ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 15ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1990

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΛΑΧΟΥ

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ FRACTALS

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ
Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΙΣΗΓΗΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ
Κ. ΙΩΑΝΝΟΥ ΤΟΥΜΠΑ

Ὁ κ. Παναγιώτης Παναγιωτόπουλος εἶναι Διπλωματοῦχος Πολιτικὸς Μηχανικὸς τοῦ Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης ἀπὸ τοῦ ἔτους 1972. Ἀπὸ τὸν Ἰούλιο τοῦ 1972 μέχρι τὸν Ἀπρίλιο τοῦ 1974 συνειργάσθη μὲ τὸν καθηγητὴ κ. Νιτσιώτα τοῦ Ἐργαστηρίου Ἐφηρμοσμένης Στατικῆς τοῦ Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Τὸν Μάρτιο τοῦ 1974 ἀνηγορεύθη Διδάκτωρ τοῦ ἰδίου Πανεπιστημίου μὲ τὸν βαθμὸ Ἄ ρ ι σ τ α.

Ἀπὸ τοῦ Σεπτεμβρίου τοῦ 1974 μέχρι τοῦ Ἀπριλίου τοῦ 1978 ὁ κ. Παναγιωτόπουλος ἦτο ὑπότροφος τοῦ Ἱδρύματος Alexander von Humboldt. Κατὰ τὸ διάστημα αὐτὸ ἐξεπόνησε τὴ διατριβή του ἐπὶ ὑφηγεσίᾳ στὸ Πολυτεχνεῖο τοῦ Ἄαχεν.

Τὸν Ἰανουάριο τοῦ 1978 ἐξελέγη παμψηφεὶ τακτικὸς καθηγητὴς στὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης καὶ κατὰ τὸ ἔτος 1981 ἐπισκέπτης - καθηγητὴς τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐφηρμοσμένων Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ἀμβούργου τῆς Δυτικῆς Γερμανίας. Κατὰ τὸ ἴδιο ἔτος ὁ καθηγητὴς κ. Παναγιωτόπουλος ἐξελέγη ἐπίτιμος καθηγητὴς (Honorarprofessor) τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ἄαχεν. Ἀπὸ δὲ τοῦ ἔτους 1985 τακτικὸς καθηγητὴς τοῦ ἰδίου Πανεπιστημίου, θέση τὴν ὁποία δὲν ἀπεδέχθη λόγῳ τῆς θητείας του στὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Τὸν Σεπτέμβριο τοῦ 1989 ἐξελέγη τακτικὸ μέλος τῆς Εὐρωπαϊκῆς Ἀκαδημίας.

Κατὰ τὰ ἔτη, ἀπὸ τὸ 1981 μέχρι σήμερον, ἔχει ἐπισκεφθεῖ πολλὰ Πανεπιστήμια τῆς Εὐρώπης καθὼς καὶ τῆς Βορείου καὶ Νοτίου Ἀμερικῆς.

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ FRACTALS

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι 'Ακαδημαϊκοί,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

'Επιθυμῶ νὰ εὐχαριστήσω θερμῶς τὴν 'Ακαδημία 'Αθηνῶν γιὰ τὴν τιμὴ ποὺ μοῦ ἔκανε νὰ μὲ ἐκλέξη ἀντεπιστέλλον μέλος της. Εἶμαι εὐτυχής, γιατὶ μοῦ δίνεται ἡ δυνατότητα νὰ ἀπευθυνθῶ σὲ σᾶς καὶ στὸ ἐκλεκτὸ ἀκροατήριο καὶ νὰ ἐκθέσω ἕνα θέμα τὸ ὁποῖο τώρα ἀρχίζει νὰ ἐνδιαφέρη τὸν ἐπιστημονικὸ κόσμο.

'Αντικείμενο τῆς ὁμιλίας μου εἶναι ἡ Μηχανικὴ τῶν Fractals. Περιλαμβάνει τὴν γιὰ πρώτη φορὰ ἀνακοίνωση συμπερασμάτων μιᾶς διετοῦς ἐρευνητικῆς προσπάθειας τοῦ ὁμιλοῦντος ποὺ στόχον εἶχε τὴ διαμόρφωση τῆς Μηχανικῆς σὲ πλαίσιο γεωμετρίας fractals. Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὰ τελευταῖα χρόνια ἀναπτύχθηκε ἡ «γεωμετρία τῶν fractals» καὶ παραπέμπουμε γιὰ αὐτὸ στὴν ὁμιλία [1] τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Νικολάου 'Αρτεμιάδη τῆς 22ας Νοεμβρίου 1988.

῾Η λέξη fractal προέρχεται ἀπὸ τὸ λατινικὸ ρῆμα frangere ποὺ σημαίνει «θραύω σὲ πολλὰ κομμάτια τυχαίου σχήματος». Μιὰ πιθανὴ μετάφρασή της στὰ ῾Ελληνικὰ θὰ ἦταν «θραῦσμα» ἢ «θρύμμα». 'Εμεῖς θὰ διατηρήσουμε τὴ λέξη fractal μέχρι νὰ ἐξευρεθῆ δόκιμος ἑλληνικὸς ὅρος.

῾Η σημερινὴ ὁμιλία στόχον ἔχει νὰ περιγράψη τὶς ἐπιπτώσεις ποὺ ἔχει ἡ γεωμετρία τῶν fractals στὶς ἐπιστῆμες τοῦ Μηχανικοῦ καὶ στὴν Μηχανικὴ εἰδικώτερα.

Εἶναι γνωστὴ βέβαια ἡ ἄρρηκτη σχέση Γεωμετρίας καὶ Μηχανικῆς καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι μιὰ νέα Γεωμετρία, ὅπως ἡ Γεωμετρία τῶν fractals, θὰ ἔχη σημαντικὴ ἐπίδραση στὴ διατύπωση, τουλάχιστον ὁρισμένων νόμων καὶ ὁρισμένων θεωριῶν τῆς Μηχανικῆς. Θὰ ἐπιχειρηθῆ στὴν σύντομη αὐτὴ ὁμιλία ἡ σκιαγράφηση τῶν νέων μεθόδων ποὺ θὰ πρέπη νὰ εἰσαχθοῦν στὴν Μηχανική, ὥστε νὰ καταστῆ δυνατὴ ἡ κατὰ τὸ δυνατὸν βέλτιστη ἐπέκτασή της σὲ περιβάλλον τύπου fractal.

Παρ' ὅλην τὴν προσπάθεια ποὺ θὰ κάνω ὥστε ἡ ὁμιλία μου νὰ περιορισθῆ σὲ γενικότητες, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφύγω τὴν χρήση ὁρισμένων στοιχείων μαθηματικῶν. Ἡ φύση τοῦ ὅλου θέματος δὲν ἐπιτρέπει τὴν σύντομη, εὐκολονόητη καὶ εἰς βάθος παρουσίασή του στὸ μικρὸ χρονικὸ διάστημα μιᾶς ὁμιλίας. Παρ' ὅλα ταῦτα, θὰ παρουσιάσω τὶς ἰδέες μὲ μιὰ ἁπλοποιημένη μορφὴ χωρὶς νὰ θυσιάσω τὴν ἀρτιότητά τους. Ὅμως δὲν μπορεῖ νὰ ἀποφευχθῆ τελείως τὸ νὰ εἶναι μερικὰ μέρη τῆς ὁμιλίας μου κατανοητὰ μόνον ἀπὸ τοὺς εἰδικούς. Ζητῶ λοιπὸν ἐκ τῶν προτέρων συγγνώμη ἀπὸ τοὺς ὑπολοίπους.

Ἡ Γεωμετρία τῶν fractals, ποὺ ἀρχικὰ προέκυψε ἀπὸ τὴν ἀνάγκη μελέτης ὁρισμένων «παθολογικῶν» περιπτώσεων στὴν μαθηματικὴ θεωρία τοῦ μέτρου καὶ στὴν θεωρία τῶν δυναμικῶν συστημάτων, ἀποδείχθηκε ὅτι εἶναι κατάλληλη γιὰ τὴν γεωμετρικὴ μελέτη πολλῶν φυσικῶν σχημάτων [2,3]. Πράγματι οἱ μορφὲς στὴ φύση παρουσιάζονται νὰ εἶναι πολὺ πιὸ πολύπλοκες ἀπὸ τὰ σχήματα ποὺ μελετᾶ ἡ κλασικὴ Γεωμετρία [1], π.χ. ἕνα φύλλο δένδρου διαφέρει ἀπὸ κύκλο ἢ παραλληλόγραμμο, ἕνα δένδρο μὲ τὰ κλαδιά του δὲν περιγράφεται ἀπὸ εὐθεῖες γραμμές, ἕνας βράχος δὲν εἶναι κόλουρος κῶνος κ.λπ.

Ὁ αὐστηρὸς μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῶν fractals βασίζεται ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς διαστάσεως ἑνὸς συνόλου κατὰ Hausdorff (βλ. π.χ. [4]). Ὁρίζεται δὲ ὡς fractal ἕνα σύνολο ὅταν ἔχῃ μὴ ἀκέραια διάσταση Hausdorff, ἤ, ὅταν ἔχη μὲν ἀκέραια διάσταση Hausdorf ἀλλὰ ἡ διάσταση αὐτὴ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τοπολογική του διάσταση [5]. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἡ τοπολογικὴ διάσταση ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι 1, ἑνὸς ἐπιπέδου γεωμετρικοῦ σχήματος εἶναι 2 κ.λπ. Θὰ δώσουμε ὁρισμένα παραδείγματα: Ἡ διάσταση τῆς καμπύλης v. Koch (σχ. 1) εἶναι log4/log3, ἡ διάσταση τοῦ σημειοσυνόλου ποὺ ἀπομένει μετὰ τὴν συνεχῆ ἀφαίρεση ἰσοπλεύρων τριγώνων στὸ σχ. 2 εἶναι log3/log2.

Ἡ Γεωμετρία τῶν fractals σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν χρήση ὑπολογιστῶν μπορεῖ νὰ περιγράψη φυσικὰ σχήματα καὶ δομὲς μὲ τὴν μεγαλύτερη δυνατὴ ἀκρίβεια. Αὐτὸ γίνεται φανερὸ ἀπὸ τὰ σχ. 3, 4, ὅπου περιγράφονται ἀντίστοιχα ἕνας γεωγραφικὸς σχηματισμὸς καὶ ἕνας σχηματισμὸς συννέφων.

Θὰ πρέπη στὸ σημεῖο αὐτὸ νὰ τονισθῆ ὅτι ὑπάρχει ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς φυσικῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα θὰ πρέπη νὰ μελετηθοῦν στὰ πλαίσια μιᾶς μηχανικῆς, ἡ ὁποία νὰ λαμβάνη ὑπ' ὄψιν δομὲς τύπου fractal. Τοῦτο γίνεται φανερὸ ἀπὸ τὰ σχ. 5 – 8. Στὸ σχ. 5 δίδεται τμῆμα τοῦ συστήματος ἀπορροῆς ἑνὸς ποταμοῦ, στὸ σχ. 6 περιγράφεται ἡ ἐπιφάνεια μεταλλικοῦ ἐλάσματος κατόπιν ἀμμοβολῆς, στὸ σχ. 7 δίδεται ἡ μορφὴ τῶν τροχιῶν σωματιδίων σὲ κίνηση Brown, ἐνῶ τέλος τὸ σχ. 8 περιγράφει τὸ fractal μέτωπο διαχύσεως ἑνὸς συστήματος σωματιδίων. Ἀνάλογα μορφώματα προκύπτουν σὲ προβλήματα ρηγματώσεως παραμορφωσίμων σωμάτων καθὼς καὶ σὲ προβλήματα μεταβολῶν φάσεων. Συγκεκριμένα οἱ γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν διάρκεια τῆς μεταβολῆς τῆς φάσεως (δηλ. κατὰ τὴν «μεσόφαση») εἶναι τύπου fractal.

Γιὰ ἄλλα σχετικὰ παραδείγματα παραπέμπουμε στὸ [1], [2], [6], [7]. Γενικὰ ὑπάρχουν καὶ πάρα πολλὲς ἄλλες περιπτώσεις φυσικῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν στὴν θεώρηση fractals, παραδείγματος χάριν στὴν ἀστρονομία καὶ κοσμολογία, στὴν φυσιολογία, στὴν γεωλογία κ.λπ. Βεβαίως δὲν θὰ πρέπη νὰ γίνεται καὶ ἡ σχετικὴ κατάχρηση, ὅπως συμβαίνει σὲ πολλὲς δημοσιεύσεις: ὅλα τὰ φυσικὰ σχήματα δὲν ἔχουν γεωμετρία τύπου fractal (βλ. σχετ. [8] σελ. 241).

