ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 12ΗΣ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1968

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— **Approximationstheorie für metrische lineare Räume,** *von G. Pantelidis* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φ. Βασιλείου.

Die Konvexität der Kugeln in den normierten Räumen und die Existenz eines nicht-trivialen topologischen Duals in diesen Räumen geben uns die Möglichkeit zur Entwicklung einer, trotz der vielen offenen Probleme, vollständigen Approximationstheorie in diesen Räumen. Die wichtigsten dieser Resultate, insbesondere für die Approximation durch Teilräume, sind in einem Buch von I. SINGER (**14**) zusammengestellt. Er gibt weiter in «Anexa II» die bis dahin bekannten Resultate für metrische Räume an. Diese Resultate sind verhältnismässig arm, da die Kugeln der metrischen linearen Räume, im allgemeinen, nicht konvex sind und es keine Dualitätstheorie für metrische lineare Räume gibt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximationstheorie für eine grosse Klasse von metrischen Räumen entwickelt, nämlich für die linearen metrischen Räume. So erhalten wir fast alle bekannten Sätze als einfache Korollare.

Im Folgenden sei G eine Teilmenge eines reellen metrischen Raumes (E, d), $x_0 \varepsilon E$ und

$$P_G(x_0) := \{ g_0 \varepsilon G \,;\ d(x_0, g_0) = d(x_0, G) := \inf_{g \varepsilon G} d(x_0, g) \}$$

bezeichne die Menge der Elemente bester Approximation von x_0 durch G.

* Γ. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ, **Προσεγγιστικὴ θεωρία τῶν γραμμικῶν μετρικῶν χώρων.**

Die Elemente von $P_G(x_0)$ werden im Folgenden mit $\pi_G(x_0)$ bezeichnet.

Mit P_G wird die sogenannte metrische Projektion bezeichnet, das heisst die Abbildung, die jedem $x \varepsilon E$ die Menge $P_G(x)$ zuordnet.

Ist $P_G(x)$ für jedes $x \varepsilon E$ nicht leer, so heisst die Menge G proximinal. G heisst eine Čebyšev-Menge (Č-Menge), wenn $P_G(x)$ für jedes $x \varepsilon E$ ein-elementig ist. Mit

$$B(x, r) := \{ y \varepsilon E ; \quad d(x, y) \leqq r \}$$

bzw.

$$S(x, r) := \{ y \varepsilon E ; \quad d(x, y) = r \}$$

wird die Kugel (bzw. die Sphäre) um x mit Radius r bezeichnet.

Aus den bekannten Sätzen über Kugelkompaktheit* ergibt sich die Frage nach der Beziehung zwischen der Kugelkompaktheit einer Menge und ihrem Rand und der Dimension dieser Menge. Wir zeigen nämlich:

Satz 1. Sei (E, d) ein reeller metrischer linearer Raum (RMLR), G eine abgeschlossene Teilmenge von E und für jedes $g \varepsilon \partial G$ ($\partial G =$ = Rand von G) enthält

$$\pi_G^{-1}(g) := \{ x \varepsilon E ; \, g \varepsilon P_G(x) \}$$

$\{ g \}$ als echte Teilmenge. Dann gilt:

a) G ist kugelkompakt

impliziert

b) Es gibt eine Umgebung $U(\partial G) \subset G$ des Randes von G, die lokalkompakt ist.

Ist G eine Č-Menge und approximativ kompakt, dann sind a) und b) äquivalent.

Satz 2. Sei G ein echter linearer Teilraum eines RMLR (E, d). Dann gilt: Ist G kugelkompakt, so ist G endlich-dimensional.

Die Charakterisierung der Elemente bester Approximation für normierte lineare Räume durch Elemente eines linearen Teilraumes ist

---

* Eine Teilmenge M eines reellen metrischen linearen Raumes (E, d) heisst «kugelkompakt» genau dann, wenn es zu jedem $x \varepsilon E \setminus M$ ein $r \varepsilon R+$ mit $r > d(x, M)$ gibt, so dass die Menge

$$\{ y \varepsilon M ; \, d(x, y) \leqq r \}$$

kompakt ist. (vgl. [3] und [12]).

sehr eng mit der Existenz eines nicht-trivialen topologischen Duals verbunden, so sind wir gezwungen, für entsprechende Sätze für metrische lineare Räume einen geeigneten Dualraum einzuführen. Wir definieren also den reellen metrischen linearen Raum

$$E^+ := \left\{ f : E \longrightarrow R \,;\ \| f \| := \sup_{x \varepsilon E \setminus \{0\}} \frac{| f(x) |}{d(x, 0)} < \infty ,\ x \varepsilon E \right\}$$

und den konvexen Kegel

$$E^{\vee} := \left\{ f \varepsilon E^+ ;\quad f(0) = 0 ,\quad f(x+y) \leqq f(x) + f(y) ,\ x,y \varepsilon E \right\}$$

von E^+, den wir den «D u a l k e g e l» von E nennen.

