Ἀνακοινοῦνται εὐχαριστήριοι ἐπιστολαὶ τῶν κκ. Antoine Meillet, Hiller von Gärtringen, Ὀρέστη Ταφραλῆ, Gerhard Hauptmann, Jacob Wackernagel, Gustave Glotz, Thaddäus Zielinski, Leopold Wenger καὶ Erich Ziebarth ἐκλεγέντων ἀντεπιστελλόντων μελῶν τῆς Ἀκαδημίας

Ἀνακοινοῦται ἐπιστολὴ τοῦ κόμητος de Noailles εὐχαριστοῦντος διὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀποθανούσης συζύγου του ὡς ἀντεπιστέλλοντος μέλους τῆς Ἀκαδημίας.

Ὁ **Πρόεδρος** καταθέτει ἀνακοίνωσιν τοῦ κ. Γεωργίου Βλαβιανοῦ ἐντὸς ἐσφραγισμένου φακέλλου συμφώνως πρὸς τὸ ἄρθρον 18 τοῦ Ἐσωτερικοῦ Κανονισμοῦ.

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Ὁ **Γενικὸς Γραμματεὺς** καταθέτει τὰ πρὸς τὴν Ἀκαδημίαν ἀποσταλέντα συγγράμματα.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ. — **Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν διακλαδώσεων ἑνὸς ἀβελιανοῦ σώματος ὡς πρὸς ἐνδιάμεσόν τι σῶμα***, *ὑπὸ* ***Φίλωνος Βασιλείου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν ζητοῦμεν, ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὴν σχέσιν τῶν σχετικῶν βαθμῶν καὶ τῶν καλουμένων ἀνηγμένων δεικτῶν ὡς πρὸς ἓν ἐνδιάμεσον σῶμα, νὰ εὕρωμεν σχέσιν συνδέουσαν τοὺς ἀριθμοὺς διακλαδώσεων. Τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν ὁμάδων τὸ πρόβλημά μας ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς δείκτου, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς ἀναγωγῆς (Reduktionsprinzip) νὰ ἐκφράσωμεν εὐκόλως μὲ τοὺς ἀντιστοίχους δείκτας ὡς πρὸς τὸ βασικὸν σῶμα.

Ἓν γνωστὸν θεώρημα τοῦ J. Herbrand[1] διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς σειρᾶς τῶν ὁμάδων ἑνὸς μερικοῦ σώματος μᾶς ἐπιτρέπει τότε νὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην σχέσιν περιλαμβάνουσαν ὡς μερικὴν περίπτωσιν τοὺς ἀναφερθέντας τύπους τῶν σχετικῶν βαθμῶν καὶ τῶν ἀνηγμένων δεικτῶν ἑνὸς ἐνδιαμέσου σώματος.

Τὸ θεώρημά μας τοῦτο δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς πλείστας περιπτώσεις, ὅπου πρόκειται περὶ τῶν ἀριθμῶν διακλαδώσεων ἁπλοποιοῦντες εἰς σημαντικὸν

* PH. VASSILIOU. — **Über die Verzweigungszahlen eines Abelschen Zahlkörpers.**

[1] Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, *Journ. de Mathématiques*, **10**, (1931). Th. 3.

βαθμὸν τὰς σχετικὰς ἀποδείξεις. Οὕτω π. χ. τὸ γνωστὸν λῆμμα τοῦ J. Herbrand[1] καθὼς καὶ ἡ ἄμεσος αὐτοῦ συνέπεια ἡ *πρότασις τῶν ὁδηγῶν* (Führersatz) τοῦ S. Jyanaga[2] δύνανται ν' ἀποδειχθοῦν εἰς ὀλίγας γραμμάς.