Ἡ Μηχανικὴ ἔχει ἀναπτυχθῆ μέχρι σήμερα στὰ πλαίσια τῶν συνήθων γεωμετρικῶν θεωριῶν χωρὶς τὴν πολυπλοκότητα τῶν μορφῶν ὅπως αὐτὲς ποὺ περιγράφονται ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν fractals. Ἑπομένως σκόπιμο εἶναι νὰ ἐπιχειρηθῆ μιὰ ἐπέκταση τῶν θεωριῶν τῆς Μηχανικῆς ὥστε νὰ μποροῦν νὰ ἰσχύουν καὶ στὰ πλαίσια τῆς γεωμετρίας τῶν fractals. Ἀφορμὴ γιὰ τὴν ἐρευνητικὴ ἐνασχόληση τοῦ ὁμιλοῦντος μὲ τὴν Μηχανικὴ τῶν fractals, ἔδωσαν δύο γεγονότα: 1) Ἡ Μηχανικὴ αὐτὴ ἀποτελεῖ συνέχεια τῆς «Μὴ Λείας» Μηχανικῆς μὲ τὴν ὁποία ἀντιμετωπίζονται μὲ ἐπιτυχία προβλήματα τῆς Ἐπιστήμης τοῦ Μηχανικοῦ, τὰ ὁποῖα μὲ τὴν κλασικὴ Μηχανικὴ δὲν ἦταν δυνατὸν νὰ ἐπιλυθοῦν [9]–[11]. 2) Ἡ ἀνάθεση ἀπὸ τὸ Πατριαρχεῖο Ἱεροσολύμων στὸ Ἐργαστήριο Σιδηρῶν Κατασκευῶν τοῦ Ἀριστοτελείου Παν/μίου Θεσ/νίκης, τὸ ὁποῖο διευθύνει ὁ ὁμιλῶν, τοῦ ἐλέγχου τῆς ἀντοχῆς καὶ τῆς εὐσταθείας τοῦ Ἱεροῦ Βράχου τοῦ Φρικτοῦ Γολγοθᾶ στὰ Ἱεροσόλυμα γιὰ τὸν ὁποῖο, ὅπως ἀποδείχθηκε, ἡ ἐπίδραση τῆς πραγματικῆς γεωμετρίας καὶ φυσικῆς συμπεριφορᾶς τῆς κατασκευῆς στὸν ὑπολογισμὸ τῆς εὐστάθειάς της δὲν πρέπει νὰ ἀγνοηθῆ. Ἀνέκυψε λοιπὸν τὸ ἐρώτημα πῶς θὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἐντατικὴ κατάσταση τοῦ Ἱεροῦ Βράχου τοῦ Φρικτοῦ Γολγοθᾶ, ὅταν οὔτε οἱ νόμοι ὑλικοῦ, οὔτε ἡ γεωμετρία τῆς κατασκευῆς ἰδανικοποιεῖται μὲ διάφορες προσεγγίσεις.

Στὰ ἑπόμενα γίνεται μιὰ προσπάθεια οἰκοδομήσεως τῆς Μηχανικῆς τῶν fractals μὲ τρόπο ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι κατάλληλος γιὰ τὴν χρήση της στὶς ἐπιστῆμες τοῦ Μηχανικοῦ. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν παραμένει ἡ ἀνάπτυξη σὲ ἐπίπεδο μὴ στοχαστικό, πράγμα τὸ ὁποῖο ἐλάχιστα περιορίζει τὴν γενικότητα. Ἐπειδὴ στόχος μας τελικὰ εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ τῆς θεωρίας τῶν fractals στὶς ἐπιστῆμες τοῦ Μηχανικοῦ, ἡ παρακάτω ἀνάπτυξη καὶ οἱ ἰδέες ποὺ παρουσιάζονται ἀφίστανται σημαντικὰ ἀπὸ τὶς συνήθεις παρουσιάσεις ἐφαρμογῶν τῆς θεωρίας τῶν fractals, οἱ ὁποῖες συνήθως ἐπικεντρώνονται στὴν διαπίστωση κάποιας γεωμετρίας τύπου fractal καὶ στὴν ἐκτίμηση τῆς σχετικῆς διαστάσεως Hausdorff.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ FRACTALS

Ἀκολουθώντας τὸν M. Barnsley [12] θὰ ὁρίσουμε τὴν ἔννοια τοῦ fractal μὲ τὴν βοήθεια ἐπαναληπτικῶν συστημάτων συναρτήσεων. Ἔστω X ἕνας πλήρης μετρικὸς χῶρος καὶ d(x,y), $x\in X$, $y\in X$, ἡ μετρικὴ αὐτοῦ. Θεωροῦμε ἀπεικονίσεις $w_i:X\to X$, $i=1,\dots,n$ οἱ ὁποῖες ἔχουν τὴν συσταλτικὴ ἰδιότητα

$$d(w_i(x),w_i(y)) \leqslant s_i d(x,y) \;\; \forall \;\; x,y\in X, \;\; 0 \leqslant s_i < 1 \tag{1}$$

Κατὰ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὴν συναρτησιακὴ ἀνάλυση (βλ. π.χ. [13]) οἱ συναρτήσεις ἔχουν ἕνα σταθερὸ σημεῖο x_{0i}, δηλ. $w_i(x_{0i})=x_{0i}$, $i=1,\dots,n$.

Ἔστω H(X) ὁ χῶρος τῶν μὴ κενῶν συμπαγῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, ὁ ὁποῖος γιὰ τὴν μετρικὴ τύπου Hausdorff

$$h(A,B)=\max\,\{d(A,B),d(B,A)\} \;\; \forall \;\; A,B\in H(X) \tag{2}$$

ὅπου

$$d(A,B)=\max_{x\in A}\;\min_{x\in B}\; d(x,y)$$

εἶναι ἡ «ἀπόσταση» τῶν συνόλων A καὶ B, εἶναι καὶ αὐτὸς ἕνας πλήρης μετρικὸς χῶρος. Ἐπεκτείνουμε τὶς συναρτήσεις w_i ἐπὶ τοῦ H(X) θέτοντας

$$W_i(B)=\{w_i(x);\; x\in B\} \;\; \forall \;\; B\in H(X)$$

Κάθε συνάρτηση W_i ἔχει ἐπὶ τοῦ H(X) τὴν συσταλτικὴ ἰδιότητα μὲ τὸν ἴδιο δείκτη συστολῆς s_i ὅπως καὶ ἡ συνάρτηση w_i. Μπορεῖ νὰ ἀποδειχθῆ εὔκολα ὅτι καὶ ἡ συνάρτηση W: $H(X) \to H(X)$ ποὺ ὁρίζεται ὡς

$$W(B)=W_1(B)\cup W_2(B)\cup \;\dots\; W_n(B) \;\; \forall \;\; B\in H(X) \tag{5}$$

ἔχει τὴν συσταλτικὴ ἰδιότητα μὲ συντελεστὴ $s = \max\,\{s_1,\; i=1,\dots n\}$. Τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων w_i, ἐπὶ τοῦ X ἀποτελεῖ ἕνα ἐπαναληπτικὸ σύστημα συναρτήσεων. Λόγω τῆς συσταλτικῆς ἰδιότητας τῆς w_i καὶ ὡς ἐκ τούτου καὶ τῆς W_i, ὑπάρχει ἕνα μοναδικὸ σταθερὸ «σημεῖο» τῆς ἀπεικονίσεως W. Ἔστω $A\in H(X)$ τὸ σταθερὸ «σημεῖο» τῆς W, δηλ.

$$A = W(A) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i(A) \tag{6}$$

Τὸ μονοσημάντως ὁριζόμενο σύνολο A λέγεται ἑλκυστὴς (attractor) τοῦ ἐπαναληπτικοῦ συστήματος συναρτήσεων $\{w_i\}$ καὶ ἀποτελεῖ τὸ ντετερμινιστικὸ fractal τὸ σχετικὸ μὲ τὸ ἐπαναληπτικὸ σύστημα συναρτήσεων w_i. Ὁρίζουμε τοὺς μετασχηματισμοὺς $W^{(0)}, W^{(1)}, \ldots, W^{(m)}, \ldots$ θέτοντας

$$W^{(0)}(x) = x, \quad W^{(m)}(x) = W(W^{(m-1)}(x)), \quad m = 1,2,\ldots \tag{7}$$

Προφανῶς ἰσχύει ὅτι [12]

$$A = \lim_{n\to\infty} w^{(m)}(B) \ \forall \ B \in H(X). \tag{8}$$

Ἀντιστρόφως ἔστω $C \in H(X)$ καὶ ἔστω $\varepsilon > 0$ δεδομένον. Ἐὰν εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς ἐπαναληπτικοῦ συστήματος συναρτήσεων $\{X;\ w_i, i = 1,\ldots,n\}$ τέτοιου ὥστε

$$h(C, \bigcup_{i=1}^{n} W_i(C)) \leqslant \varepsilon \tag{9}$$

τότε ἡ ἀπόσταση τύπου Hausdorff μεταξὺ τοῦ συνόλου C καὶ τοῦ ἑλκυστοῦ A τοῦ συστήματος τῶν w_j εἶναι μικρότερη τοῦ ε [12].

Ἕνα πρόβλημα σημαντικὸ στὴν θεωρία τῶν fractals εἶναι ὁ προσδιορισμὸς συναρτήσεων παρεμβολῆς τύπου fractal [12]. Δίδονται τὰ σημεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ἐπὶ ἄξονος Ox ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων xOy καὶ ἔστω μία συνάρτηση $y = y(x)$, ἡ ὁποία στὰ σημεῖα $x_0, x_1, \ldots, x_N$ παίρνει τὶς τιμὲς $y_0, y_1, \ldots, y_N$. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ μία συνάρτηση παρεμβολῆς τύπου fractal τέτοια ὥστε $y_i = y(x_i)$ $i = 0,1,\ldots,N$. Ἀπάντηση στὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδει τὸ ἐπαναληπτικὸ σύστημα συναρτήσεων $\{R^2;\ w_i\ i = 1,\ldots,N\}$ μὲ

$$(x,y) \to w_i(x,y) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \qquad i = 1,\ldots,N \tag{10}$$

ὅπου

$$a_i = \frac{(x_i - x_{i-1})}{(x_N - x_0)}, \quad e_i = \frac{(x_N x_{i-1} - x_0 x_i)}{(x_N - x_0)} \tag{11}$$

$$c_i = \frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_N - x_0)} - d_i \frac{(y_N - y_0)}{(x_N - x_0)} \tag{12}$$

$$f_i = \frac{(x_N y_{i-1} - x_0 y_i)}{(x_N - x_0)} - d_i \frac{(x_N y_0 - y_N x_0)}{(x_N - x_0)} \tag{13}$$

καὶ $0 \leqslant d_i < 1$ εἶναι ἐλεύθερη παράμετρος. Ὁ ἑλκυστὴς F τοῦ συστήματος $\{R^2;\ w_i\ i = 1,\ldots,N\}$ εἶναι τὸ γράφημα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως $y:[x_0, x_N]$

$\to R$ τέτοιας ὥστε $y(x_i)=y_i$, $i=0,\ldots.N$. Ἡ συνάρτηση παρεμβολῆς y μπορεῖ νὰ προκύψη καὶ ὡς τὸ σταθερὸ σημεῖο τοῦ τελεστοῦ T: $C^0(x_0,x_N) \to C^0(x_0,x_N)$ ὁ ὁποῖος ὁρίζεται γιὰ $x_0 \leqslant x \leqslant x_N$ ἀπὸ τὴν σχέση

$$T(y(a_i x + e_i)) = c_i x + d_i y(x) + f_i \quad i=1,2,\ldots.N \tag{14}$$

Ἐπειδὴ ὁ T ἔχει τὴν κλασικὴ μετρική, ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία συνάρτηση παρεμβολῆς y, ἡ ὁποία προσεγγίζεται, κατὰ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὴν συναρτησιακὴ ἀνάλυση, ἀπὸ τὴν ἀκολουθία $y_{n+1}=T(y_n)$ γιὰ $n \to \infty$. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν τὰ σημεῖα x_0, x_1,.... εἶναι ἰσαπέχοντα, ἡ Hausdorff διάσταση τοῦ γραφήματος τῆς συναρτήσεως παρεμβολῆς εἶναι

$$D = 1 + \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{N} |d_i|\right)}{\ln N} \tag{15}$$

ἂν τὰ σημεῖα $\{x_i,y_i\}$ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὁπότε $D=1$, καὶ ἄν $\sum_{i=1}^{N} |d_i| > 1$. Εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι $1 < D < 2$, ἀλλὰ ὅτι ἡ D μπορεῖ νὰ μειωθῆ ὥστε νὰ παραμείνη κοντὰ στὴν τιμὴ 1 ἢ νὰ αὐξηθῆ ὥστε νὰ πλησιάση τὴν τιμὴ 2, ὁπότε τὰ σημεῖα τοῦ γραφήματος τῆς συναρτήσεως παρεμβολῆς τείνουν νὰ ἀποτελέσουν ἕνα διάστατο γεωμετρικὸ μόρφωμα.