Es ist klar, dass für jeden reellen normierten linearen Raum stets die Inklusion $E^{\vee} \supset E^*$ gilt, wobei E^* der topologische Dual ist.

Im Folgenden ist ein linearer Teilraum stets ein abgeschlossener linearer Teilraum.

Nun zeigen wir folgenden Charakterisierungssatz:

Satz 3. Sei G ein linearer Teilraum eines RMLR (E, d) und $x_o \varepsilon E \setminus G$, so ist $g_o \varepsilon P_G(x_o)$ genau dann, wenn es ein $f \varepsilon E^{\vee}$ mit

i) $| f(x) - f(y) | \leqq d(x,y) \qquad x,y \varepsilon E$

ii) $f(x+g) = f(x) ,\quad x \varepsilon E ,\quad g \varepsilon G$ oder $f_{|G} = 0$

iii) $f(x_o - g_o) = d(x_o , g_o)$

gibt.

Für p-normierte Räume gilt weiter

Satz 4. Sei $p \varepsilon (0, 1]$, G ein linearer Teilraum eines p-normierten linearen Raumes (E, d) und $x_o \varepsilon E \setminus G$, so ist $g_o \varepsilon P_G(x_o)$ genau dann, wenn es eine p-homogene Funktion $f \varepsilon E^{\vee}$ mit i), ii) und iii) von Satz 3 gibt.

Der Satz 3 unterscheidet sich vom entsprechenden Satz für einen normierten Raum nur dadurch, dass f eine subadditive (nicht notwendig lineare) Funktion ist.

Entsprechend den von F. E. BROWDER (Problèmes non-linéaires, Les Presses de l'Université de Montréal 1965) gefundenen Eigenschaften der dort definierten Dualabbildung für Banachräume werden ebenfalls Beziehungen zwischen den Elementen $f \varepsilon E^{\vee}$, die die Elemente bester

Approximation chatakterisieren, und der bei uns definierten Dualabbildung im Dualkegel angegeben.

Bezeichnet $C(E^V)$ die Menge der konvexen Teilmengen von E^V und ist G ein Teilraum von E, so heisst die Abbildung

$$T_G : E \longrightarrow C(E^V)$$

mit

$$T_G(x) := \{ f \varepsilon E^V ; \ \| f \| \leqq 1, \ \ f_{|G} = 0 \ \text{ und } \ f(x) = d(x, G) \}$$

die «Dualabbildung bezüglich G».

Zunächst gilt:

Satz 5. Sei G ein linearer Teilraum eines RMLR (E, d), $x \in E \setminus G$ und T_G die Dualabbildung bezüglich G, so gibt es zu jedem $g \varepsilon P_G(x)$ ein $f \varepsilon T_G(x)$ mit $f(x) = d(x, g)$.

Es stellt sich natürlicher Weise die Frage, wann stetige lineare Funktionale die Elemente bester Approximation charakterisieren. Hiermit geben wir folgende Sätze zur Antwort:

Satz 6. Sei G ein linearer Teilraum eines RMLR (E, d) und für jedes $x \varepsilon E \setminus \{0\}$ sei φ_x der Linearitätsmodul von d in x, ferner gebe es zu jedem $y \varepsilon E \setminus \{0\}$ ein $t_y \varepsilon R^+$ mit

$$t_y > \varphi_y(t_y).$$

Dann gibt es zu jedem $z \varepsilon E \setminus G$ mit $P_G(z) \neq \emptyset$ kein stetiges lineares Funktional f auf E mit $f \varepsilon T_G(z)$.

Als Korollar erhält man:

Satz 7. Ist $p \varepsilon (0,1)$ und G ein linearer Teilraum eines reellen p-normierten linearen Raumes (E, d), so gibt es zu jedem $x \varepsilon E \setminus G$ mit $P_G(x) \neq \emptyset$ kein lineares stetiges Funktional f auf E mit $f \varepsilon T_G(x)$.

