ΕΚΤΑΚΤΗ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 8ΗΣ ΜΑΪΟΥ 2001

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΟΝΟΜΗ

ΕΠΙΣΗΜΗ ΥΠΟΔΟΧΗ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ κ. TOM APOSTOL

ΠΡΟΣΦΩΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

Ἀγαπητὲ Συνάδελφε, Tom Apostol,

Μὲ ἐξουσιοδότηση τῆς Συγκλήτου τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν ἀνέλαβα νὰ σᾶς προσφωνήσω κατὰ τὴν σημερινὴ ἐπίσημη ὑποδοχή σας ὡς ἀντεπιστέλλοντος μέλους τοῦ Ἀνωτάτου Πνευματικοῦ Ἱδρύματος τῆς χώρας, ἐξ ὀνόματος τῶν μελῶν τοῦ ὁποίου σᾶς ἀπευθύνω ἐγκάρδιο καὶ θερμὸ χαιρετισμό.

Ἀποδέχθηκα τὴν ἐντολὴ αὐτὴ τῆς Συγκλήτου, τιμητικὴ γιὰ μένα, καὶ τὴν ἐκτελῶ μὲ ἰδιαίτερη χαρά.

Κύριε Πρόεδρε,

Κυρίες καὶ Κύριοι Συνάδελφοι,

Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ὁ κ. Tom Apostol γεννήθηκε στὶς 20-8-1923 στὴν πόλη Helper τῆς πολιτείας Utah τῶν Η.Π.Α. ἀπὸ γονεῖς Ἕλληνες. Βαπτίσθηκε Χριστιανὸς Ὀρθόδοξος ὡς Ἀθανάσιος-Ἐμμανουήλ.

Σπουδές:

1944 B.S. - Chemical Engineering, University of Washington, Seattle.

1946 M.S. - Mathematics, Univ. of Washington, Seattle.

1948 Ph. D. - Mathematics, Univ. of California, Berkeley.

Ἀκαδημαϊκὴ Σταδιοδρομία

1948-49 Lecturer in Mathematics, Univ. of California Berkeley.

1949-50 C.L.E. Moore Instructor in Mathematics Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

1950-56 Assistant Prof. of Math., Cal. Inst. of Technology, (Caltech).

1956-62 Associate Prof. of Math., Caltech.

1978 Ἐπισκέπτης Καθηγητὴς Παν. Πατρῶν.

1962-1992 Τακτικὸς Καθηγητής, Caltech.

1992 Σήμερα Emeritus, Caltech.

Πολλὲς καὶ ποικίλες εἶναι οἱ ἐπαγγελματικὲς δραστηριότητες τοῦ Καθ. Apostol.

Μέλος

— American Mathematical So.

— Mathematical Association of America.

— National Council of Teachers of Mathematics.

1958-60 Ἐπισκέπτης Lecturer, Math. Asso. of America.

1962-65 Μέλος τοῦ Board of Governors, τῆς Math. Asso. of America.

1965-66 Chairman, Southern Cal. Section, Math., Asso. of America.

1969-74 Μέλος τοῦ Board of Governors τῆς Math. Asso. of America.

1981-88 Μέλος Διοικούσας Ἐπιτροπῆς τοῦ Πολυτεχνείου Κρήτης.

1982-87 Μέλος, Academic Team, The Mechanical Universe... and beyond, a 52-episode telecourse in College Physics.

Ἀπὸ τὸ 1987 μέχρι σήμερα εἶναι ὁ ἐμπνευστὴς δημιουργὸς καὶ διευθυντὴς τοῦ προγράμματος «Project MATHEMATICS!» στὸ Caltech. Πρόκειται περὶ μιᾶς σειρᾶς βιντεοταινιῶν ἐπὶ θεμάτων πού ἀφοροῦν βασικὲς περιοχὲς τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης.

Δημοσιεύματα

Ἐδημοσίευσε περὶ τὶς 66 ἐρευνητικὲς πρωτότυπες ἐργασίες ἐπὶ ποικίλων μαθηματικῶν θεμάτων ἰδίως τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐκ τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν οἱ 57, εἶναι δημοσιευμένες σὲ ἔγκριτα περιοδικὰ περιλαμβανόμενα στὸ Citation Index. Μία ἐκ τῶν ὑπολοίπων ἐννέα ἐργασιῶν του εἶναι δημοσιευμένη στὴν Ἐγκυκλοπαίδεια Britannica.

Πολλὲς εἶναι οἱ ἀναφορὲς στὶς ἐργασίες τοῦ καθ. Apostol. Μετρήθηκαν μόνο 1045 ἀναφορὲς ἀπὸ τὸ 1980 μέχρι σήμερα.

Ὁ καθ. Apostol διηύθυνε ἀρκετὸν ἀριθμὸ διδακτορικῶν διατριβῶν πολλοὶ δὲ ἐκ τῶν μαθητῶν του κατέχουν σήμερα πανεπιστημιακὲς ἕδρες. Ἐκτεταμένο καὶ σημαντικὸ εἶναι τὸ συγγραφικό του ἔργο. Συνέγραψε 33 βιβλία ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 22 μεταφράσθηκαν: στὰ Ἑλληνικὰ (3), Ἱσπανικὰ (7), Ἰταλικὰ (5), Πορτογαλλικὰ (2), Περσικὰ (Farsi) (3) (ἐκ τῶν ὁποίων, περσικῶν, τὰ δύο ἄνευ ἐγκρίσεως τοῦ συγγραφέως), Κινέζικα (1), Ὁλλανδικὰ (1).

Τὸ πρόγραμμα «Project MATHEMATICS!» τὸ ὁποῖο ὅπως ἀνέφερα προηγουμένως, ἐδημιούργησε καὶ διευθύνει στὸ Caltech, ἀποτελεῖ μεγάλη προσφορὰ στὴν Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν, γεγονὸς ἐξ ἄλλου ποὺ προκύπτει καὶ ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀναφερόμενες διακρίσεις ποὺ ἀπονεμήθηκαν σ' αὐτό.

Σχετικὰ μὲ τὸ πρόγραμμα «Project MATHEMATICS!» θὰ ἤθελα ὅμως νὰ ἀναφέρω πρῶτα τὰ ἑξῆς:

Ὅταν ὁ ἀρμενικῆς καταγωγῆς μαθηματικὸς Mamikon A. Mnatsakanian παρουσίασε τὴν ἐρευνητική του ἐργασία στὸ ἐν λόγω πρόγραμμα, ὁ ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ προγράμματος καθ. Tom Apostol ἐπείσθη ὅτι οἱ μέθοδοι τοῦ Mamikon μποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν καὶ νὰ προαγάγουν σημαντικὰ τὴν διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν, ἰδίως ἂν συνδυασθοῦν μὲ ὀπτικὰ μέσα τῆς σύγχρονης τεχνολογίας ποὺ παρεῖχε τὸ πρόγραμμα τοῦ T. Apostol.

Ἀπὸ τότε ἄρχισε στενὴ συνεργασία μεταξὺ τῶν δύο μαθηματικῶν καὶ τῶν συνεργατῶν των, τὴν ὁποίαν συνεργασία ἀκολούθησε ἡ δημοσίευση πρωτοτύπων ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν γιὰ τὶς ὁποῖες θὰ μᾶς μιλήσει ὁ κ. Apostol.

Στὶς 16 βιντεοταινίες ποὺ παρήγαγε τὸ πρόγραμμα, ὁ Tom Apostol συνέβαλε σημαντικὰ μὲ τὶς 19 ἐκ τῶν ἀτομικῶν ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν ἢ καὶ βιβλίων του.

Διακρίσεις

Στὸ «Project MATHEMATICS!».

Ταινία: «*Theorem of Pythagoras*»:

— Gold Medal, 1988, International Film and TV Festival of New York.
— Gold Apple, 1989, National Educational Film and Video Festival, Oakland.
— Blue Ribbon, Best of Category, 1989 American Film and Video Festival, Chicago.
— Electra Certificate, Best of Category, 1989, Bermingham International, Film Festival.
— Gold Cindy, 1989, Cindy Competition, Association of Visual Communications, Los Angeles.

Ταινία: «*The story of Pi*».

— Gold Apple, 1990 National Educational Film Festival, Chicago.

— Red Ribbon, 1990 American Film and Video Festival, Chicago.

Ταινία: «Similarity».

— Silver Apple, 1991 National Educational Film and Video Festival, Oakland.

Ταινία: «Sines and Cosines», Part I.

— Silver Medal, 1992, New York Film + Video Festival.

Ταινία: «Sines and Cosines», Part II.

— Gold Medal, 1993, New York Film + Video Festival.

— Gold Apple, 1994, National Educational Film and Video Festival, Oakland.

Ταινία: «The Tunnel of Samos».

— World Medal, 1995, New York Film + Video Festival Oakland.

᾿Επιπλέον τὸ πρόγραμμα «Project MATHEMATICS!» προτάθηκε ἀπὸ τὴν ἑταιρεία Hewlet-Packard, τὸ 1991 γιὰ τὸ βραβεῖο ποὺ φέρει τὴν ὀνομασία« Computer-world Smithsonian Award» σὲ ἀναγνώριση τῆς καινοτόμου χρήσεως τῆς τεχνολογίας πρὸς παροχὴν πληροφοριῶν.

Τὸ πρόγραμμα «Project MATHEMATICS!» χρηματοδότησαν 13 ὀργανώσεις ἢ ἱδρύματα μὲ τὸ ποσὸ τῶν $5,336,389. Μεταξὺ τῶν ἱδρυμάτων αὐτῶν συγαταλέγεται καὶ ἡ National Science Foundation, ἡ ὁποία προσέφερε τὸ ποσὸ τῶν $4,774, 144. Τὸ συνολικὸ ποσὸ τῶν $ 5,336,389 εἶχε συγκεντρωθεῖ μέχρι τὶς 16.10.2000.

