πλῆθος ἐργασιῶν εἰς διάφορα σοβαρὰ περιοδικά, ὅπως εἰς τὸ Journal de Mathématique, Annales Scientifiques de l'École Normale καὶ ἄλλα. Ἐπίσης παρουσίασεν ἐν ὅλῳ 26 ἀνακοινώσεις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων. Ἠσχολήθη ἰδίως μὲ τὰς ὑπερβατικὰς ἀλγεβροειδεῖς συναρτήσεις, τὴν θεωρίαν τῶν ὁποίων ἐπλούτησε διὰ πολλῶν θεωρημάτων. Ἐδημοσίευσε πρὸς τούτοις καὶ ἐργασίας σχετικὰς πρὸς τὴν Ἄλγεβραν, τὴν Μηχανικὴν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Διάφοροι διακεκριμένοι μαθηματικοὶ ἀναφέρουν εἰς τὰ συγγράμματά των ἐργασίας τοῦ Ρεμούνδου μὲ εὐνοϊκὰς κρίσεις.

Ἔλαβε μέρος εἰς διάφορα διεθνῆ μαθηματικὰ συνέδρια, ὅπου ἔκαμε λίαν ἐνδιαφερούσας ἀνακοινώσεις. Ἐδημοσίευσε καὶ τεῦχος εἰς τὴν συλλογὴν Memorial des Sciences Mathématiques. Ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν ὑπῆρξε μέλος αὐτῆς. Ἔγραψε διάφορα διδακτικὰ συγγράμματα, συνοπτικὰ καὶ περιεκτικὰ χάριν τῶν σπουδαστῶν.

Ταῦτα πολὺ ὠφέλησαν.

Ἡ ἀπώλεια τοῦ Γεωργίου Ρεμούνδου ἐστέρησε τὴν Ἑλλάδα ἑνὸς διαπρεποῦς ἐπιστήμονος καὶ σοφοῦ διδασκάλου.

Τῆς ὁμιλίας μου, ἥτις γίνεται κατὰ κρατῆσαν ἔθος, θέμα εἶναι *ἡ λογικὴ τοῦ ἀπείρου.*

Ἄπειρον, θὰ ἔλεγέ τις, εἶναί τι τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ πεπερασμένον. Ἀλλὰ τί ἀντίκειται εἰς τὸ πεπερασμένον; Διακρίνομεν ἀμέσως μετατόπισιν τοῦ ζητήματος. Παρατηρητέον ὅτι προκειμένου περὶ ἀπείρου γεννῶνται πολλὰ ἐρωτήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἀπάντησις εἶναι ἀδύνατος ἢ δύσκολος.

Πρέπει νὰ τονίσωμεν ὅτι εἰς ὅλα τὰ ζητήματα ὅπου εἰσέρχεται τὸ ἄπειρον εἶναι ἀνάγκη νὰ προφυλασσώμεθα ἀπὸ τὴν φαινομενικὴν διαύγειαν.

Ἡ ἔρευνα τοῦ ἀπείρου συντείνει εἰς τὴν στροφὴν τῶν ἐπιστημῶν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὰ μαθηματικά, δηλαδὴ ἐμμέσως πρὸς τὴν λογικὴν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀπορρέουν τὰ μαθηματικά. Ἔχομεν οὕτω τὴν *ἐπιστημονικὴν λογικήν*. Ἀλλ' εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἀπείρου βοηθεῖ πολὺ ἡ ἐνόρασις ἢ διαίσθησις καθὼς συμβαίνει καὶ εἰς ὅλα τὰ πεδία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Μὲ τὴν ἐνόρασιν ἐφευρίσκομεν, μὲ τὴν λογικὴν ἀποδεικνύομεν. Ἐδῶ ὅμως χρειάζεται μεγάλη προσοχή, πρὸ παντὸς προκειμένου περὶ ζητημάτων τοῦ ἀπείρου, τὰ ὁποῖα δὲν μᾶς ἐπιτρέπεται νὰ ἀντιμετωπίζωμεν, ὅπως τὰ ζητήματα τοῦ πεπερασμένου.

Πῶς προώδευσεν ἡ ἐπιστήμη εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου; Αἱ πρῶται προσπάθειαι ἐπεδίωκον τὴν μετάβασιν τῆς λογικῆς τοῦ πεπερασμένου εἰς τὴν λογικὴν τοῦ ἀπείρου. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἐξητάσθη τὸ πεπερασμένον διὰ τοῦ ἀπείρου. Μήπως ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς δὲν διευκολύνει εἰς τὴν ἀνεύρεσιν ἐξαγομένου διὰ τὰ πεπερασμένα; Οὕτω π. χ. διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον σώματος, φανταζόμεθα αὐτὸ ἀναλυόμενον (εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν) εἰς ἀπειρίαν ἀπειροστῶν.