Den Zusammenhang der Menge $T_G(x)$ und der extremalen Teilmengen $\mathfrak{E}(B_{E^V})$ von $B_{E^V} := \{ f \varepsilon E^V ; \| f \| \leqq 1 \}$ stellen folgende Sätze dar:

Satz 8. Ist G ein linearer Teilraum eines RMLR (E, d) und T_G die Dualabbildung bezüglich G, so ist für jedes $x \varepsilon E$ mit $P_G(x) \neq \emptyset$

$$T_G(x) \subset S_{E^V} := \{ f \varepsilon E^V ; \ \| f \| = 1 \}.$$

Satz 9. Sei G ein linearer Teilraum eines RMLR (E, d), T_G die Dualabbildung bezüglich G und zu jedem $a \varepsilon R^+ \setminus \{0\}$ und jedem $g \varepsilon G \setminus \{0\}$ gebe es ein $n \varepsilon N$ mit

$$na > d(ng, 0).$$

Dann ist für jedes $x \varepsilon E$ mit $P_G(x) \neq \emptyset$

$$T_G(x) \varepsilon \mathfrak{E}(B_{E^V}).$$

Insbesondere gilt für p-normierte Räume:

Korollar 10. Sei $p \varepsilon (0, 1)$ und G ein linearer Teilraum eines reellen p-normierten linearen Raumes (E, d), so ist für jedes $x \varepsilon E$ mit $P_G(x) \neq \emptyset$

$$T_G(x) \varepsilon \mathfrak{E}(B_{E^V}).$$

Im folgenden Teil werden für diejenigen Sätze, die formal den bekannten Sätzen für normierte Räume entsprechen, oder sich etwa dadurch unterscheiden, dass E^* durch E^V ersetzt ist, nur Literaturstellen angegeben, aus denen sie sich herleiten lassen. Für die Eindeutigkeit der Elemente bester Approximation gelten die den Sätzen 3. 1 und 3. 2 in [**14**] Cap. I entsprechenden Ergebnisse.

Die Eigenschaften der metrischen Projektion P_G entsprechen Satz 6. 1 [**14**] Cap. I, und wir zeigen mit dessen Hilfe folgende Homogenitätseigenschaft:

Satz 11. Sei (E, d) ein RMLR, G ein linearer Teilraum, wobei der Linearitätsmodul $\varphi_{x-g}(t)$ für jedes $x \varepsilon E$ eine monoton wachsende Funktion bezüglich $x - g$, $g \varepsilon G$, ist, d. h.

$$\varphi_{x-g}(t) \leqq \varphi_{x-g'}(t)$$

wenn $d(x-g, 0) \leqq d(x-g', 0)$ gilt. Dann gilt für alle $t \varepsilon R$

$$tP_G(x) = P_G(tx).$$

Korollar 12. Ist (E, d) ein p-normierter, reeller metrischer linearer Raum, G ein linearer Teilraum, so ist für jedes $x \varepsilon D(P_G)$

$$P_G(tx) = tP_G(x).$$

Die Additivität von P_G ist eine sehr starke Voraussetzung. Ist nämlich für alle n-dimensionalen mit $1 \leqq n \leqq \dim E - 2$ linearen Teilräume G eines Banachraumes E (dimE $\geqq$ 3) additiv und einwertig, so ist E ein Hilbert-Raum. Dazu beweisen wir folgende Sätze:

Satz 13. Sei (E, d) ein RMLR, G ein proximaler linearer Teilraum endlicher Codimension k und $\pi_G^{-1}(0)$ enthält einen linearen Teilraum A der Dimension k, dann gibt es eine additive Selektion π_G^0, so dass für alle x, y ε E $\setminus$ A gilt

$$\pi_G^0(x+y) = \pi_G^0(x) + \pi_G^0(y).$$

Korollar 14. Sei (E, d) ein p-normierter reeller metrischer linearer Raum und H eine proximale Hyperebene ($\neq$ E) von E, dann hat P_H eine additive Selektion π_H^0. Ist H Čebyšev, so ist P_H additiv.

Das Korollar 14 ist von I. Singer **[14]** für normierte Räume bewiesen. Die Menge $\pi_G^{-1}(g)$ ist für normierte Räume (G als Teilraum) stets ein konvexer Kegel. Dies ist aber für RMLR nicht wahr.

Wir zeigen dazu durch Korollar 12 und Satz 6.3 **[14]** Cap. I, dass für p-normierte metrische Räume $\pi_G^{-1}(g)$ ein konvexer Kegel ist.

Die Beziehung zwischen $\pi_G^{-1}(0)$ und der Additivität und Einwertigkeit von P_G gibt Satz 6.4 **[14]** Cap. I an.