Κατὰ τὰ τελευταῖα 10 ἔτη οἱ ἐρευνητικὲς δραστηριότητες τοῦ καθηγητοῦ Tom Apostol ἐπικεντρώνονται κυρίως στὴ βελτίωση τῆς Μαθηματικῆς Παιδείας, διὰ τοῦ προγράμματος «Project MATHEMATICS!». Ἡ ἐπίδραση τοῦ προγράμματος αὐτοῦ στὴ βελτίωση τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν σὲ ὅλες τὶς βαθμίδες τῆς ἐκπαίδευσης στὶς USA καθὼς καὶ ἐκτὸς τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς ᾿Αμερικῆς ὑπῆρξε πολὺ μεγάλη καὶ σημαντική. Τὰ μαθηματικὰ ἔπαυσαν νὰ εἶναι ὁ ἐφιάλτης γιὰ πολλοὺς μαθητὲς μικροὺς καὶ μεγάλους.

Ὁ Tom Apostol ὑπῆρξε καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι κριτὴς στὰ δύο μεγαλύτερα μαθηματικὰ περιοδικὰ ἤτοι στὸ Mathematical Reviews καὶ στὸ Zentralblatt für Mathematik, στὰ ὁποῖα ἔχει δημοσιεύσει ἑκατοντάδες κριτικῶν, κατὰ τὰ τελευταῖα 50 χρόνια.

᾿Αγαπητὲ Συνάδελφε ᾿Αθανάσιε-᾿Εμμανουὴλ ᾿Αποστολόπουλε,

᾿Απὸ ὅσα σύντομα ἀνέφερα προβάλλεται ἡ σημασία καὶ ἡ ἔκταση τῆς προσφορᾶς σας στὴν Μαθηματικὴ ᾿Επιστήμη— Γιὰ τοὺς παραπάνω λόγους, σᾶς ὑποδεχόμαστε μὲ ἀγάπη στοὺς κόλπους τοῦ ᾿Ανωτάτου Πνευματικοῦ Ἱδρύματος τῆς χώρας μὲ τὴν εὐχὴ νὰ ἐνισχύσετε καὶ ἀπὸ τὴν θέση σας αὐτὴ τὴν ἐπιστήμη, τὴν ὁποίαν ὑπηρετήσατε μέχρι σήμερα μὲ ἐπιτυχία καὶ ἀρετή.

ΜΙΑ ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΥΦΟΣ ΠΟΥ ΘΥΜΙΖΕΙ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ κ. TOM M. APOSTOL

Πρῶτα θέλω νὰ εὐχαριστήσω τὰ μέλη τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, καὶ ἰδιαιτέρως τὸν ἀκαδημαϊκὸ Νικόλαο Ἀρτεμιάδη, γιὰ τὴν μεγάλη τιμὴ ποὺ μοῦ κάνετε.

Παρόλο ποὺ γεννήθηκα στὴν Ἀμερική, ἔμαθα ἀπὸ τοὺς γονεῖς μου τὴν Ἑλληνικὴ γλώσσα καὶ τὶς Ἑλληνικὲς παραδόσεις.

Στὴν Ἀμερικὴ ἔχω κάνει χιλιάδες διαλέξεις στὰ μαθηματικά, ὅλες στὴν ἀγγλικὴ γλώσσα. Ἀπόψε θὰ προσπαθήσω νὰ κάνω τὴν πρώτη μου διάλεξη στὰ ἑλληνικά, καὶ τὴν ἀφιερώνω στὴ μνήμη τῶν γονέων μου.

* * *

Κάθε σπουδαστὴς γνωρίζει ὅτι ὁ λογισμὸς εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς κλάδους τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν μὲ ρίζες βαθιὲς στὰ φυσικὰ προβλήματα, καὶ μεγάλο μέρος ἀπὸ τὴ δύναμη καὶ τὴν ὀμορφιά του ὀφείλεται στὴν ποικιλία τῶν ἐφαρμογῶν του.

Σὰν κάποιος ποὺ ἔχει διδάξει λογισμὸ γιὰ πενήντα χρόνια καὶ ποὺ ἔχει γράψει μερικὰ βιβλία σὲ αὐτὸ τὸ θέμα, ἔμεινα ἔκπληκτος ὅταν ἔμαθα ὅτι μερικὰ δύσκολα κλασικὰ προβλήματα μποροῦν νὰ λυθοῦν πιὸ εὔκολα μὲ μία νέα μέθοδο ποὺ χρησιμοποιεῖ εἰκόνες ἀντὶ μαθηματικοὺς τύπους. Διάλεξα τρία τέτοια προβλήματα.

1. Ἐδῶ (Σχ. 1) εἶναι τὸ γράφημα τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης $y = e^{x/b}$, ὅπου b εἶναι θετικὴ σταθερά, καὶ θέλουμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ σκιασμένου μέρους τοῦ τμήματος ποὺ φαίνεται ἐδῶ, ἀπὸ μεῖον ἄπειρο μέχρι τὸ x. Ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς μᾶς λέγει ὅτι τὸ ἐμβδὸ εἶναι $be^{x/b}$.

2. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος, δηλαδή, τὸ σκιασμένο (Σχ. 2) τοῦ σχήματος κάτω ἀπὸ τὴν παραβολὴ $y = x^2$ καὶ πάνω μέρος ἀπὸ τὴν ὁριζόντια βάση, ἀπὸ μηδὲν μέχρι x;

Ὁ Ἀρχιμήδης ἦταν ὁ πρῶτος ποὺ ἔδωσε ἀπάντηση, μὲ μιὰ μέθοδο ποὺ ἔθεσε τὰ θεμέλια τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Σήμερα τὸ πρόβλημα λύνεται εὔκολα μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ τετραγώνου τοῦ x εἶναι τὸ ἕνα τρίτο τοῦ κύβου τοῦ x.

3. Ὅταν ἕνας δίσκος κυλιέται, χωρὶς νὰ γλιστράει, πάνω σὲ μία εὐθεία γραμμή, κάθε σταθερὸ σημεῖο τῆς περιφέρειάς του διαγράφει μία καμπύλη ποὺ λέ-

γεται *κυκλοειδής* (Σχ. 3). Θέλουμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ σκιασμένου μέρους τοῦ σχήματος κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη, καὶ πάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια βάση.

Τὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ λυθεῖ μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό, ἀλλὰ εἶναι πιὸ δύσκολο ἀπὸ τὰ προηγούμενα. Πρῶτα πρέπει νὰ βρεθεῖ ἕνας τύπος τῆς καμπύλης, κάτι ποὺ δὲν εἶναι τελείως τετριμμένο, καὶ ἔπειτα πρέπει νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ τύπου αὐτοῦ γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδό.

Αὐτὰ τὰ κλασικὰ προβλήματα μποροῦν νὰ λυθοῦν μὲ μία νέα μέθοδο ποὺ τὴν καταλαβαίνουν καὶ τὰ μικρὰ παιδιὰ — αὐτὴ ἡ μέθοδος στηρίζεται σὲ εἰκόνες καὶ δὲν χειάζεται μαθηματικοὺς τύπους. Ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ μέθοδος λύνει μερικὰ προβλήματα ποὺ δὲν ἐπιδέχονται λύση μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό.

Παραδείγματος χάριν, κοιτᾶξτε τὴν καμπύλη ποὺ διαγράφει ὁ μπροστινὸς τροχὸς ἑνὸς ποδηλάτου σὲ κίνηση (Σχ. 4). Ὁ πίσω τροχὸς διαγράφει μία ἄλλη καμπύλη. Τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τμήματος ἀνάμεσα στὶς δυὸ καμπύλες. Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμὸ πρέπει νὰ ξέρουμε μαθηματικοὺς τύπους γιὰ τὶς καμπύλες. Ἀλλὰ μὲ τὴν νέα μέθοδο δὲν χρειάζονται καθόλου τύποι. Τὸ πρόβλημα λύνεται ἀδιαφορώντας γιὰ τὸ σχῆμα ποὺ διαγράφει τὸ ποδήλατο.

Πρὶν νὰ περιγράψω τὴ νέα μέθοδο, θὰ κάνω μία ἱστορικὴ εἰσαγωγή. Ἡ μέθοδος γεννήθηκε τὸ 1959 στὸ μυαλὸ ἑνὸς προπτυχιακοῦ φοιτητῆ, ποὺ ὀνομάζεται *Μάμικον Μνατσακάνιαν*, στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Γερεβὰν στὴν Ἀρμενία. Ὁ Μάμικον μοῦ εἶπε ὅτι ὅταν παρουσίασε αὐτὴ τὴν μέθοδο στοὺς μαθηματικοὺς στὴ Σοβιετικὴ Ἕνωση, τοῦ εἶπαν «Πρέπει νὰ κάνεις λάθος — δὲν μποροῦν νὰ λυθοῦν τέτοια προβλήματα τόσο εὔκολα».

Ὁ Μάμικον τελείωσε τὶς σπουδές του μὲ Διδακτορικὸ Δίπλωμα Φυσικῆς. Ἔγινε καθηγητὴς ἀστροφυσικῆς στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Γερεβάν, καὶ εἶναι διεθνῶς γνωστὸς στὴν θεωρία μετάδοσης τῆς ἀκτινοβολίας.