Ἐν γένει ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου εἶναι ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας, ἐνῷ δὲν κατέχομεν, χρησιμοποιοῦμεν καὶ εὑρίσκομεν σημαντικὰ ἀποτελέσματα. Τὸ πνεῦμα ἐργάζεται μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πειράματος καὶ οὕτως ἱδρύεται προοδευτικῶς ἡ Ἐπιστήμη. Ὁ Fourier γράφει: «Ἡ βαθεῖα σπουδὴ τῆς φύσεως εἶναι ἡ γονιμωτέρα πηγὴ τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων». Ἡ ἐπιστημονικὴ λογικὴ εἶναι ἀπαραίτητος εἰς πᾶσαν σοβαρὰν προσπάθειαν διὰ τὴν κατανόησιν τῆς φύσεως τῶν μαθηματικῶν. Τὰ φυσικὰ φαινόμενα ὡδήγησαν πολλάκις τὸν μαθηματικὸν εἰς τὴν ἐκλογήν.

Ἀφ᾽ ἑτέρου προκύπτει τὸ ἐρώτημα· μία ἀφῃρημένη ἐπιστήμη δύναται νὰ σταθῇ λογικῶς μὲ τὴν ἀξιωματικὴν μέθοδον; Σημειωτέον ὅτι οἱ μαθηματικοὶ δὲν ἐξετάζουν τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ καθ᾽ ἑαυτὰ ἀλλὰ τὰς μεταξύ των σχέσεις.

Σπουδαῖον ζήτημα εἶναι καὶ τὸ τῆς ὑπάρξεως. Εἰς τὰ μαθηματικά, ὅταν λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει κάτι τι, ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι ἀπηλλαγμένον ἀντιφάσεως [1]).

Εἰς τὴν σημερινὴν ἐπιστήμην βασικωτάτην ἔννοιαν ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου. Ἡ θεωρία τῶν συνόλων δίδει τὴν ἀντίληψιν μεγάλης προόδου εἰς τὴν ἐπιστήμην. Λέγεται συνήθως ὅτι ἡ ἐπιστήμη ἀρχίζει μὲ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέγεθος· ἤδη θεωρεῖται ὡς ἔννοια βασικωτέρα τὸ *σύνολον*.

Τί εἶναι σύνολον; Πότε ἓν σύνολον εἶναι δεδομένον;

Ὁ καθεὶς νομίζει ὅτι ἐννοεῖ τὴν ἐρώτησιν καὶ ὅμως τὸ *ἐννοῶ* δὲν ἔχει πάντοτε τὴν ἰδίαν σημασίαν δι᾽ ὅλους. Ἐνόσῳ πρόκειται περὶ συνόλου πεπερασμένου ὅλοι ἐννοοῦν τὴν ἐρώτησιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ὅταν ὅμως πρόκειται περὶ συνόλου ἀπείρου, διαφέρει πολὺ τὸ ζήτημα. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ὅταν λέγωμεν *ὅλοι οἱ ἀριθμοί*, προκειμένου περὶ συνόλου ἀπείρου ἡ λέξις *ὅλοι* δὲν εἶναι τόσον εὐνόητος, ὅσον εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς θὰ ἐνόμιζέ τις. Ἔχομεν διαφόρους ὁρισμοὺς συνόλων. Ὁ Cantor εἶχε δώσει τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: «Σύνολον εἶναι ἡ ἕνωσις οἱωνδήποτε ἀντικειμένων τῆς σκέψεως, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς

[1] Ἡ ἀπουσία λογικῆς ἀντιφάσεως δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ χαρακτηρισθῇ ἓν ἐπιστημονικὸν οἰκοδόμημα. Δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὑπάρχουν διάφοροι ἀπόψεις ὡς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς ὑπάρξεως. Οἱ ἰδεαλισταὶ λέγουν ὅτι ὑπάρχειν εἶναι τὸ ὑπάρχειν, ἐννοοῦντες δι᾽ αὐτοῦ ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ὑπάρξεως δὲν ἀναλύεται εἰς ἄλλην ἁπλουστέραν. Ἐνῷ οἱ ρεαλισταὶ (ἐμπειρισταὶ) λέγουν ὅτι ὑπάρχει πᾶν ὅ,τι ὁ ἄνθρωπος δύναται νὰ ὁρίσῃ. Τὸ νὰ δοθῇ μέθοδος κατασκευῆς ἀντικειμένων τάξεώς τινος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ νὰ δοθῇ ἀπόδειξις ὑπάρξεως.

σχηματίζοντα ἓν ὅλον». Ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ὁρισμοὶ νεώτεροι. Εἶναι ὅμως πολὺ λεπτὸν ζήτημα καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ἔχομεν πλήρη ὁρισμόν.

Παραδείγματα συνόλων:
- Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
- Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων.
- Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν.
- Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν.
- Τὸ σύνολον τῶν σημείων εὐθείας.
- Τὸ σύνολον εὐθειῶν εἰς τὸ διάστημα.
- Τὸ σύνολον ἰδεῶν κ. ἄ.