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τὰ προαναφερθέντα μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ μελετήσουμε τὴν μηχανικὴ συμπεριφορὰ σωμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν γεωμετρία τύπου fractal. Ἡ μέθοδος ποὺ θὰ ἀκολουθήσουμε γίνεται φανερὴ ἀπὸ τὸ παρακάτω παράδειγμα. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νὰ μελετήσουμε τὴν κίνηση ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖο ἔχει ὡς σύνορο τὸ fractal F, ὅταν σ' αὐτὸ ἐπιδροῦν δεδομένες δυνάμεις. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ F εἶναι τὸ σταθερὸ σημεῖο ἑνὸς τελεστοῦ T καὶ ἑπομένως θὰ προκύπτη ὡς τὸ ὅριο μιᾶς ἀκολουθίας συνήθων δηλ. (μὴ fractal) συνόρων $\{F_n\}$, ὅπου $F_{n+1}=TF_n$, ἐφόσον τὸ ὅριο αὐτὸ ὑπάρχει γιὰ $n \to \infty$. Ὅμως γιὰ κάθε σύνορο κλασικοῦ τύπου ἡ μελέτη τῆς κινήσεως εἶναι δυνατὴ μὲ τὶς κλασικὲς μεθόδους τῆς Μηχανικῆς. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εὑρισκόμαστε στὸν διδιάστατο χῶρο R^2 καὶ ἔστω ὅτι τὸ σύνορο F εἶναι ἡ fractal συνάρτηση παρεμβολῆς ἡ σχετικὴ μὲ τὰ δεδομένα $\{x_i,y_i\}$, $i=0,1,\ldots.,N$. Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς κινήσεως χρειάζεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ, τῶν ροπῶν ἀδρανείας κ.λπ. τοῦ χωρίου. Ἄρα ἀναγόμαστε στὸν ὑπολογισμὸ διαφόρων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$I = \int_{x_0}^{x_N} g(x,F(x))dx \tag{16}$$

ὅπου g εἶναι δοθεῖσα συνεχὴς συνάρτηση. Εἶναι προφανὲς ὅτι λόγω τῆς συνεχείας τῆς g καὶ τῆς F τὸ ὁλοκλήρωμα ὁρίζεται. Ἔχουμε λοιπὸν κάνοντας τὴν ἀντικατάσταση $x = a_1\tilde{x} + e_i$ (βλ. (14))

$$I = \int_{x_0}^{x_N} g(x,F(x))dx = \int_{x_0}^{x_N} g(x,T(F(x)))d\,x = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x,T(F(x)))dx) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_0}^{x_N} g(a_i\tilde{x} + e_i,\ c_i\tilde{x} + d_i\ F(\tilde{x}) + f_i)d(a_i\tilde{x} + e_i) \tag{17}$$

Ἀπὸ τὴν (17) προκύπτει μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου $F_{n+1} = TF_n$ ὅτι

$$I_{n+1} = \int_{x_0}^{x_N} g(x,F_{n+1}(x))dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_0}^{x_N} g(a_i\tilde{x} + e_i,\ c_i\tilde{x} + d_iF_n(\tilde{x}) + f_i)d(a_i\tilde{x} + e_i) \tag{18}$$

ὁπότε προκύπτει γιὰ n ἀρκετὰ μεγάλο, μιὰ ἀρκετὰ καλὴ προσέγγιση τῆς τιμῆς τοῦ I. Στὸ σημεῖο αὐτὸ ἀξίζει νὰ σημειωθῆ ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση $(x,z) \rightarrow g(x,z)$ εἶναι πολυωνυμικὴ ὡς πρὸς x καὶ z γενικοῦ τύπου, εἶναι δυνατὸς ὁ ἀκριβὴς προσδιορισμὸς τοῦ I συναρτήσει τῶν a_i, c_i, e_i, f_i καὶ d_i: Ἔστω π.χ. ὅτι $I = \int x^2F^2(x)dx$. Ἀπὸ τὴν (17) ὑπολογίζεται τὸ I συναρτήσει τῶν $\int F(x)$, $\int x\, F(x)$, $\int x^2F(x)$, $\int xF^2(x)$, $\int F^2(x)$, τὰ ὁποῖα μὲ τὴν βοήθεια τῆς (17) πάλι ὑπολογίζονται συναρτήσει τῶν a_i, c_i, e_i, f_i, καὶ d_i.

Συναφὲς θέμα πρὸς τὰ παραπάνω εἶναι ὁ ὁρισμὸς τῶν διαφόρων μηχανικῶν ποσοτήτων σὲ σώματα τύπου fractal. Ἂς ἐξετάσουμε π.χ. τὴν ἔννοια τοῦ τανυστοῦ τάσεων $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ σ' ἕνα παραμορφώσιμο σῶμα Ω τύπου fractal. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ Ω προκύπτει ὡς ὁ ἑλκυστὴς ἑνὸς καταλλήλου ἐπαναληπτικοῦ συστήματος συναρτήσεων, δηλ. ὅτι $\Omega = T\Omega$ καὶ ὅτι γιὰ $\Omega_{n+1} = T\Omega_n$ ἰσχύει $\Omega_n \to \Omega$ ὅταν $n \to \infty$. Ὅπως εἶναι φανερό, στὸ Ω_n ὁρίζεται ὁ τανυστὴς τάσεων σ_n, στὸ Ω_{n+1} ὁ σ_{n+1}κ.οὕ.κ. Ὁρίζουμε λοιπὸν ὡς τανυστὴ τάσεων σ στὸ Ω τὸ ὅριο τῶν σ_n, σ_{n+1} κ.λπ. γιὰ $n \to \infty$, ὅταν τὸ ὅριο αὐτὸ ὑπάρχῃ. Ἐφόσον τὸ ὅριο αὐτὸ δὲν ὑπάρχει, εἶναι ἀδύνατος ὁ ὁρισμὸς τοῦ τανυστοῦ στὸ σῶμα τύπου fractal. Μιὰ τέτοια περίπτωση ἐμφανίζεται ὅταν θέλουμε νὰ ὁρίσουμε τὸ διάνυσμα τάσεων συνόρου Γ, $S_i = \sigma_{ij} n_j$ (ἄθροιση ὡς πρὸς ἐπαναλαμβανόμενο δείκτη), ὅταν τὸ Γ εἶναι τύπου fractal. Ἐδῶ ἡ $n = \{n_j\}$ εἶναι τὸ ἐξωτερικὸ μοναδιαῖο κάθετο διάνυσμα στὸ σύνορο. Πράγματι, ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ Γ περιγράφεται ἀπὸ τὴν συνάρτηση Weierstrass

$$x \to f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin \lambda^k x, \quad \lambda > 1, \quad 1 < s < 2$$

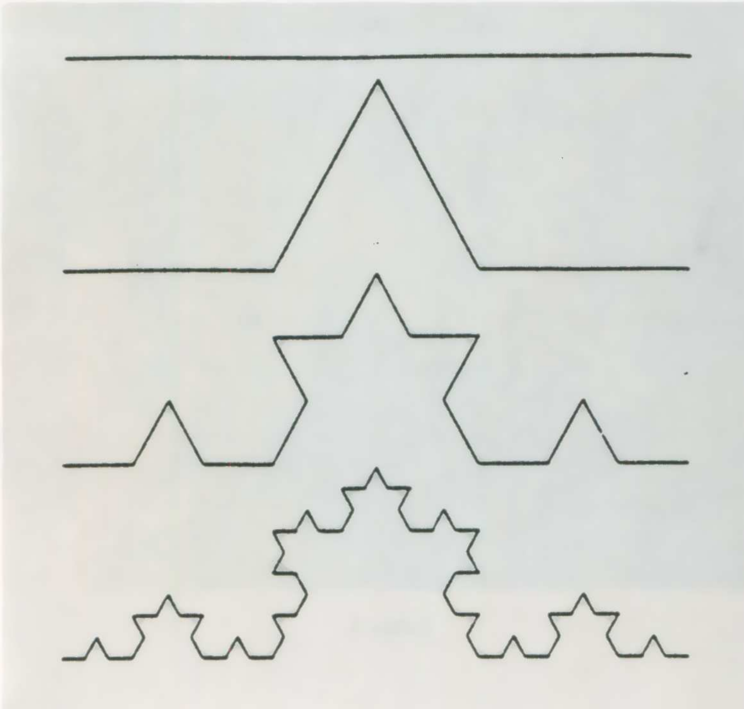
ἡ ὁποία ἔχει διάσταση Hausdorff $D \leqslant s$ [4]. Ἡ συνάρτηση αὐτὴ εἶναι συνεχὴς ἀλλὰ σὲ κανένα σημεῖο δὲν εἶναι διαφορίσιμη. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ ἡ S_i δὲν ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ Γ.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ προκύπτει τὸ ἐρώτημα σχετικὰ μὲ τὴν ἰσχὺ τῶν διαφόρων μηχανικῶν νόμων στὰ πλαίσια γεωμετρίας τύπου fractal. Πράγματι, στὴν διατύπωση ὅλων τῶν μηχανικῶν θεωριῶν ἔχει γίνει ἡ σιωπηρὴ παραδοχὴ ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν σωμάτων εἶναι κλασικοῦ τύπου, δηλαδὴ ἔχουν ἀποκλειστῆ οἱ μὴ ἀκέραιες διαστάσεις Hausdorff καθὼς καὶ οἱ περιπτώσεις μὴ ἰσότητας διαστάσεως Hausdorff καὶ τοπολογικῆς διαστάσεως. Ἂν καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἀναδιατυπώσεως τῶν μηχανικῶν νόμων στὰ πλαίσια γεωμετρίας τύπου fractal εἶναι στὸ σύνολό του ἰδιαίτερα πολύπλοκο, θὰ ἐπιχειρήσουμε μιὰ προσέγγισή του ἐδῶ χρησιμοποιώντας τὰ μέσα ποὺ ἔχουμε στὴν διάθεσή μας. Ἔστω ἕνας μηχανικὸς νόμος μεταξὺ τῶν μεγεθῶν a καὶ b ὁ ὁποῖος ὁρίζεται σ' ἕνα σῶμα Ω μὲ γεωμετρία τύπου fractal. Δεχόμαστε πάλι ὅτι τὸ Ω εἶναι ὁ ἑλκυστὴς ἑνὸς ἐπαναληπτικοῦ συστήματος συναρτήσεων καὶ ὅτι προκύπτει ἀπὸ τὶς σχέσεις σταθεροῦ σημείου.

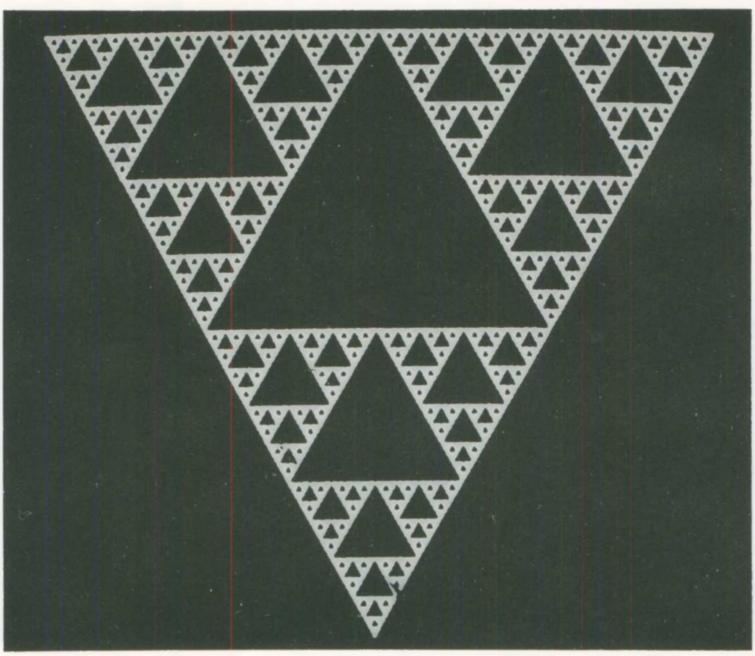
$$\Omega_n \to \Omega = T\Omega, \quad \Omega_{n+1} = T\Omega_n \tag{19}$$

Κάθε στοιχεῖο τῆς ἀκολουθίας Ω_n ἔχει κλασικὴ γεωμετρία καὶ ἑπομένως σ' αὐτὸ μποροῦμε νὰ μορφώσουμε τὸν μηχανικὸ νόμο μὲ τὴν μορφή