2. Παραδεχόμεθα τὸν συνήθη συμβολισμὸν διὰ τὴν παράστασιν τῆς σειρᾶς τῶν ὁμάδων διακλαδώσεων (ὡς καὶ τῆς ὁμάδος ἀναλύσεως καὶ ἀδρανείας) τοῦ σχετικοῦ ἀβελιανοῦ σώματος $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ πρῶτον ἰδεῶδες $\mathfrak{p}$ τοῦ βασικοῦ σώματος. Χάριν ἁπλότητος ὁμιλοῦμεν περαιτέρω ἁπλῶς περὶ τῶν ὁμάδων διακλαδώσεως (καὶ τῶν ἀριθμῶν διακλαδώσεως) τοῦ $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ ἄνευ τῆς προσθήκης «ὡς πρὸς $\mathfrak{p}$». Δι' ἓν ἐνδιάμεσον σῶμα $\mathfrak{k}'|\mathfrak{k}$ ἡ σειρὰ τῶν ὁμάδων διακλαδώσεως τοῦ $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}'$ ἁπλῶς, δηλοῖ τὴν ὡς πρὸς πρῶτον τινὰ διαιρέτην $\mathfrak{p}'$ τοῦ $\mathfrak{p}$ εἰς τὸ $\mathfrak{k}'$.

Ὡς γνωστὸν αἱ ὁμάδες διακλαδώσεων τοῦ $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}'$ εἶναι *τομαὶ* τῆς εἰς τὸ σῶμα $\mathfrak{k}'$, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς θεωρίας τοῦ Galois, ἀντιστοιχούσης μερικῆς ὁμάδος $\mathfrak{g}$ τῆς ὁμάδος $\mathfrak{G}$ τοῦ $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ καὶ τῶν ἀντιστοίχων ὁμάδων διακλαδώσεων τοῦ $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{g}_z = [\mathfrak{g}, \mathfrak{G}_z], \quad \mathfrak{g}_T = [\mathfrak{g}, \mathfrak{G}_T], \quad \ldots, \quad \mathfrak{g}_v = [\mathfrak{g}, \mathfrak{G}_v], \ldots.$$

Ὅπως καὶ εἰς μίαν προηγουμένην ἐργασίαν μας[3] παριστάνομεν διὰ τῶν $\gamma_z, \gamma_T, \ldots \gamma_v, \ldots$ τὰς *ὁμάδας πηλίκου* (Faktorgruppen) $\mathfrak{G}_z\mathfrak{g}|\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}_T\mathfrak{g}|\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{G}_v\mathfrak{g}|\mathfrak{g}, \ldots$ καὶ διὰ $\mathfrak{g}'_z, \mathfrak{g}'_T, \ldots, \mathfrak{g}'_v, \ldots$ τὴν σειρὰν τῶν ὁμάδων τοῦ $\mathfrak{k}'|\mathfrak{k}$.

3. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ συμβολισμοῦ τῆς προηγουμένης § καὶ τῇ ἐφαρμογῇ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀναγωγῆς ἔχομεν:

$$(\mathfrak{g}_i : \mathfrak{g}_{i+1}) = (\mathfrak{g}_i : [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{G}_{i+1}]) = (\mathfrak{G}_{i+1}\mathfrak{g}_i : \mathfrak{G}_{i+1}) = \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1}\mathfrak{g}_i)}$$

$$= \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{G}_i : [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{g}])}(\mathfrak{G}_{i+1}\mathfrak{g}_i : \mathfrak{g}_i) = \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{G}_i\mathfrak{g} : \mathfrak{g})}(\mathfrak{G}_{i+1} : [\mathfrak{G}_{i+1}, \mathfrak{g}_i])$$

$$= \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{G}_i\mathfrak{g} : \mathfrak{g})}(\mathfrak{G}_{i+1} : [\mathfrak{G}_{i+1}, \mathfrak{g}]) = \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{G}_i\mathfrak{g} : \mathfrak{g})}(\mathfrak{G}_{i+1}\mathfrak{g} : \mathfrak{g}) = \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\gamma_i : \gamma_{i+1})}.$$

Αἱ σχέσεις αὗται ἰσχύουν ὁμοίως, ὅταν ἀντὶ $\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i+1}, \ldots$ θέσωμεν $\mathfrak{g}_z, \mathfrak{g}_T, \ldots$ ἢ

[1] *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **9**, 1 Heft (1932) σ. 84. Μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος τούτου δημοσιεύομεν προσεχῶς εἰς τὸ *Δελτίον τῆς Ἑλλ. Μαθημ. Ἑταιρείας*. 14 Β'.