Ἔστω τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν.

$$(A) \qquad 1, 2, 3, 4, \ldots, \nu, \ldots$$

Ἔχομεν οὕτω τὴν μορφὴν ἀπεριορίστου ἁπλῆς ἀκολουθίας. Τὸ νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (Α) εἶναι ἄπειρον, ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ νὰ λέγωμεν ὅτι μετὰ τὸν τυχόντα θετικὸν ἀκέραιον ν, ὑπάρχει ὁ $\nu + 1$.

Ἂς νοήσωμεν ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ὅρους τῆς (Α) τὰ διπλάσια τῶν ἀριθμῶν αὐτῆς. Δηλαδὴ παρὰ τοὺς

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \nu, \ldots \qquad (A)$$

$$\text{τοὺς } 2, 4, 6, 8, \ldots, 2\nu, \ldots \qquad (B)$$

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης ἀντιστοιχεῖ εἷς τῆς δευτέρας καὶ ἀντιστρόφως. Κατὰ ταῦτα, θὰ ἔλεγέ τις, ὅτι ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης ἀκολουθίας, τόσοι εἶναι καὶ οἱ τῆς δευτέρας, δηλαδὴ ὅσοι εἶναι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι, τόσοι εἶναι καὶ μόνον οἱ ἄρτιοι. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ εὑρίσκομεν ὅτι, ὅσοι εἶναι οἱ περιττοὶ μόνον, εἶναι καὶ ὅλοι οἱ ἀκέραιοι. Καὶ ὅμως ἄρτιοι καὶ περιττοὶ ὁμοῦ ἀποτελοῦν τοὺς ἀκεραίους. Τί συμβαίνει;

Ἐργαζόμεθα ἐδῶ ὡς νὰ ἐπρόκειτο κάπου νὰ σταματήσωμεν, ὡς ἐὰν τὸ ἄπειρον ἦτο εἷς ἀριθμός, ὅστις ἠδύνατο νὰ ὁρισθῇ. Μᾶς ἀπατᾷ ἡ ἀντιστοιχία ἢ μᾶλλον ἡ ἔννοια τῆς ἐπεκτάσεως τῆς ἀντιστοιχίας. Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ἰσχύει εἰς τὰ ἄπειρα σύνολα τὸ ἀξίωμα ὅτι τὸ μέρος εἶναι μικρότερον τοῦ ὅλου. Τὸ ὅτι δὲν ἰσχύει, τοῦτο ἀποτελεῖ ἀκριβῶς χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τοῦ ἀπείρου. Διακρίνομεν μόνον τὸν τρόπον τῆς παραγωγῆς. Κατέχομεν τὸν νόμον, καθ' ὃν παράγονται οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς καὶ ἐπὶ τῆς φύσεως τοῦ νόμου τούτου στηρίζομεν τὰ συμπεράσματα τῶν συλλογισμῶν μας.

Πότε ἓν σύνολον εἶναι *ὡρισμένον*; Διὰ νὰ εἶναι ἓν *σύνολον ὡρισμένον* πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν διὰ πᾶν στοιχεῖον, ἐὰν ἀνήκῃ εἰς τὸ θεωρούμενον σύνολον ἢ ὄχι (κατὰ τὸν Cantor).

Ἔστω ἓν πεπερασμένον σύνολον

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ἔστω ἓν ἄπειρον σύνολον

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots$$

Εἰς τὸ πρῶτον διακρίνομεν τὴν ἔννοιαν τῆς ποσότητος τῶν στοιχείων. Εἰς τὸ δεύτερον ἡ ἔννοια τῆς ποσότητος ἐπεκτείνεται εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως. Θὰ ὁρίσωμεν ἤδη τὴν ἔννοιαν τῆς *ἀμοιβαίας ἀντιστοιχίας*. Διὰ νὰ καταστήσω σαφεστέρους τοὺς ὁρισμοὺς ὡς πρὸς τὰ σύνολα, ἀναχωρῶ ἀπὸ παραδείγματα. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἁπλᾶ σύνολα μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων π. χ. τὰ σύνολα

$$\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ \alpha_8$$
$$\beta_1\ ,\ \beta_2\ ,\ \ldots\ \beta_8$$

Παρατηροῦμεν ὅτι παρουσιάζουν ἀντιστοιχίαν καὶ ὅτι τελευταῖοι ὅροι εἶναι οἱ α_8 β_8 καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἡ ὁποία εἰς τὰ πεπερασμένα σύνολα εἶναι ταυτόσημος μὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὴν ποσότητα τῶν ὅρων.

