Ἐδιμβούργῳ σύνοδον τῆς Διεθνοῦς Ἑνώσεως Ὑδρολογίας τοῦ 1936. 9ον Εἰς τὰς ἑορτὰς τοῦ Βασιλικοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης, 28 Ὀκτωβρίου 1935.

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Ὁ **Γενικὸς Γραμματεὺς** καταθέτει τὰ πρὸς τὴν Ἀκαδημίαν ἀποσταλέντα συγγράμματα.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. — **Über die Beweglichkeit der Polyeder*** *von A. I. Kokotsakis*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

In meiner Arbeit «Über bewegliche Polyeder»[1] habe ich die infinitesimale Beweglichkeit der Polyeder und weiter die endliche Beweglichkeit durch Einführung der Winkelgeschwindigkeiten als Vektoren an den Kanten der Polyeder behandelt. So habe ich für bestimmte Fälle die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die infinitesimale Beweglichkeit und weiter hinreichenden Bedingungen für die endliche Beweglichkeit gegeben u. s. f.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2] versucht Herr A. Roussopoulos die infinitesimale Deformierbarkeit eines Polyeders durch den Selbstspannungszustand eines dem Polyeder «kollinearen» Fachwerkes darzustellen d. i. eines Fachwerkes, dessen Stäbe mit den Kanten des Polyeders zusammenfallen. So hat er «die Beweglichkeit eines geschlossenen Polyeders durch folgende Grundbedingung ausgedrückt: Wenn das kollineare Fachwerk F eines geschlossenen Polyeders P statisch unbestimmt ist, ist P beweglich, da ein Selbstspannungszustand immer für F möglich wird. Der Grad der Bewegungsfreiheit von P ist dem Grad der statischen Unbestimmtheit von F gleich, d. h. man kann ebenso viele von einander unabhängige infinitesimale Bewegungen dem Polyeder geben als das kollineare Fachwerk statisch überzählige Stäbe enthält».

* ΑΝΤ. Ι. ΚΟΚΟΤΣΑΚΗ. — Περὶ τῆς κινητικότητος τῶν πολυέδρων.

[1] Praktika de l'Académie d'Athènes **7**, 1932, p. 165 (séance du 14 Avril 1932).— Vgl. auch A. Kokotsakis, Über bewegliche Polyeder, Math. Annalen 107, s. 627-948.

[2] Über die Beweglichkeit der Polyeder das statische Analogon, Praktika de l'Académie d'Athènes, **10**, 1935, p. 157, (séance du 4 Avril 1935).

Er behauptet weiter: «die oben durch das statische Analogon gefundenen Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die infinitesimale Beweglichkeit des Polyeders, aber bloss notwendig für die endliche Beweglichkeit».

Diese Resultate des Herrn Roussopoulos widersprechen der Wirklichkeit. — Gäbe es zunächst solche Polyeder, so würde diese Bedingung ($k > 3e-6$) auch für die endliche Beweglichkeit hinreichend sein. Denn diese Bedingung, die nach Herrn Roussopoulos hinreichend und notwendig für die infinitesimale Verknickung ist, hängt nur von den Anzahlen k der Kanten und e der Ecken des Polyeders ab, also wäre sie auch in der infinitesimalen Nachbarlage erfüllt. Infolgedessen wäre eine weitere infinitesimale Verknickung möglich und daher eine kontinuierliche oder endliche Verknickung des Polyeders[1].

Unabhängig aber davon bemerken wir weiter folgendes: Wenn das kollineare Fachwerk eines Polyeders statisch unbestimmt ist, so dass es einen Selbstspannungszustand gibt, ist dieses Fachwerk geometrisch starr und infolgedessen ist um so mehr das Polyeder starr, bei welchem nicht nur die Abstände der Ecken durch Unveränderlichkeit der Kanten, wie im Fachwerke die Knotenpunkte durch die Unveränderlichkeit der Stäbe konstant bleiben, sondern auch die ebenen Winkel der Flächen unveränderlich sind. Das ist aber ein Resultat, das der obigen nach Herrn Roussopoulos notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Beweglichkeit des Polyeders widerspricht. Dieser Widerspruch schliesst die Existenz solcher Polyeder aus. In Wirklichkeit gibt es solche Polyeder nicht, weil für ein geschlossenes Polyeder als Folge des Eulerschen Satzes die Beziehung

$$k \leqq 3\,e-6$$

gilt und infolgedessen das kollineare Fachwerk keinen überzähligen Stab hat. So würden nach dem Resultat des Herrn Roussopoulos alle geschlossenen Polyeder starr sein.