Zum Schluss weisen wir auf den entsprechenden Satz 6.5 **[14]** Cap. I hin, der die Eigenschaften des Funktionals $e_G(x) := d(x, G)$ betrachtet.

Eine Teilmenge G eines RMLR (E, d) heisst eine «Sonne» genau dann, wenn für jedes x ε E $\setminus$ G $P_G(x) \neq \emptyset$ ist und für jedes t ε R^+ und jedes g ε $P_G(x)$

$$g \,\varepsilon\, P_G(tx + (1-t)g)$$

ist.

Wir zeigen dann folgende Sätze:

Satz 15. Sei (E, d) ein RMLR, G ein proximaler linearer Teilraum, wobei der Linearitätsmodul die Voraussetzungen von Satz 11 für jedes x ε E $\setminus$ G erfüllt, dann ist G eine Sonne.

Korollar 16. Sei p ε (0, 1] und (E, d) ein reeller p-normierter linearer Raum, dann ist jeder proximinale lineare Teilraum G von E eine Sonne.

Wir betrachten weiterhin Existenzräume und erzielen ähnliche Ergebnisse wie im normierten Fall, nämlich:

Satz 17. Sei (E, d) ein reeller p-normierter linearer Raum und G ein linearer Teilraum von E, dann sind folgende Behauptungen äquivalent:

1° G ist proximinal.

2° G ist abgeschlossen und zu jedem linearen Teilraum $F_x \subset E$ $(x \varepsilon E \setminus G)$ der Form $F_x = G + [x]$ existiert ein Element $z \varepsilon F_x \setminus \{0\}$, so dass $0 \varepsilon P_G(z)$.

3° G ist abgeschlossen und zu jedem $y \varepsilon E \setminus G$ gibt es ein $f \varepsilon T_{G,Fy}(y)$ ($T_{G,Fy}$ ist die Dualabbildung bezüglich G in dem Raum F_y), das sein Maximum annimmt.

Für die Abweichung $\delta(A, B) := \sup\limits_{x \varepsilon A} d(x, B)$ von zwei Mengen A und B werden schliesslich folgende Sätze angegeben, nämlich Satz 6.10 [**14**] Cap. I und für p-normierte Räume:

Satz 18. Sei (E, d) ein p-normierter linearer Raum, G ein linearer Teilraum und A eine Teilmenge von E, dann gilt:

$$\delta(A, G) = \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ A \subset G + \lambda B}} \lambda^p,$$

wobei B die Einheitskugel in E ist.

Dieser Satz gilt für normierte Räume (vgl. [**14**]) für $p=1$.

Über die n-dimensionalen Diameter $d_n(A) := d_n(A, E) := \inf\limits_{\substack{G \\ \dim G = n}} \delta(A, G)$ beweisen wir Satz 6.1 [**14**] Cap. II und für p-normierte Räume.

Satz 19. Sei (E, d) ein p-normierter linearer Raum, A eine abgeschlossene, beschränkte und ausgeglichene p-konvexe Menge von E und $0 \varepsilon \mathring{A}$, dann gilt:

$$\sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \lambda B \subset A}} \lambda^p = \inf_{x \varepsilon \partial A} d(x, 0).$$

Dieser Satz gilt auch, wie Satz 18, für normierte Räume mit $p = 1$.

LITERATURVERZEICHNIS

1. G. ALBINUS, Einige Beiträge zur Approximationstheorie in metrischen Vektorräumen, Wiss. Zeits. Techn. Univ. Dresden, 15 (1966) / 1.
2. G. ALBINUS, Ein Beitrag zur approximativen Kompaktheit, Rev. Roum. Math. pures et app. 11 (1966), 793 - 797.
3. G. ALBINUS, Über Bestapproximationen in metrischen Vektorräumen, Dissertation, Dresden 1966.
4. C. BESSAGA, A. PELCZYNSKI, S. ROLEWICZ, Some properties of the norm in F-spaces, Studia Math. 16 (1957) 183 - 192.
5. N. V. EFIMOV, S. B. STECHKIN, Approximative compactness and Chebychev sets, Doklady Akad. Nauk SSSR 140 (1961), 522 - 524 (Russ.); Übersetzt in Soviet Math. Dokl. 3 (1962) 1226 - 1228.
6. M. EIDELHEIT, S. MAZUR, Eine Bemerkung über die Räume von Typus (F), Studia Math. (1938), 159 - 161.
7. K. ISEKI, An Approximation problem in quasi-normed spaces, Proc. Japan acad. 35 (1959), 465 - 466.
8. V. KLEE, Convexity of Chebyshev sets, Math. Annalen, 142 (1961), 292 - 304.
9. G. KÖTHE, Topologische lineare Räume, I, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960.
10. E. MICHAEL, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) 152 - 182.
11. D. PALLASCHKE, G. PANTELIDIS, Homotopieeigenschaften von Sphären in $\varnothing$ - Räumen und approximative Kompaktheit, — Erscheint in Archiv der Mathematik.
12. D. PALLASCHKE, G. PANTELIDIS, Kugelkompaktheit für metrische lineare Räume, — Erscheint in «Schriften der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung» Bonn.
13. I. SINGER, Some remarks on approximative compactness, Rev. Roum. Math. pures et appl., 9 (1961), 507 - 511.
14. I. SINGER, Cea mai buna aproximre in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bucuresti 1967.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φ. Βασιλείου** παρουσιάζων τὴν ὡς ἄνω ἀνακοίνωσιν εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ ὑποβάλω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἀνακοίνωσιν τοῦ κ. Γ. Παντελίδη ἀφορῶσαν εἰς τὴν προσεγγιστικὴν θεωρίαν (Approximationstheorie) τῶν γραμμικῶν μετρικῶν χώρων.