Ἐὰν ὅμως νοήσω δύο ἄπειρα σύνολα

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\nu\ ,\ \ldots$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_\nu\ ,\ \ldots$$

δὲν δύναμαι νὰ στηριχθῶ ἐπὶ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει πλῆθος ὅρων. Παραμένει ὅμως ἡ ἔννοια τῆς ἀμοιβαίας ἀντιστοιχίας. Διακρίνομεν ὅτι εἶναι τακτοποιημένα κατὰ ζεύγη τὰ στοιχεῖα τῶν δύο αὐτῶν συνόλων οὕτως, ὥστε κάθε ζεῦγος περιέχει ἓν στοιχεῖον ἐξ ἑκατέρου τῶν συνόλων καὶ κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου ἀνήκει εἰς ἓν ζεῦγος. Τὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὰ σύνολα

$$(\mathrm{A})\ \ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots$$
$$(\mathrm{B})\ \ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2\nu,\ \ldots$$

Παρατηρητέον ὅτι ἐργαζόμεθα κυρίως μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, διότι ἡ σαφεστέρα γλῶσσα πρὸς κατανόησιν ἢ μᾶλλον πρὸς διατύπωσιν ζητημάτων ἀναφορικῶς πρὸς τὸ ἄπειρον εἶναι ἡ γλῶσσα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ μάλιστα τοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ δι' ὃν ὁ Kronecker εἶπεν «οἱ ἀκέραιοι μᾶς ἔρχονται ἀπὸ τὸν Θεόν. Οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἔργον τῶν ἀνθρώπων».

Λέγομεν ὅτι δύο σύνολα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν, ὅταν παρουσιάζουν ἀμοιβαίαν ἀντιστοιχίαν. Π. χ. τὰ σύνολα (Α) καὶ (Β) εἶναι ἰσοδύναμα. Τὸ σύνολον (Α) καὶ τὸ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμα. Κατὰ τὸν Cantor λέγομεν ὅτι δύο σύνολα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἐὰν παραλείποντες τὴν ἔννοιαν τῆς τάξεως καὶ τῆς φύσεως τῶν στοιχείων λαμβάνωμεν τὰ αὐτὰ σύνολα. Π.χ. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς (Α) εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ τῆς (Β) — κινούμενοι ἀπὸ τὸν τρόπον συλλογισμοῦ ἐπὶ τοῦ πεπερασμένου — προσέχομεν εἰς τὴν τάξιν καθ' ἣν εἶναι γεγραμμένα τὰ στοιχεῖα. Τὰ ἔχομεν γράψει οὕτως, ὥστε μεταξὺ δύο ἀρτίων νὰ εἶναι εἷς περιττός. Ἐὰν παρελείπομεν τὴν τάξιν, δὲν θὰ εἴχομεν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς (Α) εἶναι διπλάσια τῶν τῆς (Β). Πάντως αἱ ἐκ τῆς διαισθήσεως ὑποθέσεις διὰ τὰς δυνάμεις τῶν ἀπείρων συνόλων εἶναι ἀμφίβολοι καὶ κυρίως ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ἀμφιβάλλωμεν δι' ἄπειρα σύνολα μὴ ἔχοντα τὴν αὐτὴν δύναμιν. Αἱ λύσεις τοιούτων ζητημάτων ἔχουν μεγάλην σημασίαν διὰ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων καὶ ἡ ἀναζήτησις, ἐὰν δύο δεδομένα σύνολα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ἢ ὄχι, παρέχει μεγάλας δυσκολίας.

Θεωροῦμεν ὡς τὸ ἁπλούστερον τῶν συνόλων τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ὅσα σύνολα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ αὐτὸ λέγονται ἀριθμήσιμα [1]. Κατ' ἀκολουθίαν ὅλα τὰ ἀριθμήσιμα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπανερχόμεθα ἤδη εἰς τὸ ἀρχικὸν ἐρώτημα. Πότε ἓν ἄπειρον σύνολον εἶναι δεδομένον; Ἓν ἀριθμήσιμον σύνολον εἶναι δεδομένον, ὅταν συμβαίνῃ τὸ ἑξῆς. Ἐὰν μᾶς δοθῇ ἡ τάξις ἑνὸς ὅρου, νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ὅρον, δηλαδὴ δοθέντος τοῦ ν νὰ εὑρίσκωμεν τὸν νυοστὸν ὅρον καὶ ἀντιστρόφως.

Δύο δεδομένα σύνολα εἶναι *ἰσοδύναμα,* ὅταν μεταξὺ τῶν στοιχείων των ὑπάρχῃ ἀμοιβαία ἀντιστοιχία. Δυνατὸν ὅμως νὰ μὴ γνωρίζωμεν, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀμοιβαία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων των. Ἐξ αὐτοῦ δὲν ἕπεται ὅτι τὰ θεωρούμενα σύνολα δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι δύο σύνολα δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἀμοιβαία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων των εἶναι ἀδύνατος. Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δύο σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν ἀμοιβαίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν στοιχείων των. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι δυνατὴ ἀκόμη καὶ ἐὰν δὲν γνωρίζωμεν νὰ τὴν προσδιορίσωμεν. Διακρίνομεν οὕτω δύο περιπτώσεις: 1) Τὴν περίπτωσιν ὅπου γνωρίζομεν πράγματι νὰ ἱδρύσωμεν τουλάχιστον μίαν ἀμοιβαίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο δεδομένων συνόλων καὶ 2) τὴν περίπτωσιν ὅπου δυνά-

[1] Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς Παν. Ζερβοῦ.

