Perimeterstreifen, wenn es sich um ein offenes Polyeder handelt, entspricht; die Ecken des Polyeders werden als Gelenkknoten des Fachwerks dienen; die Vektorpaare W , d.h. die Winkeländerungen auf jeder inneren Kante, mögen die Stabkräfte des Fachwerks darstellen (z. B. + Zug, — Druck). Wir nennen das Fachwerk dem Polyeder kollinear. Nach dieser Definition bilden die Antiperimeter eines offenen Polyeders die Randlinien des kollinearen Fachwerks.

Die Gleichgewichtsbedingung $Rw = 0$ der Winkeländerungen für einen beliebigen geschlossenen Weg tt auf dem Polyeder, stimmt mit der Be-

dingung überein, dass die Stabkräfte des kollinearen Fachwerks in irgend einem Schnitte des Fachwerks, der nach dem geschlossenen Weg tt geführt ist, in Gleichgewicht stehen.

Was aber die Perimeterstreifen in offenen Polyedern betrifft, so ist es leicht uns zu überzeugen, dass ein ebenso geschlossener Weg tt zwischen Perimeter und Antiperimeter alle äusseren Kanten des Streifens (Sehnen des Streifens) schneidet und noch eine Gleichgewichtsbedingung $R_w = 0$ ergibt. Man kann folglich die Winkeländerungen W (und nämlich von jedem Vektorpaar W , W den inneren Vektor) der äusseren Kanten als Kräfte auffassen, welche als äussere Lasten das kollineare Fachwerk an den auf jeden den Antiperimetern sich befindenden Knoten belasten und welche für jeden einzelnen Antiperimeter ein Gleichgewichtssystem bilden.

IV. GRUNDBEDINGUNGEN. — 9. — Aus Obigen folgt das Statische Analogon für die Beweglichkeit des Polyeders.

Ein System von möglichen infinitesimalen Winkeländerungen W eines geschlossenen Polyeders stimmt mit einem möglichen Selbstspannungszustand des konjugierten Fachwerks überein.

Man kann folglich nach bekannten Sätzen über Fachwerke, die Beweglichkeit eines geschlossenen Polyeders durch folgende Grundbedingungen ausdrücken:

A) Wenn das kollineare Fachwerk F eines geschlossenen Polyeders P statisch unbestimmt ist, ist P beweglich, da ein Selbstspannungszustand immer für F möglich wird. Der Grad der Bewegungsfreiheit von P ist dem Grad der statischen Umbestimmtheit von F gleich, d. h. man kann ebenso viele von einander unabhängige infinitesimale Bewegungen dem Polyeder geben, als das kollineare Fachwerk statisch überzählige Stäbe enthält.

B) Wenn P statisch bestimmt oder labil ist, ist P starr, da es für F keinen möglichen, den Gleichgewichtsbedingungen genügenden Selbstspannungszustand gibt.

Für ein geschlossenes konvexes Polyeder, wenn e, f, k die Anzahl seiner Ecken, Flächen und Kanten darstellt, gelten bekanntlich die Eulersche Gleichungen

$$(1) \quad e + f = k + 2 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad f \leq 2e - 4. \quad \text{Da aber für ein statisch unbestimmtes Fachwerk}$$

$$(3) \quad k > 3e - 6$$

sein soll, folgt aus (1) dass

$$(4) \quad f > 2e - 4$$

sein muss, was der Gl. (2) widerspricht. Es folgt also die bekannte Forderung des Satzes von Cauchy, nach welcher ein geschlossenes konvexes Polyeder indeformierbar ist.

10.—Für die Beweglichkeit eines offenen Polyeders werden weiter besondere Bedingungsgruppen für jeden Perimeterstreifen und für das innere des Polyeders gelten. Nämlich:

A.—In jedem Perimeterstreifen des Fachwerks sollen die äusseren Kanten so liegen, dass ein Gleichgewichtssystem von Kräften die auf den Geraden der Kanten wirken, möglich ist. Entspricht dem inneren Polyeder (siehe unter B) ein labiles kollineares Fachwerk, so soll das Antiperimeter des Streifens als Seilpolygon dieser äusseren Kräfte dienen können.

Die Zahl der Kräfte in diesem System, deren Grösse wir beliebig wählen können, um noch ein Gleichgewichtssystem zu erhalten, entspricht dem Grad der *äusseren* Bewegungsfreiheit des Polyeders.

B.—Das innere Polyeder (ohne Perimeterstreifen) ist beweglich nur wenn das ihm entsprechende kollineare Fachwerk F statisch unbestimmt ist. Auch hier ist der Grad der statischen Umbestimmtheit von F gleich dem Grad der *inneren* Bewegungsfreiheit des Polyeders. Innere und äussere Bewegungsfreiheit geben die ganze Bewegungsfreiheit des Polyeders.

11.—Die oben durch das Statische Analogon gefundenen Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die infinitesimale Beweglichkeit des Polyeders, aber bloss notwendig für die endliche Beweglichkeit.

Sie können dadurch leichter in den einzelnen Fällen analytisch oder geometrisch interpretiert werden.