Ἐξακολούθησε νὰ ἀξιοποιεῖ τὴν γεωμετρικὴ μέθοδό του, καὶ τὸ 1981 δημοσίευσε ἕνα ἄρθρο ποὺ ἐξηγοῦσε τὴν μέθοδο [Mamikon A. Mnatsakanian, «On the Area of a Region on a Developable Surface», (Russian), Doklady of the Armenian Academy of Sciences, (1981) Vol. 73, No. 2, pp. 97-101. Communicated by Academician V. A. Ambartsumian]. Ἀλλὰ τὸ ἄρθρο αὐτὸ διέφυγε τὴν προσοχὴ τῶν ἁρμοδίων πιθανῶς γιατὶ ἦταν γραμμένο στὰ Ρωσικὰ σὲ Ἀρμένικο περιοδικὸ μὲ μικρὴ κυκλοφορία.

Ὁ Μάμικον πῆγε στὴν Καλιφόρνια τὸ 1990 γιὰ νὰ μελετήσει προγράμματα προετοιμασίας γιὰ σεισμούς. Ὅταν ἡ Σοβιετικὴ κυβέρνηση ἔπεσε, ὁ Μάμικον βρέθηκε στὴν 'Αμερικὴ χωρὶς βίζα. Μὲ τὴν βοήθεια μερικῶν μαθηματικῶν τῆς Καλιφόρνιας ἔγινε δεκτὸς ὡς ξένος μὲ ἰδιαίτερες ἱκανότητες.

"Εκανε μερικὲς ἐργασίες γιὰ τὸ 'Υπουργεῖο Παιδείας τῆς Καλιφόρνιας καὶ ἐν τῷ μεταξὺ προχώρησε τὴν ἀνάπτυξη τῆς μεθόδου του μὲ ἐπιδείξεις σὲ μερικὰ γυμνάσια. Εἶχε μεγάλη ἐπιτυχία μὲ τοὺς μαθητές.

Μιὰ ἡμέρα τὸ 1997 ὁ Μάμικον παρουσιάστηκε στὸ γραφεῖο μου στὸ Caltech καὶ μὲ ἔπεισε ὅτι ἡ μέθοδός του ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ κάνει μεγάλη συμβολὴ στὴν Μαθηματικὴ παιδεία, ἰδιαιτέρως ἂν εἶναι συνδυασμένη μὲ τὰ ὀπτικὰ μέσα τῆς μοντέρνας τεχνολογίας.

Μαζὺ ἔχουμε γράψει μερικὰ ἄρθρα σὲ αὐτὰ τὰ θέματα, καὶ τώρα προσπαθοῦμε νὰ παρουσιάσουμε τὴν μέθοδο τηλεοπτικῶς.

'Επιστρέφουμε τώρα στὴν περιγραφὴ τῆς μεθόδου τοῦ Μάμικον. "Οπως ὅλες οἱ θαυμάσιες ἀνακαλύψεις, βασίζεται σὲ μία ἁπλὴ ἰδέα. 'Εδῶ ἔχουμε ἕνα κλασικὸ πρόβλημα τῆς γεωμετρίας (Σχ. 5). 'Η εἰκόνα δείχνει ἕνα κυκλικὸ δακτύλιο καὶ μία χορδὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου ἐφαπτομένη τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου. 'Η χορδὴ ἔχει μῆκος a, καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ δακτυλίου. 'Η λύση εἶναι εὔκολη μὲ βοήθεια τὸ σχεδιάγραμμα (Σχ. 6). "Ας ποῦμε ὅτι ὁ μικρὸς κύκλος ἔχει ἀκτίνα r, καὶ ὁ μεγάλος κύκλος ἔχει ἀκτίνα R. Τότε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ δακτυλίου εἶναι ἡ διαφορὰ

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

'Αλλὰ ἐδῶ ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, καὶ τὸ Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα μᾶς λέγει ὅτι $R^2 - r^2 = (a/2)^2$, ἔτσι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ δακτυλίου εἶναι

$$\pi(a/2)^2 = \pi a^2/4.$$

Σημειωτέον ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μῆκος a καὶ ὄχι ἀπὸ τὶς δύο ἀκτίνες τῶν κύκλων. "Αν γνωρίζομε ἀπὸ πρὶν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μῆκος a, τότε τὸ πρόβλημα λύνεται πιὸ εὔκολα μὲ ἄλλη μέθοδο. Μικραίνουμε τὸν ἐσωτερικὸ κύκλο ὥσπου νὰ ἔχει ἀκτίνα μηδέν, καὶ ὁ δακτύλιος γίνεται δίσκος μὲ ἀκτίνα $a/2$ καὶ ἐμβαδὸν $\pi(a/2)^2$.

'Ο Μάμικον ἀναρωτήθηκε πῶς μπορεῖ κανεὶς νὰ ξέρει ἀπὸ πρὶν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μῆκος a;

Τότε ἔκανε μία δυναμικὴ διατύπωση τοῦ προβλήματος. Πάρε τὴ μισὴ χορδὴ ὡς ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου. "Αν κινήσομε τὸ ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα γύρω ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, βλέπουμε (Σχ. 7) ὅτι σαρώνεται ὁ κυκλικὸς δακτύλιος ἀνάμεσα στοὺς δύο κύκλους.

Τώρα κάνουμε παράλληλη μετατόπιση κάθε ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος καὶ φέρνουμε τὸ σημεῖο ἐπαφῆς σὲ ἕνα κοινὸ σημεῖο (Σχ. 8). Ὅταν τὸ ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα κινεῖται γύρω ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, τὸ μετατοπισμένο διάνυσμα στρέφεται μιὰ φορὰ γύρω ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο καὶ σαρώνει ἕνα δίσκο μὲ ἀκτίνα $a/2$. Αὐτὸς ὁ δίσκος ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸν δακτύλιο.

Ὁ Μάμικον κατάλαβε ἀμέσως ὅτι αὐτὴ ἡ δυναμικὴ πρόσβαση λειτουργεῖ ἂν ἀντικαταστήσει τὸν ἐσωτερικὸ κύκλο μὲ ἄλλη κλειστὴ καμπύλη, παραδείγματος χάριν, μὲ μία ἔλλειψη. Ὅταν ἕνα ἐφαπτομενικὸ κομμάτι μὲ σταθερὸ μῆκος κινεῖται γύρω ἀπὸ τὴν περιφέρεια μίας κλειστῆς καμπύλης, τότε σαρώνεται μία περιοχὴ ποὺ λέγεται *ὠοειδὴς δακτύλιος*. Ἐδῶ ἔχουμε δύο παραδείγματα (Σχ. 9).

Πάλι κάνουμε παράλληλη μετατόπιση σὲ κάθε ἐφαπτομενικὸ κομμάτι καὶ φέρνουμε τὸ σημεῖο ἐπαφῆς σὲ ἕνα κοινὸ σημεῖο. Ὅταν τὸ ἐφαπτομενικὸ τμῆμα κινεῖται γύρω ἀπὸ τὴν περιφέρεια τῆς ἔλλειψης, τὸ μετατοπισμένο τμῆμα στρέφεται μιὰ φορὰ γύρω ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο καὶ σαρώνει ἕνα κυκλικὸ δίσκο μὲ ἀκτίνα τὸ σταθερὸ μῆκος τοῦ τμήματος. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ὁ ὠοειδὴς δακτύλιος ἔχει ἐμβαδὸν ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ δίσκου.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἀληθεύει γιὰ κάθε κυρτὴ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη. Ἐδῶ ἔχουμε ἕνα τρίγωνο (Σχ. 10). Ὅταν τὸ ἐφαπτομενικὸ τμῆμα κινεῖται κατὰ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου δὲν σαρώνει κανένα ἐμβαδόν. Ὅταν περιστρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ κορυφή, ἀπὸ τὴν μία πλευρὰ στὴν ἄλλη, σαρώνει ἕνα τομέα κύκλου. Ὅταν διανύσει ὅλη τὴν περιφέρεια τοῦ τριγώνου, σαρώνει τρεῖς τομεῖς κύκλου, καὶ οἱ τρεῖς ἀποτελοῦν ἕνα κυκλικὸ δίσκο.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἀληθεύει καὶ γιὰ κάθε κυρτὸ πολύγωνο (Σχ. 11). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ποὺ σαρώνει ἕνα ἐφαπτομενικὸ τμῆμα μὲ σταθερὸ μῆκος εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου μὲ ἀκτίνα τὸ μῆκος αὐτό. Ἐπίσης ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἀληθεύει γιὰ κάθε κυρτὴ κλειστὴ καμπύλη ποὺ εἶναι ὅριο κυρτῶν πολυγώνων (Σχ. 12).

Τὰ παραπάνω μᾶς ὁδηγοῦν στὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον γιὰ ὠοειδεῖς δακτυλίους. *Ὅλοι οἱ ὠοειδεῖς δακτύλιοι ποὺ σαρώνονται ἀπὸ ἕνα ἐφαπτομενικὸ τμῆμα μὲ σταθερὸ μῆκος ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ σχῆμα ἢ τὸ μέγεθος τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης. Ἐπιπλέον, τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μῆκος Λ τοῦ ἐφαπτομενικοῦ τμήματος, καὶ εἶναι $\pi\Lambda^2$, δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου μὲ ἀκτίνα Λ.*

Παρεμπιπτόντως, τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον δίνει νέα ἀπόδειξη στὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα (Σχ. 13). Ἂν ὁ ἐσωτερικὸς κύκλος ἔχει ἀκτίνα r, καὶ ὁ ἐξωτερικὸς ἔχει ἀκτίνα R, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου εἶναι $\pi R^2 - \pi r^2$. Ἀλλὰ τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον μᾶς λέγει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\pi \Lambda^2$, ὅπου Λ εἶναι τὸ σταθερὸ μῆκος τοῦ ἐφαπτόμενου τμήματος. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi \Lambda^2$, ἢ $R^2 - r^2 = \Lambda^2$, καὶ $R^2 = r^2 + \Lambda^2$, δηλαδὴ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα.