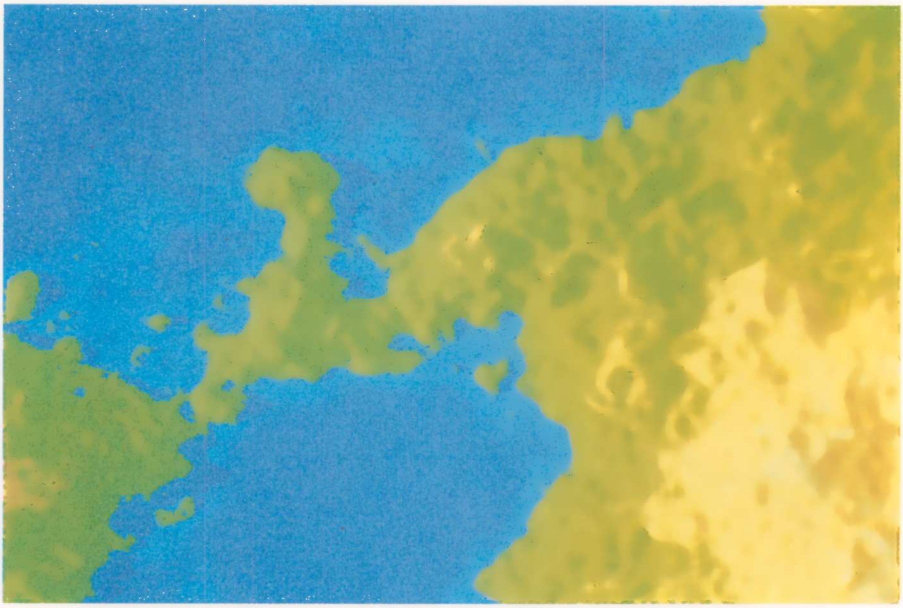
$$f(a_n, b_n, \Omega_n) = 0 \tag{20}$$



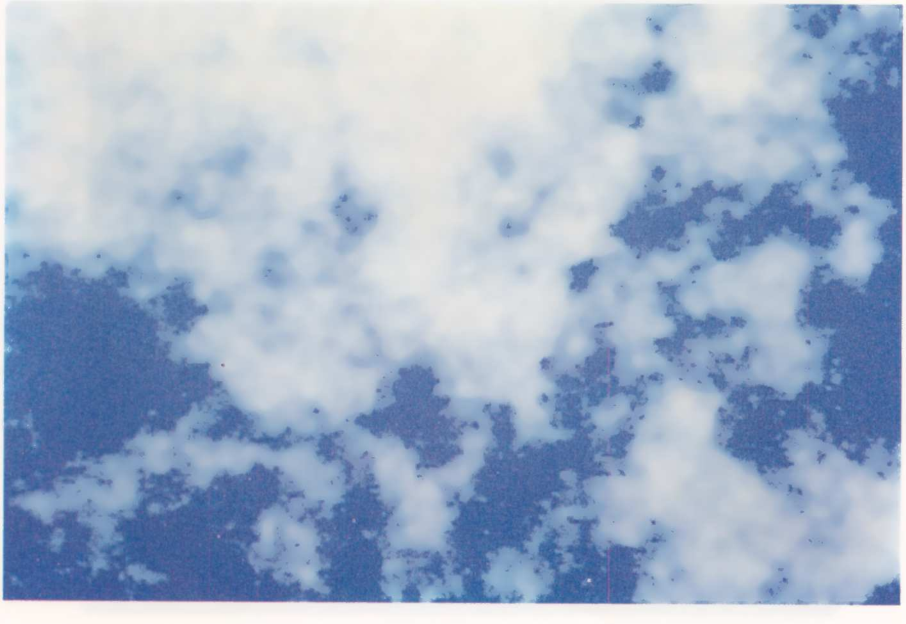
Σχῆμα 1.



Σχῆμα 2.

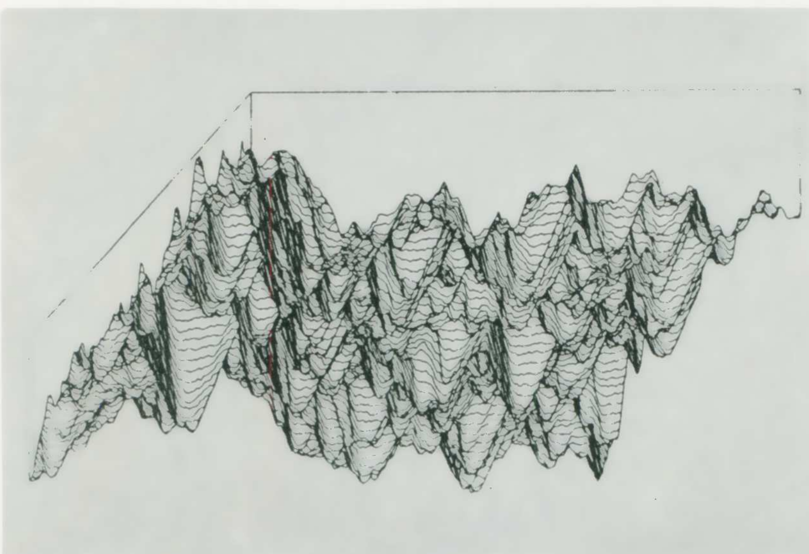


Σχῆμα 3.

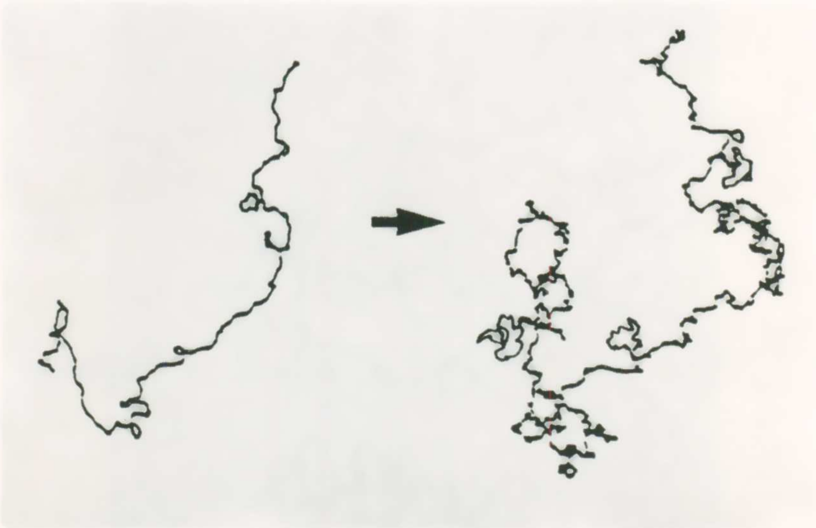


Σχῆμα 4.

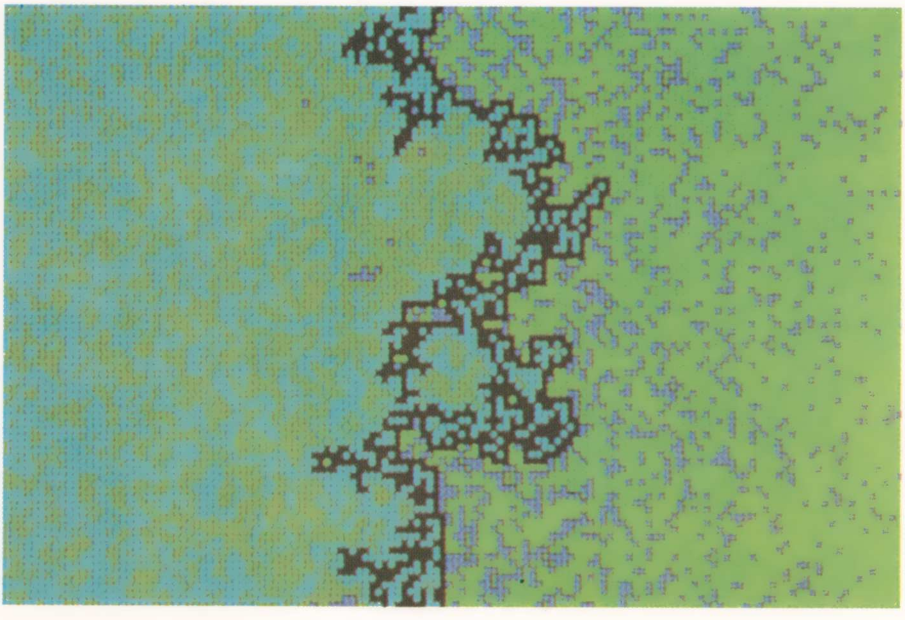
Σχῆμα 5.



Σχῆμα 6.



Σχῆμα 7.



Σχῆμα 8.

Ὁρίζουμε ὡς νόμο ἐπὶ τοῦ σώματος fractal Ω τὸ ὅριο

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n,b_n,\Omega_n)=0 \qquad (21)$$

Ἐφόσον τὸ ὅριο αὐτὸ ὑπάρχει, ὁ φυσικὸς νόμος ἐπεκτείνεται σὲ γεωμετρία τύπου fractal. Ὡς παράδειγμα ἂς ἐξετάσουμε τὸν κλασικὸ νόμο ἕλξεως μεταξὺ δύο σωμάτων Ω_1 καὶ Ω_2 πυκνότητας ἀντίστοιχα ϱ_1 καὶ ϱ_2. Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ στοιχειώδεις ὄγκοι $d\Omega_1$ καὶ $d\Omega_2$ ἀπέχουν ἀπόσταση r_{12} καὶ ἔστω $\vec{r}_{12}$ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο διάνυσμα θέσεως τοῦ $d\Omega_1$ ὡς πρὸς τὸν $d\Omega_2$. Ὁ νόμος τῆς ἕλξεως γράφεται ὡς

$$\vec{F}=\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}\,d\Omega_1\,d\Omega_2 \qquad (22)$$

Σύμφωνα μὲ (20) καὶ (21) ὁ νόμος γιὰ Ω_1 καὶ Ω_2 τύπου fractal γράφεται μὲ τὴν μορφὴ

$$\vec{F}=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_{1n}}\int_{\Omega_{2n}}\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}\,d\Omega_1\,d\Omega_2 \qquad (23)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΤΥΠΟΥ FRACTAL

Ἡ μέθοδος ὁριακῆς προσεγγίσεως τῆς γεωμετρίας τύπου fractal, ἡ ὁποία χρησιμοποιήθηκε μέχρι στιγμῆς εὑρίσκει ἐφαρμογὴ καὶ στὸ σημαντικὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀντοχῆς ἐλαστικῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζουν σύνορα τύπου fractal ἢ διεπιφάνειες τύπου fractal, ὅπως συμβαίνει π.χ. σὲ προβλήματα φυσικῶν ἢ μὴ ρηγματώσεων, ἢ σὲ προβλήματα ἐλεγχομένης παραμορφώσεως μεταλλικῶν ἐπιφανειῶν κατόπιν κρούσεως αὐτῶν ἀπὸ σφαιρίδια ἢ ἀπὸ κόκκους ἄμμου. Συμβολίζουμε τὸ fractal ὡς Γ καὶ θεωροῦμε πάλι ὅτι $\Gamma_n \to \Gamma$ γιὰ $n \to \infty$ καὶ $T\Gamma = \Gamma$ σύμφωνα μὲ τὰ προαναφερθέντα. Ἐξετάζουμε τὰ κλασικὰ προβλήματα ἀντοχῆς ποὺ προκύπτουν ἂν τὸ Γ ἀντικατασταθῆ ἀπὸ τὸ $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, καὶ ὑπολογίζουμε, ἔστω γιὰ τὸ Γ_n, τὸ ἀντίστοιχο πρὸς αὐτὸ πεδίο καὶ μετατοπίσεων τοῦ σώματος $X_n = \{\sigma_n, u_n\}$. Στὴν συνέχεια μεταβαίνουμε στὸ ὅριο γιὰ $n \to \infty$, καὶ ἐφόσον τὸ ὅριο τοῦ X_n ὑπάρχει, τότε ἐξ ὁρισμοῦ αὐτὸ ἀποτελεῖ τὴν λύση τοῦ προβλήματος ὑπολογισμοῦ τάσεων. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος δίδεται γιὰ κάθε Γ_j ἀπὸ τὴν λύση τοῦ προβλήματος

$$L(\Gamma_j)X_j = p(\Gamma_j) \qquad (24)$$

ὅπου $p(\Gamma_j)$ εἶναι τὸ ἐξωτερικὸ αἴτιο (φορτίο, θερμοκρασιακὴ μεταβολὴ ἢ ἄλλος καταναγκασμὸς) καὶ $L(\Gamma_j)$ κατάλληλος τελεστής. Ὑποθέτουμε ὅτι $X \in V$ καὶ $p \in V$ ὅπου V εἶναι χῶρος Hilbert. Τὸ πρόβλημα (24) μετασχηματίζεται μὲ τὴν βοήθεια τοῦ τελεστοῦ $M(\Gamma_j)$ ποὺ ὁρίζεται ὡς

$$M(\Gamma_j)X_j = X_j + (p(\Gamma_j) - L(\Gamma_j)X_j), \tag{25}$$

στὸ πρόβλημα τοῦ σταθεροῦ σημείου

$$M(\Gamma_j)X_j = X_j \tag{26}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ὅταν $j \to \infty$ $M(\Gamma_j)X \to M(\Gamma)X$ γιὰ κάθε X (σύγκλιση ἰσχυρὴ στὸν V). Ἐπίσης ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι $\Gamma_j \to \Gamma$ γιὰ $j \to \infty$ κατὰ τὴν ἔννοια τῆς μετρικῆς h (A,B). Ἡ παρακάτω πρόταση ἰσχύει:

Πρόταση: Ἐὰν ὁ τελεστὴς $M(\Gamma_j)$ ἔχῃ τὴν συσταλτικὴ ἰδιότητα στὸν χῶρο V γιὰ κάθε Γ_j μὲ συσταλτικὴ σταθερὰ $0 \leqslant c(\Gamma_j) \leqslant \bar{c} < 1$, ἰσχύει ὅταν $j \to \infty$, ὅτι $X_j \to X$, ὅπου X εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἡ λύση τοῦ προβλήματος $M(\Gamma)X = X$.