Herr Roussopoulos schliesst durch die Notwendigkeit seiner Bedingung genau den Fall der Beweglichkeit des Polyeders aus. Insbesondere, wenn alle Flächen eines geschlossenen Polyeders Dreiecke sind, gilt die Gleichung

$$k = 3\,e-6,$$

und das kollineare Fachwerk ist im allgemeinen statisch bestimmt. Der Fall der Beweglichkeit eines solchen Polyeders tritt genau beim Aus-

[1] Vgl. Kokotsakis, Über bewegliche Polyeder, Math. Annalen 107 s. 627-648 (s. 639).

nahmefall ein, in dem die Determinante der Koeffizienten der unbekannten Stabspannungen im System der linearen Gleichgewichtsgleichungen gleich Null ist.

Ein solches Polyeder, dessen sämtliche Flächen Dreiecke sind, ist das Oktaeder, das ich in meiner Arbeit unter anderen untersucht habe, wobei die folgenden drei Fälle herausgekommen sind:

1. Oktaeder, die starr sind,
2. Oktaeder mit infinitesimaler Beweglichkeit und
3. Oktaeder mit endlicher Beweglichkeit.

Ausserdem gibt es geschlossene nicht starre Polyeder, deren Flächen nicht alle dreieckig sind, für die also $k < 3e - 6$ ist.

In meiner Arbeit habe ich noch ganz einfach den Satz von Cauchy über die konvexen Polyeder im Falle des Oktaeders bewiesen.

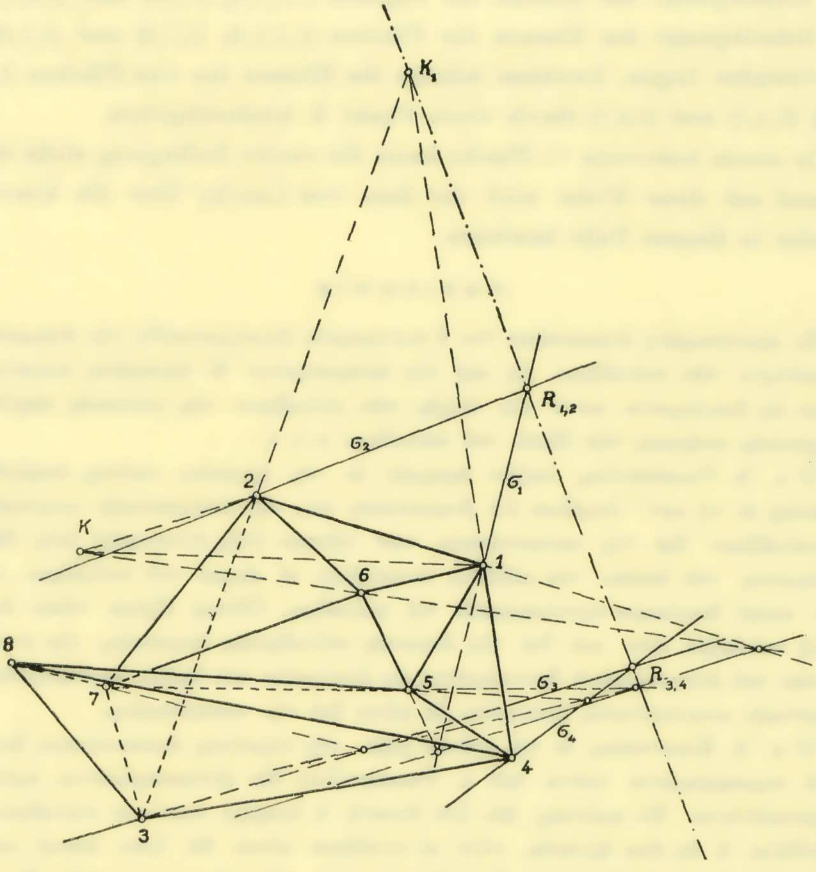
Herr Roussopoulos versucht den Satz von Cauchy für alle konvexen Polyeder zu beweisen. Dieser Beweis ist aber unrichtig, weil er auf der unzutreffenden Voraussetzung beruht, dass für die infinitesimale Beweglichkeit eines Polyeders die Bedingung $k > 3e - 6$ notwendig und hinreichend sei.