μεθα μόνον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει μία τοιαύτη ἀντιστοιχία, χωρὶς νὰ προδικάσωμεν τὸ δυνατὸν τοῦ προσδιορισμοῦ της ἐμπράκτως.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ δύο σύνολα ἔχουν *ἐμπράκτως* (effectivement) τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν λέγομεν ἁπλῶς ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν. Ὁ Borel ὁρίζει ὡς σύνολον ἐμπράκτως ἀριθμήσιμον τὸ σύνολον τὸ διδόμενον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \ldots$$

τοῦ ὁποίου κάθε στοιχεῖον α_ν εὑρίσκεται, ὅταν δίδεται ἡ τάξις του [2].

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$$(A) \;\; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots, \nu, \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει μέγιστος ὅρος. Ὁ Cantor, ὡς γνωστόν, ἐφαντάσθη ἀριθμὸν ω, ὁ ὁποῖος θὰ ἤρχετο κατόπιν τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς ἀκολουθίας (A), ἐὰν ὑπῆρχε τελευταῖος. Ὁ ω θὰ ἦτο μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἀριθμῶν ν. Θὰ ἐνοεῖτο μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀκολουθίας καὶ οὐχὶ εἰς τὸ τέλος ταύτης. Δι' αὐτὸ ἐκλήθη ὑπερπεπερασμένος (transfini) ἀριθμός. Οὕτω παρουσιάζεται ἡ ἔννοια τοῦ ἐνεστωτικοῦ ἀπείρου. Ὁ Dedekind ἐχρησιμοποίησε τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τοῦ ἀπείρου, ἵνα ὁρίσῃ θετικῶς τὸν ὅρον ἄπειρον μὲ τὴν σημασίαν τοῦ ἐνεστωτικοῦ ἀπείρου. Οὗτος ἐθεώρησε σύστημα ἀριθμῶν ἐνεστωτικοῦ ἀπείρου καὶ ἐν τούτοις ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως. Ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμησίμου. Ὑπάρχουν σύνολα μὴ ἀριθμήσιμα;

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ 1 δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον [1]. Τὰ σύνολα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς. Τὸ σύνολον τῶν σημείων μεταξὺ 0 καὶ 1 (δηλαδὴ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 [1]) ἔχει ἐμπράκτως (effectivement) τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς. Ἐὰν ἀπὸ τὸ θεωρούμενον σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 0 1 καὶ 1 ἀποκόψωμεν οἱονδήποτε ἀριθμήσιμον σύνολον π. χ. τοὺς ρητούς, τὸ ἀπομένον σύνολον ἔχει τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς. Ἀπὸ ἀξιώματα γεωμετρικὰ προκύπτει ὅτι ὑπάρχει ἀμοιβαία ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων εὐθείας καὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

---

[1] Προκειμένου περὶ παραδόξων τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ὁ Borel γράφει (Theorie des Fonctions, 1928): «Τὰ παράδοξα ταῦτα προκύπτουν, διότι δεχόμεθα ὡς προφανῆ τὴν ἀκόλουθον πρότασιν Πᾶν ἀριθμήσιμον σύνολον εἶναι ἐμπράκτως ἀριθμήσιμον effectivement énumerable. Ἀλλ' ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀνακριβής».

[2] Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς Π. Ζερβοῦ.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν ὑπάρχει ἀμοιβαία ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ συνόλου τῶν συστημάτων χ_1 ψ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχει ἀμοιβαία ἐφαρμογὴ ὅλων τῶν σημείων τετραγώνου ἐπὶ τμήματος εὐθείας. Τοῦτο, ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται παράδοξον. Διατί; Προσκόπτομεν εἰς τὴν δυσκολίαν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν συνέχειαν ἀπὸ τὴν ἀμοιβαίαν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων ἐπιπέδου καὶ εὐθείας (διότι ἡ ἀντιστοιχία εἶναι ἀσυνεχής).

Ἰδέαν τῆς συνεχείας λαμβάνομεν μὲ τὴν ἐνόρασιν. Πρέπει ὅμως νὰ προσέξωμεν εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐνόρασις δὲν δίδει πάντοτε τὴν ἀκρίβειαν. Π. χ. ἡ ἐνόρασις λέγει ὅτι μία καμπύλη ἔχει πάντοτε ἐφαπτομένην εἰς ὅλα τὰ σημεῖα. Τοῦτο ὅμως δὲν ἀληθεύει πάντοτε.

Γεννῶνται πολλαὶ ἀπορίαι, αἵ ὁποῖαι ἔγιναν ἀφορμὴ νὰ ὁρίζεται ἡ συνέχεια μὲ ἀνισότητας μεταξὺ ἀκεραίων.