Ἀπόδειξη: Συμβολίζουμε μὲ c τὴν συσταλτικὴ σταθερὰ καὶ μὲ $\|.\|$ τὴν νόρμα τοῦ V καὶ ἔχουμε γιὰ

$$\begin{aligned}\|X_j - X\| &= \|M(\Gamma_j)X_j - M(\Gamma)X\| \\ &\leqslant \|M(\Gamma_j)X_j - M(\Gamma_j)X + M(\Gamma_j)X - M(\Gamma)X\| \\ &\leqslant c\,\|X_j - X\| + \|M(\Gamma_j)X - M(\Gamma)X\|,\end{aligned} \tag{27}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει ὅτι $X_j \to X$ βάσει τῶν ὑποθέσεων τῆς προτάσεως ὅ.ἔ.δ.

Ἡ προηγούμενη πρόταση ἰσχύει μόνον γιὰ ὁρισμένες κατηγορίες τελεστῶν ποὺ ἐμφανίζονται σὲ προβλήματα τῆς Μηχανικῆς. Ἡ παρακάτω πρόταση ποὺ εἶναι καὶ γενικότερη καλύπτει μιὰ ἴσως εὐρύτερη κατηγορία προβλημάτων τῆς Μηχανικῆς. Μὲ (.,.) συμβολίζουμε τὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο τοῦ χώρου V.

Πρόταση: Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ $L(\Gamma_j) : \Omega \to V$ εἶναι γραμμικὸς φραγμένος συμμετρικὸς τελεστὴς ὁ ὁποῖος ἔχει τὶς ἰδιότητες

ι) γιὰ κάθε j, $(L(\Gamma_j)X_j, X_j) \geqslant c\,\|X_j\|^2$ $c > 0$ σταθερὰ ἀνεξάρτητη τοῦ Γ_j (28)

ιι) γιὰ $j \to \infty$, $L(\Gamma_j)X^* \to L(\Gamma)X^*$ $\forall$ $X^* \in V$ (σύγκλιση ἰσχυρὴ) (29)

Ἐπίσης ὅτι

ιιι) γιὰ $j \to \infty$, $p(\Gamma_j) \to p(\Gamma)$ στὸ V (σύγκλιση ἰσχυρὴ) (30)

Ἐφόσον ἰσχύουν τὰ παραπάνω, $X_j \to X$ στὸν V γιὰ $j \to \infty$, ὅπου X εἶναι ἡ λύση τοῦ προβλήματος.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδὴ ἡ X_j εἶναι λύση τοῦ προβλήματος $L(\Gamma_j)X_j = p(\Gamma_j)$ μποροῦμε νὰ γράψουμε ὅτι

$$c\ \|X_j\|^2 \leqslant (L(\Gamma_j)X_j,\ X_j) = (p(\Gamma_j),\ X_j) \leqslant \|p(\Gamma_j)\|\ \|X_j\| \tag{31}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία καὶ τὴν (30) προκύπτει ὅτι $\|X_j\| < c_1$ ὅπου c_1 σταθερά. Ἄρα ὑπάρχει ὑπακολουθία ποὺ συμβολίζεται πάλι ὡς $\{X_j\}$ μὲ τὴν ἰδιότητα

$$X_j \to \tilde{X}\ (\text{ἀσθενῶς στὸ V})\ \text{γιὰ}\ j \to \infty. \tag{32}$$

Θὰ δείξουμε ὅτι $\tilde{X}$ εἶναι ἡ λύση τοῦ προβλήματος $L(\Gamma)X = p(\Gamma)$. Ἀπὸ τὴν (29) καὶ τὴν (32) προκύπτει λόγω τῆς συμμετρίας τοῦ $L(\Gamma_j)$ ὅτι

$$(p(\Gamma_j),X^*) = (L(\Gamma_j)X^*,X_j) \to (L(\Gamma)X^*,\tilde{X}) = (L(\Gamma)\tilde{X},X^*) \tag{33}$$

Ἡ (33) καὶ ἡ (30) ἐγγυῶνται τὸ ζητούμενο. Ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῆ $X = \tilde{X}$ λόγω τῆς μοναδικότητας τῆς λύσεως X. (Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὑποθέτοντας ὅτι ὑπάρχουν δύο λύσεις καὶ κάνοντας χρήση τῆς (28)). Γιὰ νὰ δειχθῆ ἡ ἰσχυρὴ σύγκλιση $X_j \to X$ γράφουμε τὴν ἀνισότητα

$$\begin{aligned} c\ \|X_j - X\|^2 &\leqslant (L(\Gamma_j)(X_j - X),\ X_j - X) \\ &= ((L(\Gamma_j)X_j,X_j + (L(\Gamma_j)X,X) - 2(L(\Gamma_j)X_j,X) \\ &= (p(\Gamma_j),X_j) - (p(\Gamma_j),X) + (L(\Gamma_j)X,X) - (p(\Gamma_j),X) \\ &\leqslant (p(\Gamma_j),X_j - X) + (L(\Gamma_j)X,X) - (p(\Gamma_j),X) \end{aligned} \tag{34}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία λόγω τῆς (29), (30) προκύπτει ἡ ἰσχυρὴ σύγκλιση ὅ.ἔ.δ.

Ἀνάλογες ἰδιότητες ἰσχύουν καὶ σὲ ἀνισοτικὰ προβλήματα ὅπως π.χ. στὸ πρόβλημα μονοπλεύρου ἐπαφῆς ἢ τριβῆς σὲ διεπιφάνεια μὲ γεωμετρία τύπου fractal. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. ὅτι τὸ πρόβλημα παίρνει τὴν ἑξῆς μορφὴ [9]. Νὰ προσδιορισθῆ $X_j \in V$ τέτοιο ὥστε

$$(L(\Gamma_j)X_j,X^* - X_j) + \Phi(X^*) - \Phi(X_j) \geqslant (p(\Gamma_j),X^* - X_j)\ \forall\ X^* \in V \tag{35}$$

ὅπου τὸ Φ εἶναι κυρτή, κάτωθεν ἡμισυνεχὴς συνάρτηση ἀπὸ τὸ V στὸ $(-\infty,\ +\infty)$, $\Phi \not\equiv \infty$. Ἡ παρακάτω πρόταση ἰσχύει:

Πρόταση: Ἔστω ὅτι ἰσχύουν γιὰ τὸν γραμμικό, φραγμένο, συμμετρικὸ τελεστὴ $L(\Gamma_j)$ οἱ ἰδιότητες (28), (29) τῆς προηγουμένης προτάσεως καθὼς καὶ ἡ (30) γιὰ τὴν $p(\Gamma_j)$. Μὲ τὶς προϋποθέσεις αὐτές, $X_j \to X$ στὸν V γιὰ $j \to \infty$, ὅπου X εἶναι ἡ λύση τῆς ἀνισότητας μεταβολῶν

$$(L(\Gamma)X,\ X^* - X) + \Phi(X^*) - \Phi(X) \geqslant (p(\Gamma),\ X^* - X)\ \forall\ X^* \in V \tag{36}$$

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ τὴν (35) προκύπτει

$$\begin{aligned} c\ \|X_j\|^2 &\leqslant (L(\Gamma_j)X_j, X_j) \\ &\leqslant (L(\Gamma_j)X_j, X^*) + \Phi(X^*) - \Phi(X_j) - (p(\Gamma_j), X^* - X_j)\ \forall\ X^* \in V \end{aligned} \tag{39}$$

Μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Hahn – Banach μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴν ἀνισότητα

$$\Phi(X_j) \geqslant -(c\ \|X_j\| + c) \qquad c\ \text{σταθ.} \geqslant 0 \tag{38}$$

Ὑποθέτοντας ὅτι $\Phi(X^*) < \infty$, ἡ (37) δίδει λόγω τῆς (38), τῆς (29) καὶ τῆς (30) ὅτι $\|X_j\| < c_1$ ὅπου c_1 εἶναι σταθερά. Ἄρα ἰσχύει ἡ (32). Ἀπὸ τὴν (35) προκύπτει

$$\begin{aligned} (L(\Gamma_j)X_j,\ X_j) + \Phi(X_j) \leqslant\ & (L(\Gamma_j)X_j,\ X^*) + \Phi(X^*) \\ & - (p(\Gamma_j),\ X^* - X_j)\ \forall\ X^* \in V \end{aligned} \tag{39}$$

Λόγω τῆς κυρτότητός της ἡ Φ εἶναι κάτωθεν ἡμισυνεχὴς ἀσθενῶς συνάρτηση καὶ ἐπομένως

$$\Phi(\widetilde{X}) \leqslant \liminf \Phi(X_j) \tag{40}$$

Ἐπίσης ἔχουμε ὅτι

$$(L(\Gamma_j)(\widetilde{X} - X_j),\ (\widetilde{X} - X_j)) \geqslant 0 \tag{41}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει λόγω τῆς (29) ὅτι

$$\begin{aligned} \liminf(L(\Gamma_j)X_j, X_j) &\geqslant \liminf[(2L(\Gamma_j)X_j,\ \widetilde{X}) - (L(\Gamma_j)\widetilde{X},\ \widetilde{X})] \\ &= (L(\Gamma)\widetilde{X},\ \widetilde{X}) \end{aligned} \tag{42}$$

Ἡ (39) συνεπάγεται λόγω τῶν (29), (30) ὅτι

$$\begin{aligned} \Phi(\widetilde{X}) + ((L(\Gamma)\widetilde{X},\ \widetilde{X}) &\leqslant \liminf\Phi(X_j) + \liminf(L(\Gamma_j)X_j,\ X_j) \\ &\leqslant (L(\Gamma)\widetilde{X},\ X^*) + \Phi(X^*) \\ &\qquad - (p(\Gamma),\ X^* - \widetilde{X})\ \forall\ X^* \in V \end{aligned} \tag{43}$$

Ἑπομένως ἡ $\widetilde{X}$ εἶναι λύση τῆς (36). Ἄρα $X = \widetilde{X}$ λόγω τῆς μοναδικότητος τῆς λύσεως τῆς (36) ὅπως εὔκολα ἀποδεικνύεται [9]. Γιὰ νὰ δειχθῆ τώρα ἡ ἰσχυρὴ σύγκλιση $X_j \to X$ στὸ V χρησιμοποιοῦμε τὴν ἀνισότητα

$$\begin{aligned} c\ \|X_j - X\|^2 &\leqslant (L(\Gamma_j)(X - X_j),\ X - X_j) \\ &\leqslant -(p(\Gamma_j), X - X_j) + \Phi(X) - \Phi(X_j) \\ &\qquad + (L(\Gamma_j)X, X - X_j) \end{aligned} \tag{44}$$

Ἀλλὰ $\liminf \Phi(X_j) = -\limsup -\Phi(X_j)$. Ἑπομένως ἡ (44) συνεπάγεται παίρνοντας τὸ limsup τῶν δύο μελῶν της καὶ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὶς (29), (30) καὶ (40) καὶ τὴν $X=\tilde{X}$ ὅτι $\limsup \|X_j - X\|^2 \leqslant 0$. Ἑπομένως προκύπτει ἡ ἰσχυρὴ σύγκλιση ὅ.ἔ.δ.

Οἱ προαναφερθεῖσες προτάσεις δικαιολογοῦν τὴν μεθοδολογία ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς προβλήματος ὑπολογισμοῦ τάσεων, παραμορφώσεων κ.λπ. σὲ σῶμα τύπου fractal, ἡ ὁποία συνίσταται στὴν διαδοχικὴ ἐπίλυση σωμάτων κλασικῆς γεωμετρίας.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΥΠΟΥ FRACTAL

Στὴν παράγραφο αὐτὴ θὰ ἐπιχειρηθῇ μιὰ ἐπέκταση τῆς κλασικῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων ὅταν ἡ γεωμετρία τοῦ πρὸς ἐπίλυση προβλήματος εἶναι τύπου fractal. Ἔστω V κατάλληλος διαχωρίσιμος χῶρος Hilbert μὲ τὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο (.,.) καὶ ἔστω μιὰ συμμετρική, συνεχὴς διγραμμικὴ μορφὴ a(.,.) ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνισότητα (V – ἐλλειπτικότητα)

$$a(u,u) \geqslant c \ \|u\|_V^2 \quad \forall \ u \in V \quad c \text{ σταθ.} > 0 \tag{45}$$

Ἐπίσης ἔστω l μιὰ γραμμικὴ μορφὴ ἐπὶ τοῦ V. Ἐξετάζουμε τὴν ἐξίσωση μεταβολῶν

$$u \in V \quad a(u,v) = (l,v) \quad \forall \ v \in V \tag{46}$$

ἡ ὁποία λόγω τῆς (45) ἔχει μία καὶ μόνον λύση.