[2] *Abh. aus d. Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **9**, 2. Heft, 1932.

[3] PH. VASSILIOU, Bestimmung der Führer der Verzweigungskörper etc, *Crelles Journal*, **169**, Heft 3. (1933).

$\mathfrak{g}_T$, $\mathfrak{g}_o$,... δηλ., ἐφ' ὅσον ὡς γνωστὸν $\gamma_z = \mathfrak{g}'_z$, $\gamma_T = \mathfrak{g}'_T$, $\gamma_o = \mathfrak{g}'_o$, προκύπτει ὁ τύπος ὁ συνδέων τοὺς σχετικοὺς βαθμοὺς καὶ τοὺς ἀνηγμένους δείκτας.

Διὰ καταλλήλους δείκτας $h_o = o < h_1 < h_2 < \ldots$ ἔχομεν τώρα:

$$\gamma_o = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{h_1 - 1} = \mathfrak{g}'_o$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\gamma_{h_k} = \quad \ldots \quad = \gamma_{h_{k+1}-1} = \mathfrak{g}'_k .$$

Ὥστε διὰ $h_j \leqq i \leqq h_{j+1} - 1$ $(j = 0, 1, 2 \ldots k)$ εἶναι:

$$(\mathfrak{g}_i : \mathfrak{g}_{i+1}) = (\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})$$

καὶ διὰ $i = h_j - 1$ $(j = 1, 2 \ \ldots k)$ εἶναι:

$$(\mathfrak{g}_i : \mathfrak{g}_{i+1}) = \frac{(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})}{(\mathfrak{g}'_{j-1} : \mathfrak{g}'_j)} .$$

4. Ἔστωσαν τώρα v_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ οἱ ἀριθμοὶ διακλαδώσεως τοῦ σώματος $\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$, V_ν $(\nu = 1, 2, \ldots t)$ οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ τοῦ $\mathfrak{k}' | \mathfrak{k}$, p^{r_ν} ἀντιστοίχως p^{s_ν} οἱ δεῖκται $(\mathfrak{G}_{\nu-1} : \mathfrak{G}_\nu)$, $(\mathfrak{g}'_{\nu-1} : \mathfrak{g}'_\nu)$ διὰ $(\nu = 1, \ldots n)$ ἀντ. $(\nu = 1, \ldots t)$, ὅπου p εἶναι ὁ διὰ τοῦ ἰδεώδους $\mathfrak{p}$ διαιρούμενος ρητὸς πρῶτος. Χωρὶς νὰ περιορίσωμεν τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγομένων μας παραδεχόμεθα χάριν εὐκολίας $\mathfrak{k} = \mathfrak{K}_o$.

Διὰ καταλλήλους δείκτας $a_1 < a_2 < \ldots < a_t$ ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν $1, \ldots n$, ὅπου a_t εἶναι ὁ πρῶτος δείκτης, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ ὁμὰς $\mathfrak{G}_{a_t}$ περιέχεται εἰς τὴν $\mathfrak{g}$, ἔχομεν τότε:

$$V_1 = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{p^{r_1}} + \ldots\ldots + \frac{v_{a_1} - v_{a_1 - 1}}{p^{r_1 + \cdots + r_{a_1 - 1}}}$$

$$V_2 = V_1 + p^{s_1} \left\{ \frac{v_{a_1 + 1} - v_{a_1}}{p^{r_1 + \cdots + r_{a_1}}} + \ldots + \frac{v_{a_2} - v_{a_2 - 1}}{p^{r_1 + \cdots + r_{a_2 - 1}}} \right\}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Οἱ ἀριθμοὶ διακλαδώσεως v' τοῦ σώματος $\mathfrak{K} | \mathfrak{k}'$ παρέχονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(1) \qquad v'_\nu = v_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n),$$