Μία γενίκευση τοῦ θεωρήματος τοῦ Μάμικον προκύπτει ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχῆμα (Σχ. 14). Ἡ κάτω καμπύλη εἶναι μία γενικὴ ἐπίπεδη ὁμαλὴ καμπύλη. Ἐφαπτόμενα τμήματα τῆς καμπύλης μὲ σταθερὸ μῆκος σαρώνουν μία περιοχὴ φραγμένη ἀπὸ τὴν κάτω καμπύλη καὶ μία ἀπὸ τὴν ἄνω καμπύλη ποὺ χαράσσεται μὲ τὴν ἄλλη ἄκρη τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων. Τὸ σχῆμα τῆς περιοχῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κάτω καμπύλη καὶ τὸ μῆκος τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων. Ἡ περιοχὴ αὐτὴ λέγεται *ἐφαπτόμενο σάρωμα.*

Ὅταν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση στὸ κάθε ἐφαπτομενικὸ τμῆμα καὶ φέρνουμε τὸ σημεῖο ἐπαφῆς σὲ ἕνα κοινὸ σημεῖο, τὸ σύνολο τῶν μετατοπισμένων τμημάτων λέγεται *ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα.*

Τὸ σχῆμα 14 δείχνει τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα καὶ τὸ *ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα.*

Ὅταν τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ἔχουν σταθερὸ μῆκος, ὅπως εἶναι στὸ σχ. 14, τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι κυκλικὸς τομέας μὲ ἀκτίνα τὸ σταθερὸ αὐτὸ μῆκος.

Παρεμπιπτόντως, μποροῦμε νὰ κάνουμε παράλληλη μετατόπιση στὸ κάθε ἐφαπτομενικὸ τμῆμα καὶ νὰ φέρουμε τὴν *ἄλλη* ἄκρη τοῦ τμήματος σὲ ἕνα κοινὸ σημεῖο. Τότε τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι συμμετρικὸ μὲ τὸ ἄλλο (Σχ. 15).

Τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον μᾶς λέγει:

Ἕνα ἐφαπτόμενο σάρωμα, καὶ τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμά του, ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς ἀρχικῆς καμπύλης.

Ἕνα φυσικὸ παράδειγμα παρουσιάζεται ὅταν ὁ μπροστινὸς τροχὸς ἑνὸς ποδήλατου διαγράφει μία καμπύλη, καὶ ὁ πίσω τροχός, ποὺ βρίσκεται σὲ σταθερὴ ἀπόσταση ἀπὸ τὸν μπροστινὸ τροχό, διαγράφει μιὰ ἄλλη καμπύλη (Σχ. 16). Τὸ τμῆμα ἀνάμεσα στὶς δύο καμπύλες εἶναι ἐφαπτόμενο σάρωμα, καὶ τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι κυκλικὸς τομέας μὲ ἀκτίνα αὐτὴ τὴν ἀπόσταση. Τὸ τμῆμα ἀνάμεσα στὶς δύο καμπύλες, καὶ ὁ κυκλικὸς τομέας ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ποδήλατου καὶ τὴν μεταβολὴ τῆς γωνίας ἀπὸ τὴν ἀρχὴ μέχρι τὸ τέλος τῆς κίνησης. Τὸ σχῆμα ποὺ διαγράφει τὸ ποδήλατο δὲν ἔχει καμιὰ σημασία.

Τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος (Σχ. 17) δείχνει τὴν ἴδια ἰδέα σὲ μιὰ γενικὴ περίπτωση. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα δὲν ἔχουν κατ' ἀνάγκην σταθερὸ μῆκος. Ἔχουμε πάλι τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα καὶ τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα.

Τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον λέγει ὅτι τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα καὶ τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.

Στὴν πιὸ γενικὴ διατύπωση τοῦ θεωρήματος τοῦ Μάμικον, ἡ δεδομένη καμπύλη δὲν χρειάζεται νὰ εἶναι ἐπίπεδη. Μπορεῖ νὰ εἶναι καμπύλη στὸ χῶρο, καὶ τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα μποροῦν νὰ ποικίλλουν σὲ μῆκος. Τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα ἀνήκει σὲ μία εὐθειογενὴ ἐπιφάνεια, μία ἐπιφάνεια, δηλαδή, ποὺ μποροῦμε νὰ τὴν ἁπλώσουμε ἐπάνω σὲ ἐπίπεδο (Σχ. 18). Τὸ σχῆμα τοῦ ἐφαπτόμενου σαρώματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος καὶ τὴν κατεύθυνση τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων. Τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα ἀνήκει σὲ μία κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ κορυφὴ τὸ κοινὸ σημεῖο. Τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον βεβαιώνει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐφαπτόμενου σαρώματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐφαπτόμενου συμπλέγματος.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος γίνεται μὲ χρήση τῆς διαφορικῆς γεωμετρίας.

Ὅταν πληροφορήθηκα τὸ θεώρημα αὐτὸ ἡ πρώτη μου ἀντίδραση ἦταν: Ἐντάξει, εἶναι μία ὡραία ἀνακάλυψη. Πρέπει νὰ ἔχει βαθειὲς συνέπειες γιατὶ συνεπάγεται τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα. Τί ἄλλο μπορεῖ νὰ κάνουμε μὲ αὐτὸ τὸ θεώρημα;

Θὰ δοῦμε τώρα ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον ἔχει μεγάλο πλῆθος ἐφαρμογῶν. Εἴδαμε πῶς μᾶς παρέχει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὠοειδοῦς δακτυλίου καὶ τοῦ τμήματος ἀνάμεσα στὶς δύο καμπύλες ποὺ διαγράφει ἕνα ποδήλατο. Ἄλλο παρόμοιο παράδειγμα εἶναι ἡ καμπύλη ποὺ ὀνομάζεται **tractrix**.

Ὅταν ἕνα παιδάκι περπατάει ἐπάνω σὲ μιὰ εὐθεία γραμμὴ καὶ τραβάει ἕνα παιγνίδι ἔξω ἀπ' τὴ γραμμή, μὲ τεντωμένο σπάγγο σταθεροῦ μήκους, τὸ παιγνίδι διαγράφει μία καμπύλη ποὺ λέγεται **tractrix**, ὅπως φαίνεται στὸ Σχῆμα 19.

Θέλουμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σκιασμένου μέρους τοῦ σχήματος, κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη καὶ πάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια γραμμή.

Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό, πρέπει πρῶτα νὰ βροῦμε τὸν τύπο τῆς καμπύλης, κάτι ποὺ δὲν εἶναι πολὺ εὔκολο. Χρειάζεται νὰ λύσουμε μία διαφορικὴ ἐξίσωση γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τύπο τῆς καμπύλης, καὶ μετὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς παραστάσεως αὐτῆς γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν.

Μὲ τὴν βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Μάμικον, ἡ λύση εἶναι πολὺ εὔκολη. Ἡ **tractrix** εἶναι εἰδικὴ περίπτωση τοῦ προβλήματος μὲ τὸ ποδήλατο, ὅταν ὁ μπροστινὸς τροχὸς διαγράφει μία ὁριζόντια γραμμή. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς ποὺ σαρώνει ὁ σπάγγος μὲ σταθερὸ μῆκος εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα ποὺ εἶναι τὸ τέταρτο ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου.

Οἱ πιὸ σπουδαῖες ἐφαρμογὲς τοῦ θεωρήματος τοῦ Μάμικον εἶναι σὲ παραδείγματα στὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται ἐφαπτόμενα τμήματα ποὺ δὲν ἔχουν σταθερὸ μῆκος. Τέτοια παραδείγματα φανερώνουν τὴν ἀληθινὴ ἰσχὺ τῆς μεθόδου τοῦ Μάμικον. Ἂς ἐπανέλθουμε τώρα στὸ πρῶτο πρόβλημα: τῆς ἐκθετικῆς καμπύλης (Σχ. 1).

Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση εἶναι πανταχοῦ παροῦσα στὶς ἐφαρμογὲς τῶν μαθηματικῶν. Βρίσκεται σὲ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν αὔξηση τοῦ πληθυσμοῦ, τὴν θερμοκρασία, τὴν διάσπαση μιᾶς ραδιενεργοῦ οὐσίας, καθὼς καὶ σὲ ἄλλα προβλήματα τῆς Φυσικῆς, ὅταν ἡ αὔξηση μιᾶς ποσότητας εἶναι ἀνάλογη τῆς παρούσης τιμῆς. Γεωμετρικά, ἡ κλίση τῆς ἐκθετικῆς καμπύλης σὲ κάθε σημεῖο εἶναι ἀνάλογη μὲ τὸ ὕψος τῆς καμπύλης σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο. Ἡ ἐκθετικὴ καμπύλη ἔχει καὶ μία ἄλλη περιγραφὴ ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν χρήση τῆς *ὑφαπτομένης*, δηλαδὴ τῆς προβολῆς τῆς ἐφαπτομένης στὸν ὁριζόντιο ἄξονα. Τὸ διάγραμμα (Σχ. 20) δείχνει μία γενικὴ καμπύλη μὲ τὴν ἐφαπτομένη καὶ τὴν ὑφαπτομένη σὲ ἕνα σημεῖο. Ἡ κλίση τῆς ἐφαπτομένης εἶναι $f(x)/b(x)$, ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ ὕψους $f(x)$ τοῦ σημείου καὶ τοῦ μήκους $b(x)$ τῆς ὑφαπτομένης. Ἡ κλίση εἶναι ἀνάλογη τοῦ ὕψους ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἡ ὑφαπτομένη ἔχει σταθερὸ μῆκος.