Συμβολίζουμε μὲ $F \subset R^n$ ἕνα χωρίο τύπου fractal τὸ ὁποῖο τὸ ἐμβαπτίζουμε στὸ ἀνοικτὸ χωρίο $\Omega \subset R^n$. Ὁ χῶρος V ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ Ω. Συμβολίζουμε μὲ V_h τὸν πεπερασμένης διαστάσεως ὑποχῶρο τοῦ V διαστάσεως M καὶ ἔστω $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$ ἡ βάση τοῦ V_h ἔτσι ὥστε κάθε $v \in V_h$ νὰ μπορῇ νὰ γραφῇ μὲ μονοσήμαντο τρόπο

$$v = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i \qquad \eta_i \in R \tag{47}$$

Ἡ διακριτοποιημένη μορφὴ τῆς (46) ἔχει ὡς ἑξῆς:

$$u_h \in V_h \qquad a(u_h, v) = (l,v) \quad \forall \quad v \in V_h \tag{48}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία γράφοντας τὸ u_h μὲ τὴν μορφὴ (47) προκύπτει ἡ μητρωικὴ ἐξίσωση $A\xi = b$, ὅπου $\xi = \{\xi_i\} \in R^M$, $b = \{b_i\} \in R^M$ μὲ $b_i = l(\varphi_i)$ καὶ $A = \{a_{ij}\}$ μὲ $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, $i,j = 1,\ldots,M$, εἶναι τὸ μητρῶο δυσκαμψίας. Ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων στηρίζεται στὸν κατάλληλο καθορισμὸ τῶν χώρων V_h. Παραδείγματος χάριν ὁ V_h μπορεῖ νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολυωνυμικὲς συναρτήσεις ὁριζόμενες σὲ ὑποδιαιρέσεις τοῦ Ω (π.χ. τριγωνικὰ πεπερασμένα στοιχεῖα ἄν $\Omega\subset R^2$. κ.λπ.).

Μέχρι στιγμῆς θεωρήσαμε $\Omega\subset F$ καὶ ἐφαρμόσθηκε ἡ κλασικὴ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων στὸ Ω. Γιὰ νὰ μεταβοῦμε στὸ F, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὸν περιορισμὸ τοῦ χώρου V_h στὸ F, δηλαδὴ τὸν χῶρο $\widetilde{V}_h = V_h/F$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ διακριτὸ πρόβλημα

$$u_h\in\widetilde{V}_h \quad a(u_h,v) = (l,v) \quad \forall\ v\in\widetilde{V}_h \tag{49}$$

τὸ ὁποῖο ὁδηγεῖ πάλι σὲ μητρωικὴ ἐξίσωση ἀνάλογη μὲ τὴν προηγούμενη, μὲ τὴν διαφορὰ ὅτι τώρα στὴν μόρφωση τῶν διαφόρων ὁλοκληρωμάτων θὰ πρέπη νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὁ περιορισμὸς τοῦ χώρου V καὶ V_h στὸ F. Ὅπως εἶναι γνωστὸ [14] ἀπὸ τὶς (46) καὶ (48) προκύπτει ἡ ἐκτίμηση τοῦ σφάλματος

$$\|u-u_h\|_V \leqslant \alpha\ \|u-v\|_V \quad \forall\ v\in V_h \quad \alpha \text{ σταθ.} > 0 \tag{50}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι

$$\|u-v\|_V \leqslant c\ \|\tilde{u}-\tilde{v}\|_{V/F} \quad \forall\ v\in V_h \quad c \text{ σταθ.} > 0 \tag{51}$$

ὅπου $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ εἶναι ὁ περιορισμὸς τοῦ $u,v\in V_h$ στὸ F. Πράγματι ἄν $V = H^m(\Omega)$ (χῶρος Sobolev) καὶ $F\subset\Omega$ μποροῦμε εὔκολα νὰ ἀποδείξουμε τὴν (51). Τὰ παραπάνω γίνονται εὔκολα ἀντιληπτὰ μὲ ἕνα παράδειγμα: Ἔστω $\Omega\subset R^2$, τὸ ὁποῖο ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει σύνορο Γ πολυγωνικοῦ τύπου καὶ ἔστω $F\subset\Omega$. Θέλουμε νὰ λύσουμε τὴν διαφορικὴ ἐξίσωση

$$-\Delta u = f \text{ στὸ } F, \tag{52}$$

$$u = 0 \text{ στο } \Gamma_1 \tag{53}$$

ὅπου Γ_1 εἶναι τὸ σύνορο τοῦ F καὶ $\Gamma\cap\Gamma_1$ περιέχει τὶς κορυφὲς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς. Τὸ Ω ὑποδιαιρεῖται σὲ τριγωνικὰ πεπερασμένα στοιχεῖα $K_1,\ldots,K_m$ καὶ

$$V_h = \{v \mid v/K_i \text{ γραμμικὴ ἐπὶ τοῦ } K_i\ i=1,\ldots,m, \quad v=0 \text{ στὸ } \Gamma\} \tag{54}$$

ἐνῶ ὡς γνωστὸν $V = \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$. Οἱ συναρτήσεις βάσεως φ_i ὁρίζονται νὰ ἔχουν τὴν τιμὴ 1 σὲ κάθε κόμβο N καὶ τὴν τιμὴ μηδὲν στὶς ὑπόλοιπες κορυφὲς τῶν τριγώνων ποὺ ἔχουν τὸν κόμβο N ὡς κοινὴ κορυφή, ἐνῶ εἶναι μηδὲν σ' ὅλα τὰ ἄλλα τριγωνικὰ στοιχεῖα τοῦ Ω. Ἡ μητρωικὴ ἐξίσωση $A\xi = b$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν (48) ἔχει

$$a_{ij} = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} K_i} \nabla\varphi_i . \nabla\varphi_j \, dx, \quad b_i = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} K_i} f\varphi_i \, dx \tag{55}$$

ἐνῶ ἡ μητρωική ἐξίσωση πού ἀντιστοιχεῖ στὴν (49) ἔχει

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} K_i \cap F} \nabla\varphi_i . \nabla\varphi_j \, dx, \quad b_i \int_{\bigcup_{i=1}^{m} K_i \cap F} f\varphi_i \, dx \tag{56}$$

Γεννᾶται βέβαια πρόβλημα γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν ὁλοκληρωμάτων στὴν (56), ὅταν αὐτὰ πρέπη νὰ ὑπολογισθοῦν πάνω στὸ σύνολο τύπου fractal $\bigcup_{i=1}^{m} K_i \cap F$. Προσεγγίζουμε τὸ F μὲ μιὰ ἀκολουθία $\{F_n\}$ ὅπως στὰ προηγούμενα καὶ γιὰ $n \to \infty$ ἔχουμε τὴν ἀκριβῆ τιμὴ τῶν $\tilde{a}_{ij}$ καὶ $\tilde{b}_i$. Στὴν πράξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: i) ὅταν τὸ F ἔχη σύνορο Γ_1 τύπου fractal, τότε ἀρκοῦν λίγες προσεγγίσεις γιὰ νὰ προκύψη μιὰ παραδεκτὴ τιμὴ γιὰ τὸ $\tilde{a}_{ij}$ καὶ $\tilde{b}_i$ ii) ὅταν τὸ F αὐτὸ καθ' αὐτὸ εἶναι τύπου fractal, τότε συνεχίζουμε τὶς προσεγγίσεις μέχρις ὅτου εὑρεθῆ τιμὴ n γιὰ τὴν ὁποία $|\tilde{a}_{ij}^{(n)} - \tilde{a}_{ij}^{(n+1)}| < \varepsilon$, $|\tilde{b}_j^{(n)} - \tilde{b}_j^{(n+1)}| < \varepsilon$ ὅπου ε ἀρκούντως μικρὸς ἀριθμός.

Θὰ πρέπη νὰ σημειώσουμε ὅτι συνήθως δίδεται τὸ F μὲ τὸ σύνορό του Γ_1 καὶ ἐμεῖς τὰ ἐγγράφουμε σὲ πολυγωνικὸ Ω τὸ ὁποῖο νὰ περνᾶ ἀπὸ μερικὲς τουλάχιστον ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ Γ_1.

Γιὰ τὸ ἐξεταζόμενο παράδειγμα ἡ (51) ἰσχύει καὶ ἑπομένως μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴν σχετικὴ ἀνισότητα σφάλματος

$$\|u - u_h\|_V \leqslant \alpha_1 \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_V \quad \forall \; v \in V_h \quad \alpha_1 \text{ σταθ.} > 0 \tag{57}$$

Στὴν κλασικὴ θεωρία συνεχίζουμε θέτοντας ὅπου v τὴν συνάρτηση παρεμβολῆς πv, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω $v \in C^\circ(K_i)$ ὅπου K_i εἶναι ἕνα τριγωνικὸ στοιχεῖο μὲ κορυφὲς a_k $k = 1,2,3$, καὶ ἔστω $\pi v \in P_1(K)$ – ἕνα πολυώνυμο 1ου βαθμοῦ στὸ K_1 – τέτοιο ὥστε $\pi v(a_k) = v(a_k)$ $k = 1,2,3$. Τὰ σφάλματα παρεμβολῆς δίδονται ἀπὸ καθορισμένους τύπους [14], ὁπότε προκύπτει τὸ σφάλμα $\|u - u_h\|_V$ ἀπὸ τὴν (57). Στὴν προκειμένη περίπτωση θὰ πρέπη νὰ μορφώσουμε τὴν διαφορὰ $\tilde{u} - \tilde{v}$ στὸ F καὶ νὰ πάρουμε τὴν νόρμα της στὸν χῶρο V/F. Σχετικὰ μὲ τὸν ὁρισμὸ χώρων σὲ fractal σύνολα παραπέμπουμε στὸ [15].

Ὑπάρχει καὶ ἕνας ἄλλος τρόπος προσεγγίσεως τοῦ προβλήματος. Ὁρίζουμε ἐξ ἀρχῆς τὸν χῶρο V ἐπὶ τοῦ F καὶ μορφώνουμε τὸ σχετικὸ διακριτὸ πρόβλημα. Γιὰ τὸ σφάλμα ἰσχύει ἡ σχέση (50). Πάλι θὰ θέσουμε $v = \pi v$ στὴν (50), ἀλλὰ τώρα, ἐπειδὴ τὸ F εἶναι τύπου fractal, οἱ τύποι ποὺ δίνουν τὰ σφάλματα παρεμβολῆς τροποποιοῦνται κατά τι [16]. Ἂς ἐξετάσουμε τὸ θέμα στὴν γενικὴ περίπτωση ὅπου $F \subset R^n$ καὶ Σ τὸ σύνολο τῶν σημείων παρεμβολῆς. Συμβολίζουμε μὲ $\overline{co}\Sigma$ τὸ κλειστὸ κυρτὸ περίβλημα τῶν σημείων τοῦ Σ, μὲ h τὴν διάμετρο τοῦ $\overline{co}\Sigma$ καὶ μὲ ϱ τὸ sup {διαμέτρων σφαιρῶν ἐντὸς τοῦ $\overline{co}\Sigma$}. Ἔστω ἐπίσης $v{:}R^n \to R$ μιὰ συνάρτηση καὶ $\pi v \in P_k$ πολυώνυμα k – βαθμοῦ. Τὰ σημεῖα παρεμβολῆς $\Sigma = \{a,\ldots,a_v\}$ ἔχουν τὴν ἰδιότητα τῆς k – ἐπιλυσιμότητας δηλαδὴ γιὰ κάθε $b_i \in R$, $i = 1,\ldots,v$, νὰ ὑπάρχη ἀκριβῶς ἕνα πολυώνυμο $P \in P_k$, τέτοιο ὥστε $P_k(a_i) = b_i$, $i - 1,\ldots,v$. Ἐπίσης ὑποθέτουμε ὅτι τὸ $F \subset R^n$ διατηρεῖ τὴν ἀνισότητα Markov, δηλαδὴ ὅτι [15] [16]

$$\max_B |P| \leqslant c \max_{B \cap F} |P| \qquad c = c(n,k,F) \qquad c \text{ σταθ.} > 0 \tag{58}$$

γιὰ ὅλα τὰ k, ὅλα τὰ πολυώνυμα $P \in P_k$ καὶ ὅλες τὶς σφαῖρες $B = B(x_o,r)$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $x_o \in F$ καὶ διάμετρο $0 < r \leqslant 1$. Ἰσοδύναμος μὲ τὴν (58) εἶναι ὁ ἑξῆς χαρακτηρισμὸς συνόλων F ποὺ διατηροῦν τὴν ἀνισότητα Markov: Τὸ $F \subset R^n$ διατηρεῖ τὴν ἀνισότητα Markov ἄν καὶ μόνον ἄν ὑπάρχη c σταθερὰ > 0 τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $B = B(x_o,r)$, $x_o \in F$, $0 < r \leqslant 1$, νὰ ὑπάρχουν (n + 1) γραμμικῶς ἀνεξάρτητα σημεῖα $a_1,\ldots,a_{n+1} \in F \cap B$ μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι ἡ n – διάστατη σφαίρα ἡ ἐγγεγραμμένη στὸ κλειστὸ περίβλημα $co\{a_n,\ldots,a_{n+1}\}$ νὰ ἔχη ἀκτίνα ὄχι μικρότερη ἀπὸ τὴν cr. (ἰδιότητα (A)). Ἰσχύει τὸ παρακάτω: Ἔστω $F \subset R^n$ ποὺ διατηρεῖ τὴν ἀνισότητα Markov καὶ ἔστω Σ ἕνα σύνολο σημείων μὲ τὴν ἰδιότητα τῆς k – ἐπιλυσιμότητας. Ἐπίσης ἔστωσαν τὰ σημεῖα $\{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$ τὰ ὁποῖα ἐπιλέγονται ἔτσι ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰδιότητα (A) καὶ τὴν ἰδιότητα

$$\{a_1,\ldots,a_{n+1}\} \subset \Sigma \subset B(x_o,r) \cap F \tag{59}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι $v \in C^{k+1}(F \cap B)$ καὶ ὅτι $\pi v \in P_k$ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολῆς. Ἰσχύει ἡ ἀνισότητα

$$\sup_{F \cap B} |(v - \pi v)(x)| \leqslant c r^{k+1} \|v\|_{C^{k+1}} (F \cap B) \tag{60}$$

καὶ γενικότερα ἂν D_j εἶναι ἡ μερικὴ παράγωγος j – τάξεως, ἡ ἀνισότητα

$$\sup_{F \cap B} |(D_j v - D_j(\pi v)(x))| \leqslant c r^{k+1-|j|} \|D_j u\|_{C^{k+1}(F \cap B)} \tag{61}$$

ὅπου $0 \leqslant |j| \leqslant k$ καὶ $c = c(F,k,|j|,\Sigma)$. Ἡ σταθερὰ c εἶναι ἡ αὐτὴ γιὰ ὅλα τὰ ἰσοδύναμα σύνολα Σ ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα τῆς k – ἐπιλυσιμότητας. $\hat{\Sigma}$ καὶ Σ θεωροῦνται ὡς ἰσοδύναμα, ἄν ὑπάρχη ἀντιστρέψιμο μητρῶο A: $R \rightarrow R^n$ καὶ $b \in R^n$ τέτοιο ὥστε $\hat{a}_i = Aa_i + b$ γιὰ $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Γιὰ τὸν ὁρισμὸ τῶν χώρων $C^{k+1}(F)$ κ.λπ. ὅπου F fractal παραπέμπουμε στὸ [15]. Στὴν περίπτωση τοῦ παραδείγματος (52) (53) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα (61) γιὰ $j = 0,1$ ἐφόσον ἐπιλεγοῦν οἱ κορυφὲς τῆς τριγωνοποιήσεως ἔτσι ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν τὶς σχετικὲς προϋποθέσεις γιὰ τὴν ἰσχὺ τῆς (61).