Herr Roussopoulos behandelt weiter in seiner Arbeit offene Polyeder und formuliert für das «innere Polyeder» d. h. das Polyeder ohne die Flächen die am Rande grenzen, folgende Behauptung «Das innere Polyeder (ohne Perimeterstreifen) ist beweglich, nur wenn das ihm entsprechende kollineare Fachwerk F statisch unbestimmt ist. Auch hier ist der Grad der statischen Unbestimmtheit von F gleich dem Grad der inneren Bewegungsfreiheit des Polyeders».

Dieses Resultat ist, nach meinen Überlegungen für die geschlossenen Polyeder, ebenfalls unrichtig. Hier gilt immer $k < 3e - 6$, also müssten die offenen Polyeder, nach Herrn Roussopoulos, alle starr sein.

Ein Gegenbeispiel dazu sind die Vierecksflache (offene Polyeder mit viereckigen Flächen), die ich in meiner Arbeit untersucht habe[1]. Dabei treten wieder drei Fälle auf:

[1] Vgl. KOKOTSAKIS, Über bewegliche Polyeder Math. Annalen 107, s. 627 - 648 (s. 631 - 633 und 643 - 647).



Vierecksflache, die starr sind, Vierecksflache mit infinitesimaler Beweglichkeit und Vierecksflache mit endlicher Beweglichkeit.

Zum Schluss wollen wir die Konstruktion eines nicht starren geschlossenen Polyeders angeben, ausgehend von einer Fläche mit mehr als drei Ecken, z. B. eines 11-Flaches mit einer viereckigen und 10 dreieckigen Flächen (Fig. oben). Dabei gilt:

$$f = 11 \qquad e = 8 \qquad k = 17$$

$$17 < 3 \times 8 - 6$$

Ein solches Polyeder ist dann und nur dann wenigstens infinitesimal beweglich, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind, wie es aus meiner Arbeit durch weitere leichte Schlüsse hervorgeht. Wir bezeichnen die Ecken des Polyeders mit 1, 2,....., 8. Dann müssen erstens die drei Punkte K_1, Schnittpunkt der Ebenen der Flächen (1,2,3,4), (1,4,5) und (2,3,7),

$R_{1,2}$, Schnittpunkt der Ebenen der Flächen (1,2,3,4), (1,5,6) und (2,6,7) und $R_{3,4}$, Schnittpunkt der Ebenen der Flächen (1,2,3,4), (3,7,8) und (4,5,8) auf einer Geraden liegen. Zweitens müssen die Ebenen der vier Flächen (1,2,6), (1,4,5), (2,3,7) und (5,6,7) durch einen Punkt K hindurchgehen.

In einem konvexen 11-Flache kann die zweite Bedingung nicht erfüllt sein und auf diese Weise wird der Satz von Cauchy über die konvexen Polyeder in diesem Falle bewiesen.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐν προηγουμένῃ ἀνακοινώσει του ὁ συγγραφεὺς ἐπραγματεύθη τὴν ἀπειροστικὴν κινητικότητα τῶν πολυέδρων, ὡς καὶ τὴν πεπερασμένην δι' ὡρισμένας περιπτώσεις, εἰσάγων ὡς διανύσματα κατὰ τὰς ἀκμὰς τῶν πολυέδρων τὰς γωνιακὰς ταχύτητας τῆς σχετικῆς κινήσεως τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου κ. λ. π.