Ἰδοὺ ἓν πρόβλημα δύσκολον. Ἐρωτῶμεν· Ὑπάρχει σύνολον τοῦ ὁποίου ἡ δύναμις νὰ εἶναι ἀνωτέρα ἀπὸ τὴν δύναμιν τοῦ ἀριθμησίμου συνόλου, ἀλλὰ κατωτέρα ἀπὸ τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς ; Τοῦτο λέγεται πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς.

Ἡ θεωρία τῶν μὴ ἀριθμησίμων συνόλων ἀνάγεται κατ᾽ ἀνάγκην εἰς εἶδος Λογικῆς Ἀλγέβρας, τῆς ὁποίας τὰ σύμβολα δὲν καλύπτουν πραγματικότητα δεκτὴν ὑπὸ πάντων τῶν μαθηματικῶν. Ἐν τούτοις οἱ γενικοὶ καὶ ἀφῃρημένοι αὐτοὶ συλλογισμοὶ δὲν εἶναι ἀνωφελεῖς. Ἡ λογικὴ τοῦ Ἀριστοτέλους φθάνει σχεδὸν ἀμετάβλητος διὰ τοῦ Βάκωνος μέχρι τοῦ Κάντ. Ἔκτοτε ὅμως ἡ Λογική, μὲ τὴν πρόοδον τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ἐπεξετάθη πρὸς εὐρυτέρους ὁρίζοντας καὶ σήμερον ἔχομεν τροποποιήσεις σημαντικὰς διὰ τῆς Συμβολικῆς Λογικῆς.

Ὁ Poincaré ἀναφέρει : Τὸ πνεῦμα ἔχει τὴν εὐκολίαν νὰ δημιουργῇ σύμβολα καὶ οὕτω κατεσκεύασε τὸ μαθηματικὸν συνεχές, τὸ ὁποῖον εἶναι μερικὸν σύστημα συμβόλων. Ἡ δύναμις τοῦ πνεύματος περιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀνάγκην νὰ ἀποφύγωμεν πᾶσαν ἀντίφασιν, ἀλλὰ καὶ τὸ πνεῦμα δὲν τὴν μεταχειρίζεται, ἐὰν τὸ πείραμα δὲν τὸ δικαιολογῇ.

Βασικὴ ἔννοια εἰς τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ ὁρικοῦ σημείου. Αὕτη χρησιμεύει πολὺ εἰς τὴν λογικὴν τοῦ ἀπείρου. Διὰ νὰ ἐκφρασθῶ στοιχειωδῶς ἀναχωρῶ ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$ Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν δοθῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, θὰ εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας μικρότερος, δηλαδή, ὡς γνωστόν, θὰ πλησιάζωμεν πρὸς τὸ 0 ὅσον θέλομεν, χωρὶς ὅμως ποτὲ νὰ φθάνωμεν εἰς αὐτό.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν προχωρήσωμεν π. χ. μέχρι τοῦ $\frac{1}{1567}$, οἱ ὑπολειπόμενοι ὅροι εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος. Ὁμοίως, ἂν προχωρήσωμεν μέχρι τοῦ $\frac{1}{2000}$ μένουν πάλιν ὅροι ἄπειροι τὸ πλῆθος. Εἰς τὴν φύσιν τοῦ ἀπείρου εἶναι, ἐὰν λάβωμεν ὁσουσδήποτε ὅρους τῆς ἀκολουθίας πεπερασμένους τὸ πλῆθος, νὰ μὴ ἐξαντλοῦνται οἱ ὅροι καὶ νὰ ἀπομένουν ἄπειροι τὸ πλῆθος. Ὅσους καὶ ἂν διαγράψωμεν πεπερασμένους τὸ πλῆθος, τὸ σκάνδαλον παραμένει· ὥστε, ἐὰν λάβωμεν τὸ 0, κάμνομεν ἓν πήδημα ἀπὸ ἀπείρους ὅρους. Τὸ 0 ἐδῶ εἶναι τὸ ὅριον. Πότε ὅμως μᾶς ἐπιτρέπεται νὰ κάμνωμεν τοῦτο; Ἐδῶ ἐπεμβαίνει ὁ Ἀπειροστικὸς Λογισμός. Εἰς τ' ἀνωτέρω παρουσιάζεται καὶ ἡ ἔννοια τοῦ ἀπειροστοῦ, δηλαδὴ μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον τὸ 0.

Ὁμοίως, ἐὰν λάβωμεν τὴν σειρὰν $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2\nu}+\ldots$ καὶ ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν τὴν μονάδα, χρειάζεται πήδημα ἀπὸ ἀπείρους ὅρους. Πλησιάζομεν ὅσον θέλομεν πρὸς τὴν μονάδα, χωρὶς νὰ τὴν φθάνωμεν ποτέ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μορφὴ τοῦ νόμου κατὰ τὸν ὁποῖον προκύπτει ἡ ἀπειρία ὅρων δυνατὸν νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ πλησιάσωμεν ὅσον θέλομεν πρὸς τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος λαμβάνοντες ἀρκετοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ.