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΤΥΠΟΥ FRACTAL ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἡ κλασικὴ μέθοδος τῶν συνοριακῶν καὶ τῶν πεπερασμένων στοιχείων στηρίζεται σὲ λεῖες συναρτήσεις παρεμβολῆς. Θὰ μποροῦσε ὅμως ἀντ' αὐτῶν νὰ χρησιμοποιηθῆ μιὰ μὴ λεία συνάρτηση παρεμβολῆς τύπου fractal ἢ τύπου «σχεδὸν fractal». Ἡ πρώτη εἶναι τὸ σταθερὸ σημεῖο τοῦ τελεστοῦ T ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν (14), ἐνῶ ἡ δεύτερη εἶναι ἕνας ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\{y_1, y_2, \ldots y_n \ldots\}$ $y_{n+1} = T_{yn}$ γιὰ κάποιο n. Ἄς ἐφαρμόσουμε τὴν προτεινόμενη μέθοδο στὴν ἀριθμητικὴ ἐπίλυση τῆς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως Fredholm 1ου εἴδους

$$\frac{1}{2\pi} \int q(y)(\ln \frac{1}{|x-y|})d\Gamma = u_o(x) \quad x \in \Gamma \tag{62}$$

ὅπου $x \in R^2$, Γ εἶναι μιὰ ἐπαρκῶς λεία κλειστὴ γραμμὴ στὸ R^2 καὶ u_o εἶναι ἡ μιὰ δεδομένη συνάρτηση. Καθορίζουμε ἐπὶ τοῦ Γ τὰ σημεῖα $x_o, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} \equiv x_o$. Ἔστωσαν $q_o, q_1, \ldots, q_N$ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς προσδιοριστέας συναρτήσεως q στὰ σημεῖα $x_o, x_1, \ldots, x_N$ ἀντιστοίχως. Προσεγγίζουμε τὴν $q = q(x)$ μὲ συνάρτηση τύπου fractal ἢ τύπου «σχεδὸν fractal», ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $(x_o, q_o), (x_1, q_1), \ldots, (x_N, q_N)$, βάσει τῶν τύπων (10)÷(13). Χρησιμοποιώντας τὴν μέθοδο σημειακῆς ἐπαληθεύσεως (collocation method) προκύπτει σύστημα γραμμικὸ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους $q_o, q_1, \ldots, q_N$ τὸ ὁποῖο δι' ἐπιλογῆς τῶν συντελεστῶν q_n μπορεῖ νὰ ἔχη ρυθμιζόμενες ἀριθμητικὲς ἰδιότητες. Ἀνάλογες σκέψεις μποροῦν νὰ ἰσχύσουν καὶ γιὰ τὴν μέθοδο τῶν πεπερασμένων στοιχείων. Θὰ πρέπη στὸ σημεῖο αὐτὸ νὰ παρατηρηθῆ ὅτι ἡ περιγραφεῖσα μέθοδος δὲν ἔχει ἀκόμη πλήρως διερευνηθῆ οὔτε ἀπὸ μαθηματικῆς οὔτε ἀπὸ ἀριθμητικῆς σκοπιᾶς. (Βλ. σχετικὰ ἐπίσης [17], [18]).

Ἄς ἐξετάσουμε ἐπίσης τὸ πρόβλημα τῆς συγκλίσεως τῆς λύσεως συνοριακῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ὅταν τὸ σύνορο Γ ἑνὸς σώματος εἶναι fractal τύπου καὶ προσεγγίζεται κατὰ τὴν μετρικὴ h(A,B) ἀπὸ τὰ σύνορα Γ_j τὰ ὁποῖα εἶναι κλασικοῦ τύπου. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὴν σύγκριση τῶν λύσεων τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

$$\varphi - A(\Gamma)\varphi = f(\Gamma) \text{ καὶ } \varphi_n - A_n(\Gamma_n)\varphi_n = f_n(\Gamma_n) \tag{63}$$

ὅπου A, A_n: $X \rightarrow X$ εἶναι ἕνας συμπαγὴς γραμμικὸς τελεστὴς δρῶν στὸν χῶρο Banach X. Ὑποθέτουμε ὅτι $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$ γιὰ $n \rightarrow \infty$, καὶ ὅτι $f_n = f_n(\Gamma_n) \rightarrow f(\Gamma) = f$ στὸν χῶρο X (ἰσχυρὴ σύγκλιση). Ἐπίσης ὅτι

$$\text{i) } A_n(\Gamma_n)\varphi \rightarrow A(\Gamma)\varphi \quad \forall \quad \varphi \in X \tag{64}$$

$$\text{ii) Τὸ } (A(U) = \{A_n(\Gamma_n)\varphi / \ \varphi \in U, \ U \text{ φραγμένο}, \ n = 1,2,\dots\} \text{ εἶναι σχετικῶς συμπαγὲς ἐντὸς τοῦ } X \tag{65}$$

Ἰσχύει ἡ παρακάτω πρόταση

Πρόταση: Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος τελεστὴς τοῦ $I - A$. Ὑπὸ αὐτὴ τὴν προϋπόθεση καὶ γιὰ κάθε n τέτοιο ὥστε

$$\|(I - A(\Gamma))^{-1}(A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma))A_n(\Gamma_n)\| < 1 \tag{66}$$

ὁ τελεστὴς $I - A_n$ εἶναι ἀντιστρέψιμος καὶ ὁμοιομόρφως φραγμένος. Ἰσχύει δὲ ὅτι

$$\|(I - A_n(\Gamma_n)^{-1}\| \leqslant \frac{1 + \|(I - A(\Gamma))^{-1}A_n(\Gamma_n)\|}{1 - \|(I - A((\Gamma))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)]A_n(\Gamma_n)\|} \tag{67}$$

Γιὰ τὶς λύσεις φ καὶ φ_n τῶν ἐξισώσεων (63) προκύπτει τὸ σφάλμα

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \frac{\|(I - A(\Gamma))^{-1}\|\{\|(A_n(\Gamma_n)f_n - A(\Gamma)f)\| + \|(A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma))A_n(\Gamma_n)\varphi\|\} + \|f_n - f\|}{1 - \|(I - A(\Gamma))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)]A_n(\Gamma_n)\|} \tag{68}$$

Στοὺς τύπους (66)÷(68) συμβολίζουμε μὲ $\|.\|$ τὶς διάφορες νόρμες.

Ἀπόδειξη: Ἡ θεωρία Riesz συνεπάγεται ὅτι ὁ ἀντίστροφος τελεστὴς $(I - A(\Gamma))^{-1}$ εἶναι φραγμένος. Ὁρίζουμε τὸν τελεστή.

$$B_n = I + (I - A(\Gamma))^{-1}A_n(\Gamma_n) \tag{69}$$

ἰσχύει ὅτι

$$B_n(I - A_n(\Gamma_n)) = I - C_n \tag{70}$$

ὅπου

$$C_n = (I - A(\Gamma))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)]A_n(\Gamma_n) \tag{71}$$

Λόγω τῶν (64) (65) προκύπτει ὅτι $\|C_n\| \to 0$ γιὰ $n \to \infty$. Ἂν $\|C_n\| < 1$, ἀπὸ τὸ γνωστὸ θεώρημα τῆς σειρᾶς Neumann προκύπτει ὅτι ὁ $I - C_n$ ἔχει ἕνα φραγμένο ἀντίστροφο τελεστὴ καὶ μάλιστα ὅτι

$$\|(I - C_n)^{-1}\| \leqslant (1 - \|C_n\|)^{-1} \tag{72}$$

Ἀπὸ τὴν (70) προκύπτει ὅτι $I - A_n(\Gamma_n)$ εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα. Ἄρα ([19] σελ. 29) ὁ $[I - A_n(\Gamma_n)]^{-1}$ ὑπάρχει. Λόγω τῆς (70) μποροῦμε νὰ γράψουμε ὅτι

$$(I - A_n(\Gamma_n))^{-1} = (I - (C_n)^{-1} B_n \tag{73}$$

καὶ ἔτσι προκύπτει ἡ ἀνισότητα (67). Ἐν συνεχεία προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned} \varphi_n - \varphi &= (I - A_n(\Gamma_n))^{-1} f_n - (I - A(\Gamma))^{-1} f \\ &= (I - C_n)^{-1}\{B_n f_n - (I - C_n)(I - A(\Gamma))^{-1} f)\} \\ &= (I - C_n)^{-1}\{(I - A(\Gamma))^{-1}[A_n(\Gamma_n) f_n - A(\Gamma) f] \\ &\qquad + C_n(I - A(\Gamma))^{-1} f\} + (I - C_n)^{-1}(f_n - f) \end{aligned} \tag{74}$$

χρησιμοποιώντας τὴν βοηθητικὴ σχέση

$$(I - A(\Gamma))^{-1} = I + (I - A(\Gamma))^{-1} A \tag{75}$$

Ἀπὸ τὴν (74) μὲ τὴν βοήθεια τῆς (71) καὶ τῆς (72) προκύπτει ἡ σχέση

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \frac{\|(I - A(\Gamma))^{-1}\|\{\|(A_n(\Gamma_n) f_n - A(\Gamma) f)\| + \|(A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)) A_n(\Gamma_n)\varphi\|\} + \|f_n - f\|}{1 - \|(I - A(\Gamma))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)] A_n(\Gamma_n)\|} \tag{76}$$

ὅ.ἔ.δ.