Ὁ κ. Ἀ. Ρουσόπουλος, λαβὼν ἀφορμὴν ἐκ τῆς ἐργασίας ταύτης, ἐσκέφθη νὰ ἀπεικονίσῃ ἐν τῇ κατ' Ἀπρίλιον ἐ. ἔ. ἀνακοινώσει του, τὴν ἀπειροστικὴν κινητικότητα τῶν πολυέδρων διὰ τῆς καταστάσεως τῶν τάσεων (τῆς ἐντατικῆς) ἑνὸς ἰδεατοῦ δικτυώματος, τοῦ ὁποίου τὰς ράβδους συνιστῶσιν αἱ ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖ δικτύωμα συγγραμμικὸν τῷ πολυέδρῳ. Οὕτως ἐξάγει τόσον διὰ τὰ κλειστὰ πολύεδρα, ὅσον καὶ διὰ τὰς ἀνοικτὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας τὴν στατικὴν ἀοριστίαν τοῦ συγγραμμικοῦ δικτυώματος ὡς ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην διὰ τὴν ἀπειροστικὴν κινητικότητα, ἀναγκαίαν δὲ μόνον διὰ τὴν πεπερασμένην.

Ὁ κ. Ἀ. Κοκοτσάκις ἐν τῷ πρώτῳ μέρει τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως δεικνύει, ὅτι τὰ συμπεράσματα ταῦτα τοῦ κ. Ρουσοπούλου δὲν ἀνταποκρίνονται πρὸς τὴν πραγματικότητα. Ἐν πρώτοις, ἐὰν ἦτο δυνατὴ ἡ ὕπαρξις τοιούτων πολυέδρων, οἷα προϋποθέτει ἡ ὡς ἄνω ἐργασία, τότε αἱ συνθῆκαι αὗται θὰ ἦσαν ἱκαναὶ καὶ διὰ πεπερασμένην κινητικότητα. Ἀνεξαρτήτως τούτου, ἐὰν τὸ συγγραμμικὸν δικτύωμα εἶναι ὑπερστατικόν, θὰ εἶναι γεωμετρικῶς σταθερὸν καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὸ πολύεδρον. Ἡ τοιαύτη ἀντίθεσις ἀποκλείει τὴν ὕπαρξιν τοιούτων πολυέδρων καὶ πράγματι τοιαῦτα πολύεδρα δὲν ὑπάρχουν, καθόσον, ὡς ἐξάγεται εὐκόλως ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ Euler, διὰ μὲν τὰ κλειστὰ πολύεδρα ἰσχύει ἡ σχέσις

$$k \leqq 3\,e - 6$$

ἔνθα k ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν καὶ e τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, διὰ δὲ τὰ ἀνοικτὰ πάντοτε

$$k < 3\,e - 6$$

Κατὰ τὰ συμπεράσματα τοῦ κ. Ρουσοπούλου θὰ ἀπεδεικνύετο τότε, ὅτι ἅπαντα τὰ κλειστὰ πολύεδρα ὡς καὶ αἱ ἀνοικταὶ πολυεδρικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι σταθεραί.

Ὁ κ. Ρουσόπουλος διὰ τοῦ ἀναγκαίου τῆς συνθήκης του

$$k > 3\,e - 6$$

ἀποκλείει ἀκριβῶς τὰς περιπτώσεις κινητικότητος τῶν πολυέδρων.

Εἰδικῶς, ἐὰν κλειστὸν πολύεδρον ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας αὐτοῦ τριγωνικάς, τότε

$$k=3\,e-6,$$

ἡ δὲ μὴ σταθερότης τοῦ δικτυώματος συμπίπτουσα μὲ τὴν τοῦ πολυέδρου συμβαίνει ἀκριβῶς εἰς τὴν ἐξαιρετικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων ἰσορροπίας τῶν τάσεων τῶν ράβδων τοῦ δικτυώματος ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Τοιοῦτον πολύεδρον μὲ τριγωνικὰς ἕδρας εἶναι τὸ ὀκτάεδρον, τὸ ὁποῖον μεταξὺ ἄλλων πραγματεύεται ἐν τῇ ἐργασίᾳ του ὁ κ. Κοκοτσάκις καὶ ὅπου ἐξάγονται περιπτώσεις ὀκταέδρων σταθερῶν, μὲ ἀπειροστικὴν κινητικότητα καὶ μὲ πεπερασμένην.