Τὸ διάγραμμα (Σχ. 21) δείχνει γραφικὰ τὴν ἐκθετικὴ συνάρτηση $y = e^{x/b}$, ὅπου b εἶναι θετικὴ σταθερά. Ἡ μόνη ἰδιότητα ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει ἐδῶ εἶναι ὅτι ἡ ὑφαπτομένη ἔχει σταθερὸ μῆκος b. Αὐτὸ προκύπτει εὔκολα ἀπὸ τὸν διαφορικὸ λογισμό, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ καὶ ὡς *ὁρισμὸς* τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης. Ὁ *Leibniz* πρῶτος παρουσίασε τὴν ἐκθετικὴ συνάρτηση τὸ 1684 ὅταν ἔθεσε τὸ πρόβλημα νὰ βρεθοῦν ὅλες οἱ καμπύλες μὲ σταθερὴ ὑφαπτομένη. Ἡ λύση εἶναι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση.

Τώρα θὰ μεταχειριστοῦμε τὴν ἰδιότητα αὐτὴ γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιφέρειας κάτω ἀπὸ τὸ γράφημα τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης $y = e^{x/b}$, ἀπὸ τὸ μεῖον ἄπειρο μέχρι τὸ x. Τὸ διάγραμμα (Σχ. 21) δείχνει τὴν καμπύλη μαζὶ μὲ τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα. Τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι ἕνα τρίγωνο μὲ βάση b καὶ ὕψος $e^{x/b}$. Τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα (τὸ τρίγωνο). Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιφέρειας κάτω ἀπὸ τὸ γράφημα τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης εἶναι δυὸ φορὲς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, δηλαδή, $be^{x/b}$, τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα ποὺ μᾶς δίνει ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός.

Ἔμεινα κατάπληκτος ὅταν ἔμαθα ὅτι αὐτὸ τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζεται μὲ μία ἁπλὴ γεωμετρικὴ μέθοδο, χωρὶς τὴν χρήση τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Ἐπιστρέφουμε τώρα στὸ δεύτερο πρόβλημα, πιθανῶς τὸ πιὸ παλαιὸ πρόβλημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ: *Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραβολικοῦ τμήματος;*

Στὸ Σχῆμα 22 βλέπουμε ὅτι τὸ τμῆμα μπορεῖ νὰ ἐγκλειστεῖ σὲ ὀρθογώνιο μὲ βάση x καὶ ὕψος τὸ τετράγωνο τοῦ x. Ἀπὸ τὴν ἐποπτεία τοῦ σχήματος δικαιολογεῖται ὁ ἰσχυρισμὸς ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ μισὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ. Ὁ Ἀρχιμήδης ἔκανε τὴν ἐκπληκτικὴ ἀνακάλυψη ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἕνα τρίτο τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδή, τὸ ἕνα τρίτο τοῦ κύβου τοῦ x. Σήμερα, κάθε σπουδαστὴς μπορεῖ νὰ λύσει αὐτὸ τὸ πρόβλημα μὲ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό: Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ τετραγώνου τοῦ x εἶναι τὸ ἕνα τρίτο τοῦ κύβου τοῦ x.

Θὰ χρησιμοποιήσουμε τώρα τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μὲ μία μέθοδο ποὺ εἶναι, ὄχι μόνον πιὸ εὔκολη ἀπὸ τὴν μέθοδο τοῦ Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ καὶ πιὸ ἰσχυρὴ γιατὶ γενικεύεται στὶς ἀνώτερες δυνάμεις, x^3, x^4, κ.τ.λ. Ἡ παραβολὴ ἔχει ἐξίσωση $y = x^2$, ἀλλὰ δὲν θὰ μεταχειριστῶ αὐτὸν τὸν τύπο. Θὰ μεταχειριστῶ μόνον τὴν ἰδιότητα ὅτι ἡ ἐφαπτομένη γραμμὴ πάνω ἀπὸ τὸ σημεῖο x κόβει μία ὑφαπτομένη γραμμὴ μὲ μῆκος $x/2$, ὅπως δείχνει τὸ διάγραμμα (Σχ. 23). Ἡ κλίση τῆς ἐφαπτομένης εἶναι x^2 διὰ $x/2$, ἤτοι $2x$.

Τὸ διάγραμμα αὐτὸ (Σχ. 24) δείχνει ἄλλη μία παραβολή, $y = (2x)^2$, ποὺ ἔχει ἀκριβῶς τὸ μισὸ πλάτος τῆς πρώτης παραβολῆς. Δηλαδή, ἡ δεύτερη παραβολὴ εἶναι διχοτόμος κάθε ὁριζόντιας ἐγκαρσίας τομῆς πάνω ἀπὸ τὴν πρώτη παραβολή. Οἱ δύο παραβολὲς χωρίζουν τὸ τετράγωνο σὲ τρεῖς περιοχές, καὶ θὰ ἀποδείξουμε ὅτι οἱ τρεῖς περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Τότε κάθε περιοχὴ ἔχει ἐμβαδὸν τὸ ἕνα τρίτο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου, ὅπως ἀναφέραμε προηγουμένως.

Οἱ δύο ἐπάνω περιοχὲς προφανῶς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν γιατὶ ἡ ἐπάνω παραβολὴ εἶναι διχοτόμος. Τότε γιὰ νὰ τελειώσουμε τὴν ἀπόδειξη εἶναι ἀρκετὸ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἡ πιὸ πάνω περιοχὴ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ἀρχικὸ παραβολικὸ τμῆμα.

Γιὰ νὰ τὸ κάνουμε αὐτό, ἐξετάζουμε τὸ διάγραμμα (Σχ. 25). Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν, γιατὶ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι οἱ δύο σκιασμένες περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμαστε τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον. Ἡ σκιασμένη περιοχὴ κάτω ἀπὸ τὴν παραβολὴ $y = x^2$ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα ποὺ γίνεται μὲ ὅλα τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ τὴν καμπύλη μέχρι τὴν ὁριζόντια βάση. Ἡ ἄλλη σκιασμένη περιοχὴ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα αὐτοῦ τοῦ σαρώματος ὅταν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση στὸ κάθε ἐφαπτόμενο τμῆμα, φέρνοντας κάθε κάτω σημεῖο στὴν ἀρχὴ $(0, 0)$. Αὐτὸ τὸ βλέπουμε ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐφαπτομένη τῆς κάτω παραβολῆς στὸ σημεῖο (t, t^2) κόβει τὴν βάση στὸ σημεῖο $(t/2, 0)$. Ὅταν τὸ ἐφαπτόμενο τμῆμα ἀπὸ τὸ σημεῖο $(t/2, 0)$ μέχρι τὸ σημεῖο (t, t^2) κινεῖται ἀριστερὰ σὲ διάστημα $t/2$, τὸ νέο κομμάτι ἑνώνει τὸ σημεῖο $(0, 0)$ μὲ τὸ σημεῖο $(t/2, t^2)$ στὴν παραβολὴ $y = (2x)^2$. Τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον μᾶς λέγει ὅτι οἱ δύο σκιασμένες περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν, αὐτὸ δηλαδὴ ποὺ θέλαμε νὰ ἀποδείξουμε.

Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εἶναι τὸ ἕνα τρίτο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου ὀρθογωνίου.

Ἡ προηγούμενη ἀπόδειξη γενικεύεται καὶ σὲ ἀνώτερες δυνάμεις x^3, x^4, κ.τ.λ.

Τὰ γραφήματα τῶν $y = x^3$ καὶ $y = (3x)^3$ διαχωρίζουν τὸ τετράγωνο μὲ ἐμβαδὸν x^4 σὲ τρεῖς περιοχὲς (Σχ. 26). Ἡ πάνω καμπύλη $y = (3x)^3$ εἶναι τριχοτόμος κάθε ὁριζόντιας ἐγκαρσίας τομῆς τῆς καμπύλης $y = x^3$. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιὸ πάνω περιοχῆς εἶναι τὸ μισὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς ἀνάμεσα στὶς δύο καμπύλες. Σὲ τούτη τὴν περίπτωση θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιὸ πάνω περιοχῆς εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη $y = x^3$. Αὐτὸ δείχνει ὅτι κάθε περιοχὴ ἔχει ἐμβαδὸν τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου.

Κοιτᾶξτε τὸ διάγραμμα (Σχ. 27). Ἡ σκιασμένη περιοχὴ κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη $y = x^3$ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα ποὺ γίνεται μὲ ὅλα τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ τὴν κυβικὴ καμπύλη μέχρι τὴν ὁριζόντια βάση. Ἡ ἄλλη σκιασμένη περιοχὴ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα αὐτοῦ τοῦ σαρώματος. Συνεπῶς οἱ δυὸ περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Συνεπῶς ἡ περιοχὴ πάνω ἀπὸ τὴν καμπύλη $y = (3x)^3$ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὴν περιοχὴ κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη $y = x^3$, καὶ κάθε ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραηώνου, δηλαδή, $x^4/4$.