ἐφ' ὅσον $(\mathfrak{G}_{v_{a_i} - 1} : \mathfrak{G}_{v_{a_i}}) \neq (\mathfrak{g}'_{v_{i-1}} : \mathfrak{g}'_{v_i})$ $(i = 1, 2 \ldots)$ ἑκάστην δὲ φοράν, ὅπου εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν ἰσχύει τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος πρέπει εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) νὰ ἐλαττώσωμεν ἀπὸ τοῦ δείκτου a_i ὅλους τοὺς ἑπομένους κατὰ μίαν μονάδα καὶ νὰ παραλείψωμεν τὴν σχέσιν τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸν δείκτην a_i. Ἡ τελευταία σχέσις τῆς § 3 παρέχει ἐπίσης τοὺς ἀντιστοίχους δείκτας.

5. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ ἀντιστοίχως τοὺς ὁδηγοὺς τῶν σωμάτων $\mathfrak{k}' \mathfrak{k}$, $\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$, $\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}'$, καὶ θεωρήσωμεν τὸν ἐκθέτην τῆς συμβολῆς τοῦ $\mathfrak{p}$ ἀντ. τοῦ $\mathfrak{p}'$ εἰς τοὺς ὁδηγοὺς τούτους, τότε εἶναι ὡς γνωστόν:

$$\mathfrak{Exp}\ \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = 1 + v_1 + \frac{v_2 - v_1}{p^{r_1}} + \dots\dots + \frac{v_n - v_{n-1}}{p^{r_1 + \dots + r_{n-1}}} = a$$

$$\mathfrak{Exp}\ \mathfrak{f}(\mathfrak{p}) = 1 + V_1 + \frac{V_2 - V_1}{p^{s_1}} + \dots\dots + \frac{V_t - V_{t-1}}{p^{s_1 + \dots + s_{t-1}}}$$

$$= 1 + v_1 + \quad \dots \quad + \frac{v_{a_t} - v_{a_t - 1}}{p^{r_1 + \dots + r_{a_t - 1}}} = b.$$

Ἀφ' ἑτέρου, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην §, εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\mathfrak{Exp}\ \mathfrak{M}(\mathfrak{p}') = 1 + V_1 + (V_2 - V_1) + \dots + (V_t - V_{t-1}) + p^{R_t}(a - b),$$

ὅπου χάριν συντομίας ἐτέθη $R_t = s_1 + \dots + s_t$.

6. Διὰ τὸν ἐκθέτην τοῦ ἰδεώδους $\mathfrak{F}$ τοῦ ὁριζομένου εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν ἐργασίαν τοῦ Herbrand (§ 1, Παρ. 3) ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἰδεώδους τούτου καὶ πρὸς τὰ ἐξαγόμενα τῆς προηγουμένης παραγράφου:

$$\mathfrak{Exp}\ \mathfrak{F}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{Exp}\ \mathfrak{M}(\mathfrak{p}') + p^{R_t}\ \mathfrak{Exp}\ \mathfrak{f}(\mathfrak{p}) - p^{R_t}\ \mathfrak{Exp}\ \mathfrak{m}(\mathfrak{p})$$

$$= 1 + V_1 + (V_2 - V_1) + \dots + (V_t - V_{t-1}) = 1 + V_t$$

δηλ. ὅτι ὁ ἐν λόγῳ ἐκθέτης ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁμάδων διακλαδώσεων (ἴσων ἢ διαφόρων) τοῦ $\mathfrak{k}'\ \mathfrak{k}$.

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Note bezieht sich auf eine Arbeit von J. Herbrand in den Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität (9. Band 1. Heft, 1932). Mit Hilfe der Bestimmung der Verzweigungszahlen eines relativ-abelschen Zahlkörpers in Bezug auf einen Zwischenkörper, welche hier unternommen wird, lässt sich das in jener Arbeit ausgesprochene Lemma in wenigen Zeilen beweisen. Dieses Lemma hat, wie bekannt, als unmittelbare Konsequenz den sog. Führersatz, den Herr S. Jyanaga zum Zwecke der Verallgemeinerung des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie aufgestellt hat.