Ὁ κ. Παντελίδης τυγχάνει διδάκτωρ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Heidelberg. Ἐντὸς τῶν προσεχῶν ἑβδομάδων πρόκειται νὰ ἀναγορευθῇ οὗτος ὑφηγητὴς τοῦ ἰδίου Πανεπιστημίου, βάσει ἐργασίας τῆς ὁποίας τὰ ἀποτελέσματα ἀποτελοῦν τὸ περιεχόμενον τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως.

Εἰς τὴν μελέτην τοῦ κ. Παντελίδη ἀναπτύσσεται ἡ προσεγγιστικὴ θεωρία μιᾶς κατηγορίας μετρικῶν χώρων, ἐκείνης τῶν γραμμικῶν μετρικῶν χώρων. Ὡς γνωστόν, ὡς γραμμικοὶ μετρικοὶ χῶροι χαρακτηρίζονται οἱ διανυσματικοὶ χῶροι, ἀναφορικὰ μὲ τὸ βαθμωτὸν σῶμα τῶν πραγματικῶν (ἢ τῶν μιγαδικῶν) ἀριθμῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ὁρίζεται μία μὴ ἀρνητικὴ πραγματικὴ συνάρτησις, τὸ μέτρον, εἰς τρόπον ὥστε:

1ον. Ἐκ τοῦ ὅτι τὸ μέτρον διανύσματος εἶναι μηδὲν νὰ συνάγεται τὸ μηδενικὸν τοῦ διανύσματος,

2ον. Τὸ μέτρον ἀθροίσματος δύο διανυσμάτων νὰ εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων.

Τὸ γεγονός, ὅτι προσεγγιστική τις θεωρία ἐπὶ τῶν μετρικῶν χώρων δὲν εἶχεν ἐρευνηθῇ ἐνωρίτερον, ὠφείλετο εἰς δυσκολίας ἀναφερομένας π.χ. εἰς τὴν μὴ ὕπαρξιν πάντοτε, διὰ τοὺς μετρικοὺς χώρους, δυαδικοῦ χώρου, ὡς καὶ εἰς τὴν μὴ κυρτότητα τῶν σφαιρῶν εἰς τοὺς ἐν λόγῳ χώρους.

Τὰ ἐμπόδια αὐτὰ ὑπερεπήδησεν ὁ συγγραφεὺς τῆς ἀνακοινώσεως διὰ τεχνάσματος, ἐπιτρέψαντος νὰ ἀναπτύξῃ τὴν θεωρίαν του, μὲ λίαν μάλιστα ἐνδιαφέροντα ἐξαγόμενα, εἰς τοὺς ἀναφερομένους μετρικοὺς χώρους. Δέον νὰ προστεθῇ, ὅτι πλεῖστα ὅσα σχετικὰ προβλήματα μένουν ἀκόμη ἀνοικτά, τούτων δὲ ἡ ἐπίλυσις θὰ ἀποτελέσῃ τὸ ἀντικείμενον μελλοντικῆς ἐρεύνης.

Αἱ ἐν ἐκτάσει ἀποδείξεις τῶν εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν διατυπουμένων ἐξαγομένων, πρόκειται ν' ἀποτελέσουν τὸ θέμα τῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βόννης ὑποβληθείσης, καὶ ἤδη κατ' ἀρχὴν ἐγκριθείσης, ὑφηγετικῆς διατριβῆς τοῦ κ. Παντελίδη.