Τὰ στοιχειώδη αὐτὰ παραδείγματα δίδουν ἰδέαν τῆς διαβάσεως εἰς τὸ ὅριον.

Γενικῶς ἡ ὕπαρξις ὁρίου μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάμωμεν τὸ πήδημα ἀπὸ ἀπείρους ὅρους. Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς συγκλίσεως.

Εἰσερχόμεθα πάλιν εἰς τὸν ἀπειροστικὸν λογισμόν. Ἐδῶ τὸ παράδοξον εἶναι ὅτι ἐργαζόμεθα μὲ τὸ ἄπειρον καὶ ἐπιλύομεν προβλήματα τοῦ πεπερασμένου. Ἐξηγοῦμεν δηλαδὴ τὸ πεπερασμένον χρησιμοποιοῦντες τὸ ἄπειρον, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ὁδηγοῦν εἰς ἐξαγόμενον ἁπλούστερον. Τοῦτο πράττομεν συχνάκις εἰς τὴν μαθηματικὴν φυσικήν.

Ἡ βάσις τῆς ἀνωτέρας ἀναλύσεως στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς συγκλίσεως.

Διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν διαβαίνομεν ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν ἀθροίσματος προσθετέων πεπερασμένων τὸ πλῆθος εἰς τὴν ἀντίληψιν ἀθροίσματος ἀπείρων προσθετέων.

Ὑπεισέρχεται, ἐννοεῖται, εἰς τὰ ἀνωτέρω ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας. Ὅταν θεωρῶμεν μίαν καμπύλην ὡς τὸ ὅριον πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἀνάγομεν τὸ ἀσυνεχὲς εἰς τὸ συνεχὲς εἰς περίπτωσιν ὁριακὴν καὶ ἐπιτρέπεται οὕτω νὰ ὁρίσωμεν συνεχῆ μεγέθη [1].

---

[1]) Ἓν ἀληθῶς συνεχὲς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τμηθῇ εἰς μέρη· τοῦτο ἀντίκειται εἰς τὴν

Ἡ θεωρία τοῦ ἀπείρου εἶναι οὐσιώδης εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ἐπιτρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν θεμελιώδεις ἰδέας τῆς Γεωμετρίας. Ἔχομεν ἐδῶ ἐφαρμογὴν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων τῶν ἐχόντων τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς. Αἱ σχέσεις μεταξὺ Γεωμετρίας καὶ Ἀναλύσεως προκύπτουν ἐκ τοῦ ὅτι κατὰ μέγα μέρος τὰ ἀντικείμενα, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται αἱ δύο ἐπιστῆμαι, εἶναι τὰ αὐτά, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀφῃρημένην αὐτῶν μορφήν. Θέτουν βεβαίως διαφορετικὰ προβλήματα καὶ αἱ μέθοδοι διὰ τῶν ὁποίων λύονται εἰς τὴν Γεωμετρίαν εἶναι διάφοροι. Κυριαρχῶν χαρακτὴρ τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ μεγάλη γενικότης καὶ ἡ ἀφαίρεσις.

Ἔχομεν οὕτω τὴν θεωρίαν τῶν ὁμάδων, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς γενικὴν θεωρίαν σχέσεων. Εἶναι θεωρία ἀφορῶσα οὐχὶ εἰς τ' ἀντικείμενα αὐτὰ καθ' ἑαυτά, ἀλλὰ τὰς σχέσεις τῶν πράξεων. Κατεδείχθη ἡ χρησιμότης των εἰς τὴν μελέτην νέων ἰδεῶν.

Εἰς τὰς ὁμάδας ὑπάρχει ἡ ἔννοια τοῦ μετασχηματισμοῦ, ἐνῷ εἰς τὰ σύνολα ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας.

Φιλοσοφικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν τὰ ἑξῆς: Δύο εἶναι αἱ γενικαὶ ἀπόψεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξετάζεται ἐν τῇ Φιλοσοφίᾳ τὸ ἄπειρον. Ἡ ἐμπειρική, ἥτις θεωρεῖ τὸ ἄπειρον ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ *πεπερασμένου* καὶ ἡ ἰδεαλιστική, ἥτις θεωρεῖ τὸ ἄπειρον ὡς *προϋπάρχον* καὶ οὐχὶ ὡς δημιουργούμενον ὑπὸ τοῦ νοῦ κατόπιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὑπερπεπερασμένου. Κατὰ τοὺς ἐμπειρικοὺς ἐπιτρέπεται νὰ νοῶμεν μόνον τὸ δυναμικὸν ἄπειρον, τουτέστι μεταβλητὴν ποσότητα, ἡ ὁποία μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶν ὅριον.