Ὑπάρχουν ἐπίσης τόσον κλειστὰ πολύεδρα σταθερὰ καὶ μὴ σταθερὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας τριγωνικὰς ($k<3\,e-6$) ὅσον καὶ ἀνοικταὶ πολυεδρικαὶ ἐπιφάνειαι, ὡς αἱ μὲ τετραπλευρικὰς ἕδρας, τὰς ὁποίας πραγματεύεται ἐν τῇ ἐργασίᾳ του ὁ κ. Κοκοτσάκις ἐπίσης καὶ ὅπου ἐξάγονται περιπτώσεις σταθερότητος, ἀπειροστικῆς καὶ πεπερασμένης κινητικότητος.

Ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει τῆς ἀνακοινώσεώς του ὁ κ. Κοκοτσάκις παρέχει τὴν κατασκευὴν ἑνὸς μὴ σταθεροῦ κλειστοῦ πολυέδρου ἀναχωρῶν ἀπὸ ἕδρας μὲ περισσοτέρας τῶν τριῶν κορυφὰς π. χ. ἑνὸς ἑνδεκαέδρου μετὰ μιᾶς τετραπλευρικῆς ἕδρας καὶ δέκα τριγωνικῶν ὅπου: $e=8$, $k=17$ ἤτοι $17<3\times8-6$.

Ἓν τοιοῦτον πολύεδρον εἶναι τότε καὶ μόνον τότε μὲ ἀπειροστικὴν τουλάχιστον κινητικότητα, ἐὰν ἰσχύουν αἱ ἑπόμεναι δύο συνθῆκαι (ὡς Σχ.)· ἐν πρώτοις πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τὰ τρία σημεῖα K_1, σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν (1,2,3,4), (1,4,5) καὶ (2,3,7), $R_{1,2}$, σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν (1,2,3,4), (1,5,6) καὶ (2,6,7) καὶ τέλος $R_{3,4}$, σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν (1,2,3,4), (3,7,8) καὶ (4,5,8). Ἐκ δευτέρου πρέπει νὰ διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου K τὰ ἐπίπεδα τῶν τεσσάρων ἑδρῶν (1,2,6), (1,4,5), (2,3,7) καὶ (5,6,7). Εἶναι προφανὲς ὅτι δι' ἓν κυρτὸν ἑνδεκάεδρον δὲν πληροῦται ἡ δευτέρα συνθήκη καὶ οὕτως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ πρότασις τοῦ Cauchy περὶ κυρτῶν πολυέδρων.

ΚΤΗΝΙΑΤΡΙΚΗ.—Ἐπὶ μιᾶς νόσου τῶν αἰγῶν ὀφειλομένης εἰς ἰὸν διηθητόν, καλλιεργήσιμον καὶ ὁρατόν*, *ὑπὸ Γ. Δεμπονέρα*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Μ. Γερουλάνου.

Κατὰ τοὺς μῆνας Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον ἐν Κερκύρᾳ τὸ πρῶτον, ἐν τῷ Νομῷ Λακωνίας κατόπιν, ἐνεφανίσθη ἐπὶ τῶν αἰγῶν ἄγωστος, βαρεῖα, ἐνζωοτικὴ λοίμωξις, μήπω εἰσέτι περιγραφεῖσα καὶ μελετηθεῖσα. Μεταβάντες ἐπὶ τόπου ἐμελετήσαμεν ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τῶν κ. κ. Παγκράτη καὶ Βρεττάκου Νομοκτηνιάτρων τὰ τῆς ἐπιδημιολογίας καὶ συμπτωματολογίας τῆς νόσου συλλέξαντες δὲ τὸ κατάλληλον παθολογικὸν ὑλικόν, ἐπελήφθημεν ἐν τῷ Ἐργαστηρίῳ τῆς πειραματικῆς καὶ μικροβιολογικῆς

* G. DEBONERA.— Une maladie des chèvres due à un virus filtrable, visible et cultivable.