Ἡ ἴδια μέθοδος ἰσχύει γιὰ ὅλες τὶς ἀνώτερες δυνάμεις. Γιὰ τὴν καμπύλη $y = x^n$ μεταχειριζόμαστε τὴν ἰδιότητα ὅτι ἡ ὑφαπτομένη στὸ x ἔχει μῆκος x/n.

Ἐρχόμαστε τώρα στὸ τρίτο πρόβλημα, τὴν κυκλοειδὴ (Σχ. 3), μιὰ καμπύλη ποὺ διαγράφεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας ἑνὸς δίσκου ποὺ κυλίεται χωρὶς νὰ γλιστράει πάνω σὲ μία εὐθεία γραμμή. Θέλουμε νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς ἀνάμεσα σὲ μιὰ ἀψίδα τῆς κυκλοειδοῦς καὶ στὴν ὁριζόντια βάση εἶναι τρεῖς φορὲς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλιόμενου δίσκου (Σχ. 28), χωρὶς νὰ μεταχειριστοῦμε τύπους τῆς κυκλοειδοῦς ἢ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό.

Ἐδῶ ἔχουμε μία ἀψίδα τῆς κυκλοειδοῦς (Σχ. 29) ἐγγεγραμμένη μέσα σὲ ἕνα ὀρθογώνιο μὲ ὕψος d, τὴν διάμετρο τοῦ δίσκου, καὶ βάση πd, τὴν περίμετρο τοῦ δίσκου. Τὸ ὀρθογώνιο ἔχει ἐμβαδὸν πd^2, ποὺ εἶναι τέσσερις φορὲς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δίσκου. Συνεπῶς, εἶναι ἀρκετὸ νὰ δείξουμε ὅτι ἡ περιοχὴ πάνω ἀπὸ τὴν καμπύλη καὶ μέσα στὸ ὀρθογώνιο ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ ἕνα δίσκο.

Γιὰ νὰ τὸ κάνουμε αὐτό, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἡ περιοχὴ πάνω ἀπὸ τὴν καμπύλη εἶναι ἐφαπτόμενο σάρωμα τῆς κυκλοειδοῦς μὲ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα ἕνα κυκλικὸ δίσκο μὲ διάμετρο d. Τὸ θεώρημα τοῦ Μάμικον λέει ὅτι ὁ δίσκος ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα, καὶ μᾶς δείνει τὴν ἀπόδειξη.

Τὸ μόνο ποὺ χρειάζεται εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι κυκλικὸς δίσκος.

Ὅταν ὁ δίσκος κυλίεται, οἱ ὁριζόντιες ἄκρες τοῦ τετραγώνου εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ δίσκου. Ἂν ὀνομάσουμε τὸ πάνω σημεῖο τῆς ἐφαπτομένης, P, καὶ τὸ κάτω σημεῖο τῆς ἐφαπτομένης, P_0, ἡ διάμετρος PP_0 διαχωρίζει τὸν κύκλο σὲ δύο ἡμικύκλια (Σχ. 30), καὶ τὸ τρίγωνο ποὺ εἶναι μέσα στὸ ἡμικύκλιο πρέπει νὰ εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο.

Ὁ δίσκος στρέφεται γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο P_0, συνεπῶς ἡ ἐφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς σὲ γενικὸ σημεῖο X εἶναι κάθετος ἀνὰ πᾶσα στιγμὴ ἐπὶ τὴν ἀκτίνα περιστροφῆς, καὶ πρέπει νὰ εἶναι ἡ κορυφὴ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐγγεγραμμένου μέσα στὸ ἡμικύκλιο. Συνεπῶς, ἡ χορδὴ XP εἶναι ἐφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς. Ὅταν ὁ δίσκος κάνει μία ὁλόκληρη περιστροφή, βλέπουμε ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων XP εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σάρωμα τῆς καμπύλης. Καὶ ὅταν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση σὲ κάθε ἐφαπτόμενο τμῆμα XP φέρνοντας τὸ σημεῖο P σὲ ἕνα κοινὸ σημεῖο O, τὸ τμῆμα XP μετατοπίζεται σὲ χορδὴ YO τοῦ δίσκου. Συνεπῶς ὁ δίσκος εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα καὶ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν (Σχ. 31).

Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἀποτελοῦν μιὰ μικρὴ ποικιλία ἀπὸ πολλὰ γεωμετρικὰ προβλήματα ποὺ μποροῦν νὰ λυθοῦν μὲ τὴν μέθοδο τοῦ Μάμικον. Ὁ Μάμικον καὶ ἐγὼ θέλουμε νὰ γράψουμε ἕνα βιβλίο ποὺ νὰ ἐξηγεῖ τὴν μέθοδο. Ὅταν ὅμως οἱ εἰκόνες εἶναι ἀκίνητες σὲ ἕνα βιβλίο, δὲν εἶναι ἱκανοποιητικές. Οἱ ἰδέες ἐντυπωσιάζουν πολὺ περισσότερο ὅταν παρουσιάζονται μὲ κινούμενα σχέδια. Ἑπομένως θὰ ἤθελα νὰ κάνω καὶ μία ταινία τηλεόρασης ποὺ νὰ παρουσιάζει αὐτὲς τὶς ἰδέες.

Θὰ τελειώσω μὲ μία μικρὴ παρατήρηση. Ὁ *Newton* καὶ ὁ *Leibniz* θεωροῦνται οἱ θεμελιωτὲς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Οἱ δύο αὐτοὶ συνέθεσαν τὶς ἐργασίες πολλῶν ἄλλων σκαπανέων μαθηματικῶν, καὶ βρήκανε τὴν σχέση τῆς διαφορίσεως μὲ τὴν ὁλοκλήρωση. Ἡ μέθοδος τοῦ Μάμικον ἔχει μερικὰ ἀπὸ τὰ ἴδια συστατικά. Συσχετίζει ἐφαπτόμενα τμήματα σὲ κίνηση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιχῆς ποὺ σαρώνεται μὲ αὐτὰ τὰ τμήματα. Ἔτσι ἡ σχέση τῆς διαφόρισης μὲ τὴν ὁλοκλήρωση εἶναι βαθειὰ ριζωμένη στὴν μέθοδο τοῦ Μάμικον.

SUMMARY

A visual approach to calculus problems
in a style reminiscent of Archimedes

Areas and volumes of many classical regions can be determined by an intuitive geometric method that does not require integral calculus or even equations for the boundaries. The method and its many applications was first announced in 1981 by Mamikon A. Mnatsakanian in a paper that seems to have escaped notice, probably because it appeared in Russian in an Armenian journal with limited circulation. This lecture gives a history and exposition of Mamikon's method, which is based on Mamikon's theorem illustrated in Figure 17 (Σχ. 17). The lower curve on the left of Figure 17 is a more or less arbitrary smooth curve. A set of tangent segments to the lower curve defines a region that is bounded by the lower curve and an upper curve traced out by the other extremity of the tangent segments. This set is called a *tangent sweep* (εφαπτόμενο σάρωμα). It can be visualized dynamically as the region swept out by tangent segments moving along the lower curve. When each point of tangency is brought to a common point as shown on the right of Figure 17, the set of translated segments is called the *tangent cluster* (εφαπτόμενο σύμπλεγμα). Mamikon's theorem states that the area of the tangent cluster is equal to that of its tangent sweep. The theorem also holds for space curves. You can easily convince yourself that it is true by considering corresponding equal tiny triangles translated from the tangent sweep to the tangent cluster.

When the tangent segments have constant length the tangent cluster is a circular sector whose radius is that constant length. In this case, Mamikon's theorem immediately determines the area of oval rings, and the area of a «bicyclix», the region between two curves traced out by the front and rear wheels of a moving bicycle (the tractrix being a special case). The most striking applications are to examples in which the tangent segments have variable length. The lecture reveals how Mamikon's theorem gives a simple method for finding the area of a parabolic segment, the area of a region under a general exponential curve, and the area of the region under one arch of a cycloid, without using equations for the curves or any of the formal machinery of traditional calculus.

PROOF OF MAMIKON'S THEOREM

Mamikon Mnatsakanian's theorem was proved in [1], but to make the proof more accessible, we present another version here. Start with a space curve Γ described by a position vector $\mathbf{X}(s)$, where s, the arc length function for the curve, varies over an interval $0 \leq a \leq s \leq b$. The unit tangent vector to Γ is the derivative $d\mathbf{X}/ds$, which we denote by $\mathbf{T}(s)$. The derivative of the unit tangent is given by

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \varkappa(s)(\mathbf{N}s),$$

where $\mathbf{N}(s)$ is the unit principal normal to Γ and $\varkappa(s)$ is the curvature.