Οὕτως ἔχομεν ἄπειρον μηδέποτε δυνάμενον νὰ συγκροτηθῇ. Κατὰ τοὺς ἰδεαλιστὰς δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν Ἐπιστήμην καὶ τὸ ἐνεστωτικὸν ἄπειρον, τὸ καλούμενον ὑπὸ τῶν ἀρχαίων «ἐν ἐνεργείᾳ ἄπειρον». Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι ὑπάρχει τι *τώρα*, τὸ ὁποῖον ἔχει ἤδη ὑπερβῆ πᾶν ὅριον. Προκειμένου λοιπὸν περὶ ἀριθμῶν, πλὴν τῶν πεπερασμένων τιμῶν, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ μία μεταβλητή, θέτομεν ὡς ὑπάρχουσαν καὶ τιμὴν μεγαλυτέραν πασῶν τῶν τιμῶν, ἤτοι τὴν ἀντίθετον τοῦ μηδενός.

Τὸ δυναμικὸν ἄπειρον ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπεριορίστου. Ἂς σημειωθῇ ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀπεριορίστου δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπροσδιορίστου. Οὕτω μία μεταβλητὴ ποσότης δυνατὸν νὰ εἶναι ἀπροσδιόριστος καὶ νὰ εἶναι πεπερασμένη.

φύσιν του ἢ μᾶλλον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι συλλογὴ σημείων· καὶ τὸ σημεῖον δὲν εἶναι τίποτε πραγματικόν. Ὅταν λέγωμεν *συνεχὲς εἰς τὰ μαθηματικά*, ἐννοοῦμεν ἀφῃρημένον μέτρον πραγματικοῦ συνεχοῦς, τὸ ὁποῖον ἐδημιούργησεν ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Θὰ ἠδυνάμεθα ἐδῶ νὰ ἀναφέρωμεν τὰς παρατηρήσεις τοῦ Weyl, τοῦ Brouwer καὶ τοῦ Wavre.

Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπεριορίστου ὁ Borel θέτει τὸ ἐρώτημα, τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν παρατήρησιν «μετὰ πάντα ἀκέραιον ὑπάρχει ἄλλος» διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπεριορίστου;

Ἀπὸ τὰ λεχθέντα διακρίνει τις ὅτι εἰς πολλὰ ζητήματα αἱ δυσκολίαι μετατοπίζονται χωρὶς νὰ ἐξαφανίζωνται. Ὑπάρχουν ἐποχαὶ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν ἐπιστημῶν, ὅπου τὸ πνεῦμα ὑπεστηρίχθη καὶ ἐπροχώρησε μὲ τὰς λέξεις καὶ τὰ σύμβολα, τὰ ὁποῖα ἐδημιούργησε καὶ ὅπου αἱ γενικεύσεις παρουσιάσθησαν μὲ μικρὰν προσπάθειαν.

Ἔθιξα μερικὰς ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὴν θεωρίαν τοῦ ἀπείρου καὶ ἐπαρουσίασα μὲ στοιχειώδη παραδείγματα προβλήματα φαινομενικῶς ἁπλᾶ, εἰς τὸ βάθος ὅμως πολύπλοκα. Ἔθιξα κατὰ τὸν στοιχειωδέστερον τρόπον ζητήματα, τὰ ὁποῖα προσεκτικὰ ἐξεταζόμενα δημιουργοῦν μεγάλα προβλήματα, ἄλυτα ἀκόμη.

Εἰς τὴν Ἐπιστήμην φθάνομεν κάποτε εἰς ἐξαγόμενα χωρὶς νὰ ἀκριβολογῶμεν διὰ τὴν ὁδὸν ποὺ ἀκολουθοῦμεν. Συμβαίνει μάλιστα ν᾽ ἀποβαίνῃ ἐνίοτε ὠφέλιμος ἡ πλάνη καὶ εἰς τὰς ἐποχὰς τῆς δημιουργίας μία ἀλήθεια ὄχι πλήρης νὰ εἶναι γονιμωτέρα ἀπὸ μίαν ἀλήθειαν ἀκριβολογημένην. Εἰς τὴν Ἐπιστήμην προκύπτει ὠφέλεια ὄχι μόνον μὲ τὰ φαινόμενα ποὺ ἐξηγοῦνται, ἀλλὰ καὶ μὲ αὐτὰ ποὺ δὲν ἐξηγοῦνται· διότι ταῦτα προκαλοῦν ἔρευναν.

Ἐπέμεινα κυρίως εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ, διότι αὕτη εἶναι στενώτατα συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως ὑπὸ τὴν γενικωτέραν της μορφήν. Εἰς δὲ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων, τὴν συναρτησιακὴν ἀνάλυσιν, τὴν μαθηματικὴν Φυσικήν, τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν βιολογίαν, ὑπάρχουν ἀχανεῖς ἐκτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναμένουν τολμηροὺς ἐξερευνητάς, ἐδάφη γόνιμα δι᾽ ἔρευναν καὶ ὅπου Ἔρευνα καὶ Μαθηματικὰ εἶναι ἀλληλένδετα.