Ἀπὸ τὴν προηγούμενη πρόταση ἀντιστρέφοντας τοὺς ρόλους τῶν $A(\Gamma)$ καὶ $A_n(\Gamma_n)$ καταλήγουμε στὴν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση: Ἔστω ὅτι ὑπάρχει n_o φυσικὸς ἀριθμὸς τέτοιος ὥστε γιὰ ὅλα τὰ $n > n_o$ νὰ ὑπάρχη ὁ ἀντίστροφος τελεστὴς τοῦ $(I - A_n(\Gamma_n)$ καὶ νὰ εἶναι ὁμοιομόρφως φραγμένος. Μὲ αὐτὲς τὶς προϋποθέσεις ὑπάρχει ὁ $(I - A(\Gamma))^{-1}$ καὶ εἶναι φραγμένος, ἰσχύει δὲ ἡ σχέση

$$\|(I - A(\Gamma))^{-1}\| \leqslant \frac{1 + \|(I - A_n(\Gamma_n))^{-1} A(\Gamma)\|}{1 - \|(I - A_n((\Gamma_n))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)] A(\Gamma)\|} \tag{77}$$

γιὰ ὅλα τὰ n γιὰ τὰ ὁποῖα

$$\|(I - A_n(\Gamma_n))^{-1}[A_n(\Gamma_n) - A(\Gamma)] A(\Gamma)\| < 1. \tag{78}$$

Γιὰ τὶς λύσεις τῶν ἐξισώσεων (63) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα σφάλματος

$$\|\varphi-\varphi_n\| \leqslant \frac{\|(I-A_n(\Gamma_n))^{-1}\|\{\|(A(\Gamma)f-A_n(\Gamma_n)f_n)\|+\|(A(\Gamma)-A_n(\Gamma_n))A_n(\Gamma_n)\varphi\|\}+\|f_n-f\|}{1-\|(I-A_n(\Gamma_n))^{-1}[A(\Gamma)-A_n(\Gamma_n)]A(\Gamma)\|} \tag{79}$$

ΣΥΝΟΡΑ ΤΥΠΟΥ FRACTAL. ΜΕΣΟΦΑΣΗ

῾Υπάρχουν πολλὲς περιπτώσεις φυσικῶν προβλημάτων στὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαία ἡ ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων μετὰ μερικῶν παραγώγων σὲ περιοχὲς Ω μὲ σύνορα Γ τύπου fractal. ᾿Αναφέρουμε ὡς παράδειγμα τὸ πρόβλημα τοῦ μετώπου διαχύσεως (σχ. 8), ὅπου πρέπει νὰ ἐπιλυθῆ τὸ πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\Delta u = -p \text{ στὸ } \Omega \tag{80}$$
$$u = u_o \text{ ἐπὶ τοῦ } \Gamma \tag{81}$$

ἢ τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν τάσεων καὶ μετατοπίσεων u σὲ γραμμικὰ ἐλαστικὸ σῶμα Ω μὲ ρηγματωμένο σύνορο ὅπου τὸ πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν εἶναι

$$Au = -p \text{ στο } \Omega \tag{82}$$
$$u = u_o \text{ ἐπὶ τοῦ } \Gamma \tag{83}$$

Στὶς (80)÷(83) $p=p(x)$, $u_0(x)$ καὶ A εἶναι ὁ γνωστὸς τελεστὴς τῆς θεωρίας ἐλαστικότητος. ᾿Επίσης σὲ κάθε πρόβλημα ἀλλαγῆς φάσεως δημιουργοῦνται κατὰ τὴν διάρκεια τῆς ἀλλαγῆς φάσεως, δηλ. κατὰ τὴν «μεσόφαση», σύνορα τύπου fractal μεταβαλλόμενα ταχέως. Ἂν τὸ $\Omega \subset R^n$, ὑποθέτουμε ὅτι ἡ διάσταση Hausdorff d του Γ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ n καὶ $n-1$. Τὸ $d-$διάστατο μέτρο Hausdorff συμβολίζεται ὡς m_d, ἐνῶ τὸ $n-$διάστατο μέτρο Lebesgue συμβολίζεται ὡς m.

Ἂς ἐξετάσουμε τὸ πρόβλημα (82) (83) ὡς ἀντιπροσωπευτικὸ πρόβλημα. Ὅπως εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν μαθηματικὴ θεωρία ἐλαστικότητος, ἂν τὸ σύνορο Γ εἶναι τύπου Lipschitz, δηλ. $(n-1)-$διαστάσεως Hausdorff, ἐξετάζουμε ἀντὶ τῶν (82) (83) μία ἰσότητα μεταβολῶν. Εἰδικώτερα ἂν $p\in L^2(\Omega)$ καὶ ἂν ὑπάρχη συνάρτηση $\tilde{u}\in[H^1(\Omega)]^3$ (χῶρος Sobolev), τέτοια ὥστε $\gamma\tilde{u}=u_0\in[H^{1/2}(\Omega)]^3$ (μὲ γ συμβολίζεται τὸ ἴχνος – trace – τῆς $\tilde{u}$ στὸ σύνορο Γ), μὲ τὸν μετασχηματισμὸ $\bar{u}=u-\tilde{u}$ προκύπτει τὸ πρόβλημα

$$A\bar{u} = p - A\tilde{u} \text{ στὸ } \Omega \tag{82α}$$
$$\bar{u} = 0 \text{ ἐπὶ τοῦ } \Gamma \tag{83α}$$

τὸ ὁποῖο εἶναι ὁμογενές. Ἐν συνεχεία θεωροῦμε τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῆ $\bar{u} \in [\overset{0}{H}{}^1(\Omega)]^3$ τέτοιο ὥστε νὰ ἱκανοποιῆ τὴν ἐξίσωση μεταβολῶν

$$(A\bar{u},\bar{v}) = (p,\bar{v}) - (A\hat{u},\bar{v}) \ \forall \ \bar{v} \in [\overset{0}{H}{}^1(\Omega)]^3 \tag{84}$$

γιὰ τὸ ὁποῖο ἀποδεικνύεται μὲ τὴν βοήθεια τῆς ἀνισότητας Korn [20] καὶ τοῦ θεωρήματος Lax – Milgram ἡ ὕπαρξη μιᾶς μονοσημάντως ὁριζομένης λύσεως. Ὑπενθυμίζουμε δὲ στὸ σημεῖο αὐτὸ ὅτι ἡ (84) εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας τοῦ σώματος. Προκύπτουν τώρα τὰ ἑξῆς ἐρωτήματα:

i) Ὅταν τὸ Γ εἶναι τύπου fractal, πῶς ὁρίζεται τὸ ἴχνος γu γιὰ $u \in H^1(\Omega)$; Ποιὲς συναρτήσεις u ἐπὶ τοῦ Γ εἶναι ἴχνη συναρτήσεων $u \in H^1(\Omega)$;

ii) Ἔχει ἔννοια ἡ ἰσότητα $u = u_o$ ἐπὶ τοῦ Γ;

iii) Ποία ἡ ἐξάρτηση τῆς λύσεως $\bar{u}$ τῆς (84) ἀπὸ τὸ p καὶ τὸ u_o ὅταν τὸ Γ εἶναι τύπου fractal;

Σύμφωνα μὲ [15] ἕνα σύνολο Borel E στὸ R^n καλεῖται d – σύνολο, $0 < d \leqslant n$, ἂν ὑπάρχουν σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ὥστε

$$c_1 r_1^d \leqslant m_d(E \cap B(x,r) \leqslant c_2 r_2^d \text{ γιὰ } x \in E \ 0 < r \leqslant 1 \tag{85}$$

Ἕνα ἀνοικτὸ συνεκτικὸ σύνολο $\Omega \in R^n$ καλεῖται (ε,δ) – περιοχὴ [21] ἂν γιὰ κάθε $x,y \in \Omega$ μὲ $|x-y| < \delta$, $\delta \in (0,\infty]$ ὑπάρχη εὐθυγραμμίσιμο τόξο $\gamma \subset \Omega$ μὲ μῆκος l(γ) ποὺ συνδέει τὰ x καὶ y γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύουν οἱ συνθῆκες

$$l(\gamma) \leqslant |x-y|/\varepsilon \quad \varepsilon > 0 \tag{86}$$

$$d(z,\Gamma) \geqslant \varepsilon|y-z| \ |x-z|/|x-y| \text{ γιὰ } z \in \gamma \tag{87}$$

Γιὰ τὸν ὁρισμὸ χώρων Sobolev καὶ Besov ἐπὶ d – συνόλων παραπέμπουμε στὸ [15]. Ἡ $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ὁρίζεται αὐστηρὰ στὸ $x \in \Gamma$ ἂν τὸ ὅριο

$$\tilde{f}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r) \cap \Omega)} \int_{B(x,r) \cap \Omega} f(y)dy \tag{88}$$

ὑπάρχη. Ὡς ἴχνος τῆς f ἐπί τοῦ Γ ὁρίζεται ἡ συνάρτηση

$$\gamma f\colon x \to \gamma f(x) = \tilde{f}(x) \tag{89}$$

σὲ κάθε x ὅπου ἡ $\tilde{f}(x)$ ἔχει ἔννοια. Ἡ παρακάτω πρόταση ἰσχύει [22].

Πρόταση: Ἔστω $\Omega \subset R^n$ μία (ε,δ) – περιοχὴ καὶ Γ ἕνα d – σύνολο. Ἐπίσης ἔστω k θετικὸς ἀκέραιος, $p \in (1,\infty)$, $\beta = k - \frac{(n-d)}{p}$, καὶ ἔστω ὅτι τὸ Γ διατηρεῖ τὴν ἀνισότητα Markov. Ὑπὸ τὶς προϋποθέσεις αὐτὲς i) ὁ τελεστὴς ἴχνους $\gamma\colon f \to \gamma f$ εἶναι μιὰ φραγμένη γραμμικὴ ἀπεικόνιση ἀπὸ τὸν χῶρο Sobolev $W_k^p(\Omega)$ ἐπὶ τοῦ χώρου Besov $B_\beta^{p,p}$ (Γ) ἡ ὁποία ἔχει γραμμικὴ φραγμένη δεξιὰ ἀντίστροφον ἀπεικόνιση, καὶ ii) ὁ χῶρος $\overset{o}{W}{}_k^p$ (Ω) εἶναι πυρήνας (kernel) τοῦ τελεστοῦ ἴχνους γ: $W_k^p(\Omega) \to B_\beta^{p,p}(\Gamma)$

Ἡ παραπάνω πρόταση δίδει ἀπάντηση στὰ ἐρωτήματα i) ii) καὶ iii). Συγκεκριμένα γιὰ τὸν χῶρο $[H^1(\Omega)]^3$ ($p=2$, $k=1$) ὁ χῶρος Besov $[B_\beta^{2,2}(\Gamma)]^3$ εἶναι ὁ χῶρος τῶν ἰχνῶν, ὅπου $\beta = 1 - \frac{(n-d)}{2}$. Ἡ ἰσότητα $u = u_o$ ἐπὶ τοῦ Γ ἔχει ἔννοια σύμφωνα μὲ τὴν (88) καὶ ἡ μοναδικὴ λύση $\bar{u}$ ἐξαρτᾶται μονοσημάντως ἀπὸ τὸ p καὶ τὸ u_o, τὸ ὁποῖο πρέπει νὰ εἶναι στοιχεῖο τοῦ $[B_\beta^{2,2}(\Gamma)]^3$, $\beta = 1 - \frac{(n-d)}{2}$. Ἡ δὲ ἀπεικόνιση $(p, u_0) \to u$ εἶναι μιὰ φραγμένη γραμμικὴ ἀπεικόνιση ἀπὸ τὸν $[L^2(\Omega)]^3 \times [B_\beta^{2,2}]^3$ στὸν $[H^1(\Omega)]^3$.

Μέσα στὸ ἴδιο ἀκριβῶς συναρτησιακὸ πλαίσιο ἀντιμετωπίζονται καὶ ἀνισότητες μεταβολῶν καὶ ἀνισότητες ἡμιμεταβολῶν [9] [10] μὲ σύνορα τύπου fractal. Οἱ πολυσήμαντες συνοριακὲς συνθῆκες (ἢ οἱ ἀνισοτικὲς συνοριακὲς συνθῆκες) πρέπει νὰ ἰσχύουν ὄχι πλέον στὸ ζεῦγος $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ἀλλὰ στὸ ζεῦγος $B_\beta^{p,p} \times (B_\beta^{p,p})'$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. N. Ἀρτεμιάδης, Ἡ γεωμετρία τῶν Fractals, Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν 63(1988), 479–500.
2. B. Mandelbort, The fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Co. N. York 1972.
3. M. Barnsley, S. Demko, Chaotic Dynamics and fractals, Academic Press, N. York, 1986.
4. K. J. Falconer, The Geometry of fractal sets, Cambridge Univ. Press., Cambridge 1985.
5. H. Wallin, Interpolating and Orthogonal Polynomials on Fractals. Constructive Approximation 5 (1989), 137–150.
6. J. Feder, Fractals, Plenum Press, N. York 1988.
7. H. Takayasu, Fractals in the Physical Sciences, Manchester Univ. Press. Manchester 1990.
8. C. D. Scholz, B. Mandelbrot (editors): Fractals in Geophysics, Birkhäuser Verlag, Boston Basel 1989.
9. P. D. Panagiotopoulos, Inequality Problems in Mechanics. Convex and Nonconvex Energy Functions. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, 1985 (Russian Translation, Mir Publ. Moscow 1989).
10. J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, G. Strang, Topics in Nonsmooth Mechanics. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel 1988.
11. J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, Nonsmooth Mechanics and Applications. CISM Courses and Lectures No 302, Springer Verlag, Wien, N. York 1988.
12. M. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, Boston, N. York 1988.
13. N. Ἀρτεμιάδης, Εἰσαγωγὴ στὴν σύγχρονη μαθηματικὴ ἀνάλυση. Ἐκδ. Παν/μίου Πατρῶν 1979.
14. C. Jonsson, H. Wallin, Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.
15. A. Jonsson, H. Wallin, Function spaces on Subsets of R^n. Math. Report Vol. 2, Harwood Acad. Publ., Chur, London 1984.
16. H. Wallin, Markov's Inequality on Subsets of R^n. Proc. Conf. Canad. Math. Soc. Vol. 3 (1983), 377–388.
17. P. D. Panagiotopoulos, Fractals in Mechanics Proc. 8th Conference on the Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics (STAMM 8), Wien 13–18 Aug. 1989, Longman Scientific and Technical 1990.
18. P. D. Panagiotopoulos, On the Fractal Nature of Mechanical Theories, ZAMM 70 (1990) T258–260.
19. R. Kress, Linear Integral Equations, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1989.
20. G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity In "Encyclopedia of Physics" (ed. by S. Flügge) Vol VIa/2, Springer Verlag Berlin 1972.
21. P. W. Jones, Quasiconformal Mappings and extendability of Funtions in Sobolev Spaces. Acta Math. 147 (1981)71–88.
22. H. Wallin, The Trace to the Boundary of Sobolev spaces on a Snowflake, Rep. Dep. of Math. Univ. of Umea 1989.