Curve Γ generates a tangent developable surface S that can be represented by the vector parametric equation

$$\mathbf{y}(s,\,)u = \mathbf{X}(s) + u\mathbf{T}(s),$$

where u varies over an interval whose length can vary with s, say $0 \leq u \leq f(s)$. The surface S is swept out as the pair of parameters $(u,\, s)$ varies over the ordinate set of the function f over the interval $[a.\ b]$. Geometrically, surface S is a developable surface swept out by tangent segmsnts extending from the initial curve Γ to another curve described by the position vector $\mathbf{y}(s,\, f(\mathrm{s}))$. We refer to S as a *tangent sweep*. The area of S is given by the double integral

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial y}{\partial s} \times \frac{\partial y}{\partial u} \right\| du\ ds.$$

To calculate the integrand, note that

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} + u\,\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{T}(s) + u\varkappa(s)\,\mathbf{N}(s),$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} = \mathbf{T}(s),\ \frac{\partial y}{\partial s} \times \frac{\partial y}{\partial u} = u\varkappa(s)\,\mathbf{N}(s) \times T(s),$$

hence

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} \right\| = u\varkappa(s)\,, \qquad \text{since } \|\mathbf{N} \times \mathbf{T}\| = 1.$$

Therefore the integral for the area becomes

$$a(S) = \int_a^b \left(\int_0^{f(s)} u \; du \right) \varkappa(s) \; ds = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(s)\varkappa(s) ds.$$

Next, imagine the arc length s expressed as a function of the angle φ between the tangent vector $\mathbf{T}$ and a fixed tangent line, say the tangent line corresponding to $s = a$. When s is expressed in terms of φ, the function $f(s)$ becomes a function of φ, and we write $f(s) = \mathrm{r}(\varphi)$. We measure φ so it increases as a function of arc length. On the surface, φ is the angle between tangent geodesics, so (by a well known theorem of differential geometry) the curvature $\varkappa(s)$ is the rate of change of φ with respect to arc length, $\varkappa(s) = d\varphi / ds$. Tn the last integral we make a change of variable expressing s as a function of the angle φ. Then $f^2(s) = r^2(\varphi)$, and $\varkappa(s)ds = d\varphi$, so the integral becomes

$$a(\mathrm{S}) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi\,, \tag{2}$$

where φ_1 and φ_2 are the initial and final angles of inclination corresponding to $s = a$ and $s = b$, respectively. Formula (2) shows tha the area $a(S)$ does not depend explicitly on the arc length of Γ but only on the angles φ_1 and φ_2. In fact $a(S)$ is equal to the area of a plane radial set with polar coordinates (r, φ) satisfying $0 \le r \le r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

When (2) is reformulated in geometric terminology it yields Mamikon's theorem in a form that has a strong intuitive flavor. If we translate each tangent segment of length $r(\varphi)$ parallel to itself so that each point of tangency is brought to a common vertex O, we obtain a portion of a conical surface that we call the *tangent cluster* of region S.

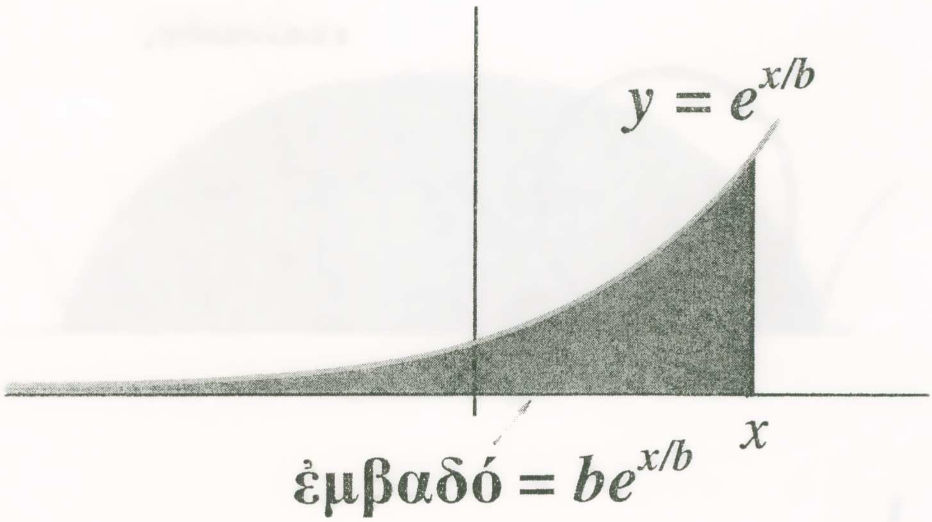
Equation (2) gives us:

MAMIKON'S THEOREM. *The area of a tangent sweep is equal to the area of its tangent cluster.*

The proof for special regions of the type described above follows from (2). The tangent cluster of S lies on a conical surface; this can be unrolled without distortion of area and the unrolled tangent cluster becomes a plane region whose area in polar coordinates is given by (2). Since this is also the area of S, the tangent sweep and its tangent cluster have equal areas. The theorem is also true for more general regions that can be decomposed into a sum or difference of a finite number of special surfaces of the type described above. Applications of the theorem are given in [2], [3] and [4].

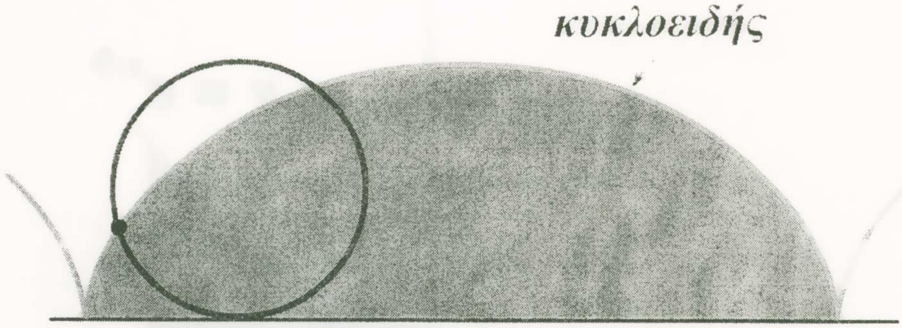
REFERENCES

1. Mamikon A. Mnatsakanian, «On the Area of a Region on a Developable Surface», (Russian), *Doklady of the Armenian Academy of Sciences*, (1981) Vol. 73, No. 2, pp. 97-101. Communicated by Academician V. A. Ambartsumian.
2. Tom M. Apostol, «A Visual Approach to Calculus Problems». *Engineering and Science*, Vol. LXIII, No. 3, 2000, p. 22-31. (An online version of this article can be found on the web site http://www.its.caltech.edu/~mamikon/calculus.html, which also contains animations displaying the method and its applications).
3. Mamikon Mnatsakanian, «Annular Rings of Equal Area». *Math Horizons*, Nov. 1997, p. 5-8.
4. Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, «Surprising Geometric Properties of Exponential Functions». *Math Horizons*, Sept. 1988, p. 27-29.