Sie gelten auch für ein in sich eindringendes Polyeder.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Διακρίνονται ἐν πρώτοις τὰ ἀνοικτὰ πολύεδρα εἰς ἐσωτερικὴν περιοχὴν καὶ (ἐξωτερικὰς) περιμετρικὰς κλειστὰς ζώνας, τῶν κλειστῶν πολυέδρων ἀποτελουμένων μόνον ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς περιοχῆς. Καθορίζεται εἴτα ἡ μία τῶν δύο ὀψων τῆς συνεχοῦς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας ὡς θετική, ἡ δὲ παραμόρφωσις τοῦ πολυέδρου διὰ μεταβολῆς τῶν διέδρων γωνιῶν ἄνευ μεταβολῆς τῶν ἐπιπέδων τοιούτων καθορίζεται μονοτίμως τῇ βοηθεῖᾳ διπλῶν ἴσων καὶ ἀντιθέτων διανυσμάτων τῶν γωνιακῶν μεταβολῶν.

Διὰ τῆς παρουσίας ἀνακρινώσεως ἀποδεικνύεται, βάσει τούτου καὶ βάσει τῆς διατηρήσεως τῆς συνεχείας τοῦ πολυέδρου, ὅτι ἡ ἀπειροστικὴ παραμόρφωσις τοῦ πολυέδρου

δύνανται νὰ ἀπεικονισθῇ μονοτίμως καὶ ἀντιστρεπτικῶς διὰ τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως ἐνὸς ἰδεατοῦ δικτυώματος, τοῦ ὁποίου τὰς ράβδους συνιστῶσιν αἱ ἐσωτερικαὶ ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου. Τὸ δικτύωμα τοῦτο καλεῖται *συγγραμικόν* τῷ πολυέδρῳ.

Διαχωρίζεται κατόπιν ἡ παραμόρφωσις τῆς ἐσωτερικῆς περιοχῆς, ἀνεξάρτητος τῆς παραμορφώσεως τῶν περιμετρικῶν ζωνῶν, καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ γωνιακαὶ μεταβολαὶ περὶ τὰς ἐγκαρσίας ἀκμὰς τῶν περιμετρικῶν ζωνῶν ἀπεικονίζονται δι' εἰδικῆς ἐξωτερικῆς φορτίσεως τοῦ συγγραμτικοῦ δικτυώματος.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ *στατικοῦ ἀναλόγου* τούτου ἀπλοποιεῖ σημαντικῶς τὴν μελέτην τῆς παραμορφώσεως τοῦ πολυέδρου. Μεταξὺ ἄλλων ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὅτι διὰ νὰ εἶναι κινήτων ἐν κλειστὸν πολυέδρον, πρέπει τὸ συγγραμικόν δικτύωμα νὰ εἶναι στατικῶς ἀόριστον, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν ἀνεξαρτήτων ἐλευθεριῶν κινήσεως τοῦ πολυέδρου συμπίπτει μὲ τὸν βαθμὸν τῆς στατικῆς ἀοριστίας τοῦ δικτυώματος. Ἀντίστοιχοι συνθῆκαι προκύπτουν διὰ τὸ ἀνοικτὸν πολυέδρον, εἰς τὸ ὁποῖον διακρίνονται αἱ ἀνεξάρτητοι ἐλευθερίαι κινήσεως τῆς ἐσωτερικῆς περιοχῆς καὶ ἐκάστης τῶν περιμετρικῶν ζωνῶν.

Τέλος βάσει τῶν ἐξισώσεων τοῦ *Fuler* διὰ τὸ πολυέδρον ἐπαληθεύεται ἡ συνθήκη τοῦ *Gauchy* καὶ διατυποῦνται αἱ γενικαὶ βασικαὶ συνθῆκαι τῆς κινήτικότητος τοῦ πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀποτελοῦν τὰς ἀναγκαίας καὶ ἱκανὰς συνθήκας διὰ τὴν ἀπειροστήν κινήτικότητα, τὰς ἀναγκαίας δὲ διὰ τὴν πεπερασμένην.

Αἱ συνθῆκαι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἐν ἑαυτοῖς εἰσδύοντα πολυέδρα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ. — *Sur la constitution et les dimensions de l'électron**, par *Jean Romaidès*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

Pour éviter les difficultés que présentait l'évaluation de l'énergie propre de l'électron au repos, la théorie électromagnétique classique a dû introduire la notion de l'électron corpusculaire à dimensions finies. En le supposant même de forme sphérique avec sa charge électrique comme uniformément répartie sur la surface, elle a pu en calculer le rayon. Mais cette hypothèse, en donnant lieu à de nouvelles complications, dont la plus grave serait l'instabilité du modèle électronique, trouve en outre des valeurs différentes pour le rayon selon que l'on considère l'électron au repos ou en mouvement lent par rapport à la vitesse de la lumière. Ainsi on trouve pour le cas électrostatique:

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi m_0 c^2}, \quad (1)$$

tandis que pour le cas électromagnétique du mouvement ce rayon aurait la valeur différente:

* ΙΩΑΝΝ. ΡΩΜΑΪΔΟΥ. — Ἐπὶ τῆς συστάσεως καὶ τῶν διαστάσεων τοῦ ἡλεκτρονίου.