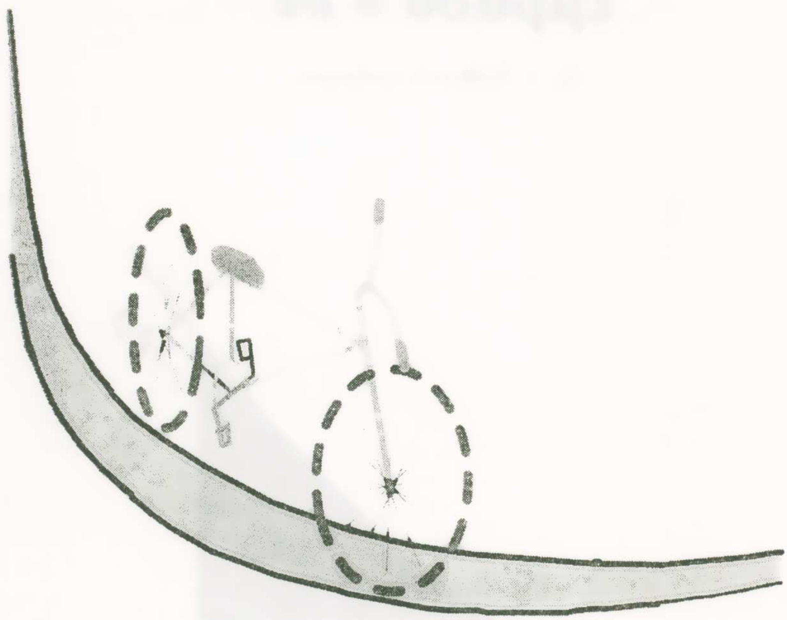


Σχ. 1. Ἐκθετικὴ συνάρτηση

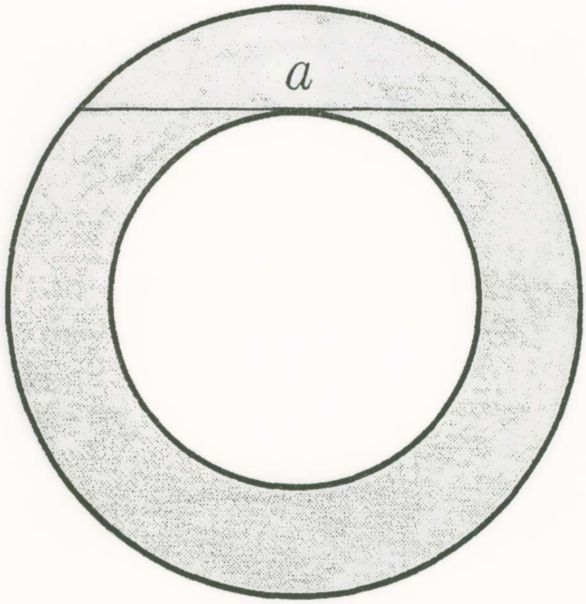
Σχ. 2. Παραβολικὸ τμῆμα



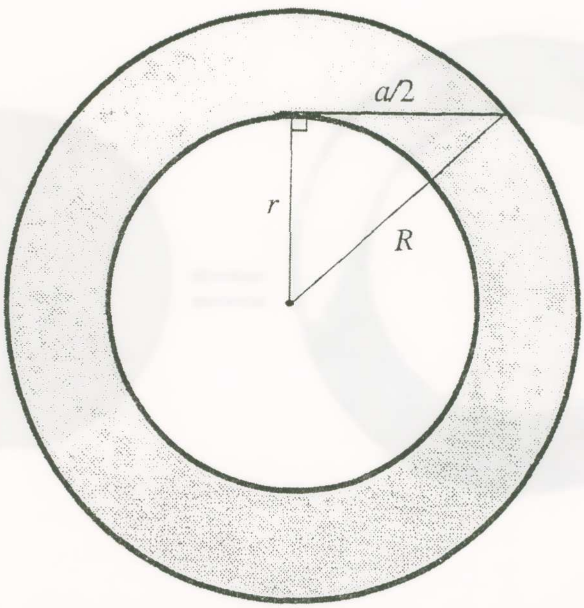
Σχ. 3. Κυκλοειδής



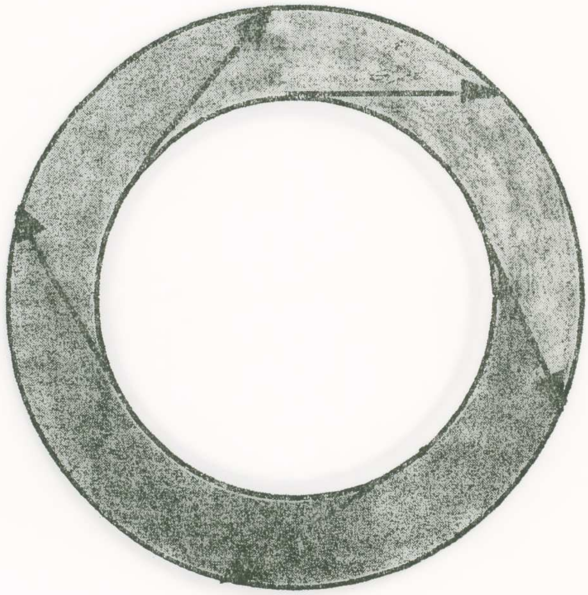
Σχ. 4 Ποδήλατο σὲ κίνηση



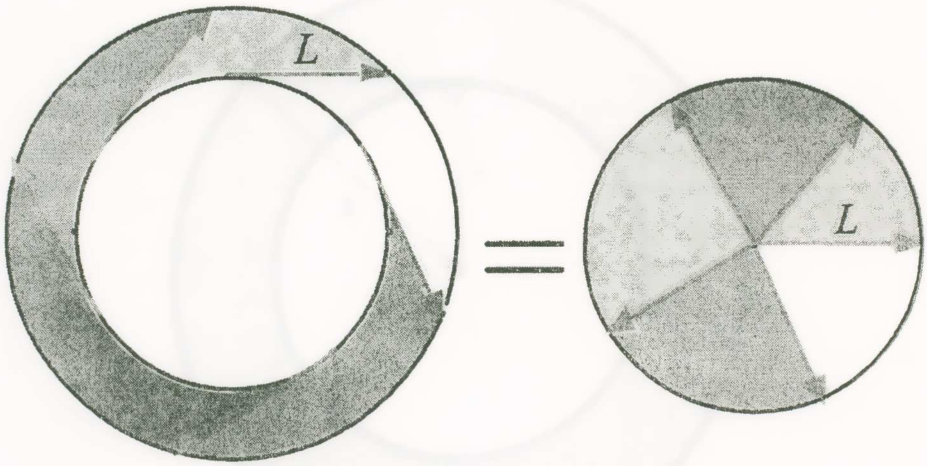
Σχ. 5 Κυκλικὸς δακτύλιος



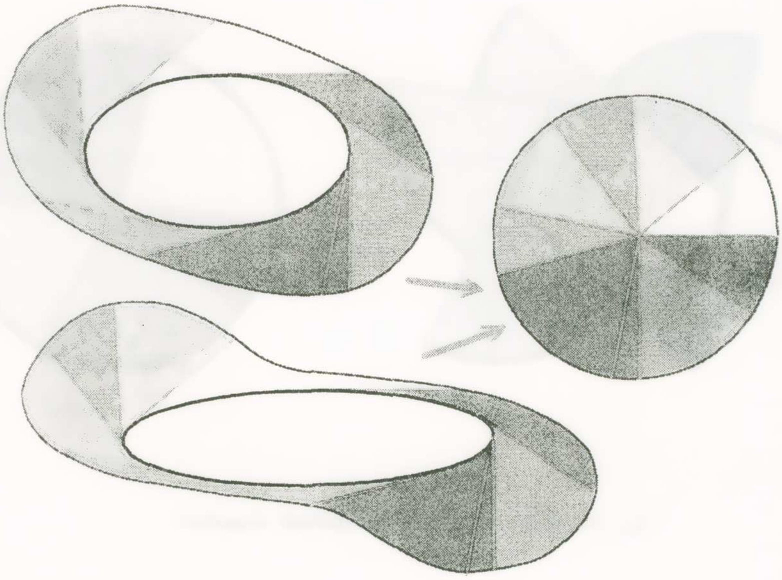
Σχ. 6 Ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου



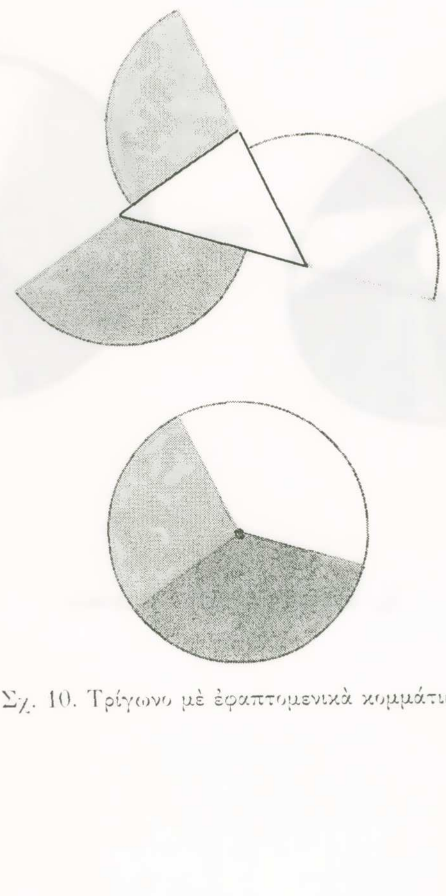
Σχ. 7. Ἐφαπτομενικὰ διανύσματα



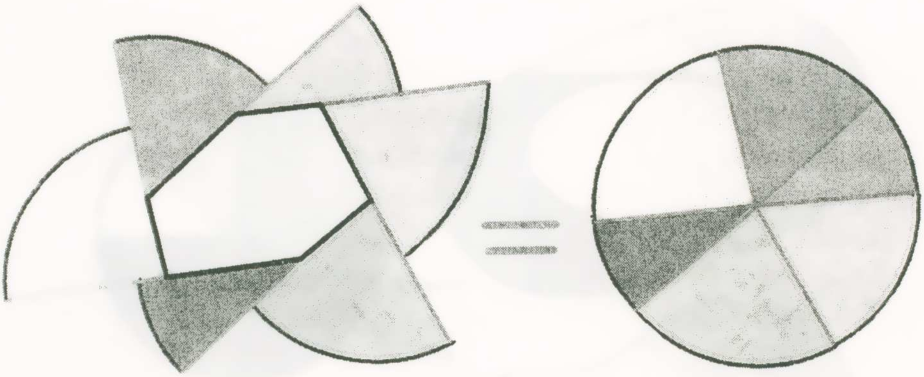
Σχ. 8. Παράλληλη μετατόπιση κάθε ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος



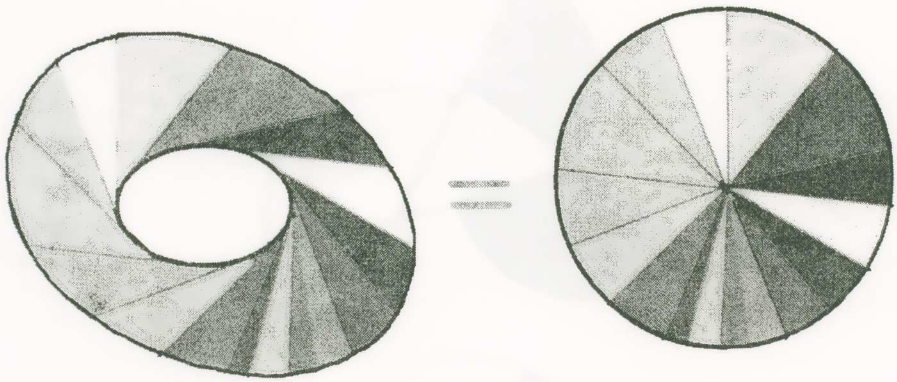
Σχ. 9. Δυὸ ὠοειδεῖς δακτύλιοι



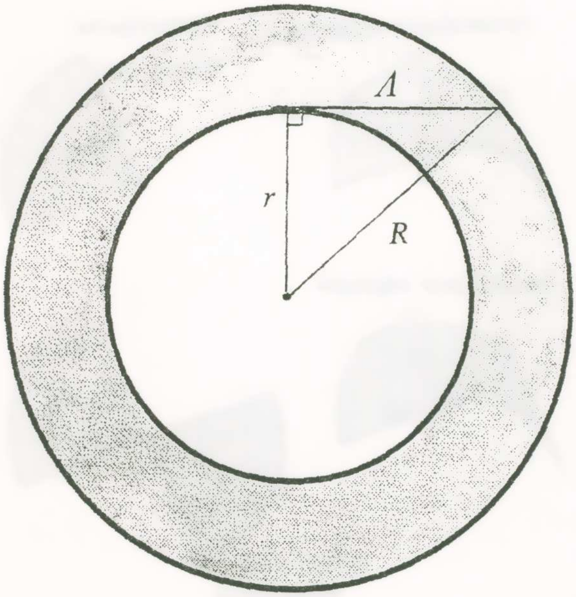
Σχ. 10. Τρίγωνο μὲ ἐφαπτομενικὰ κομμάτια



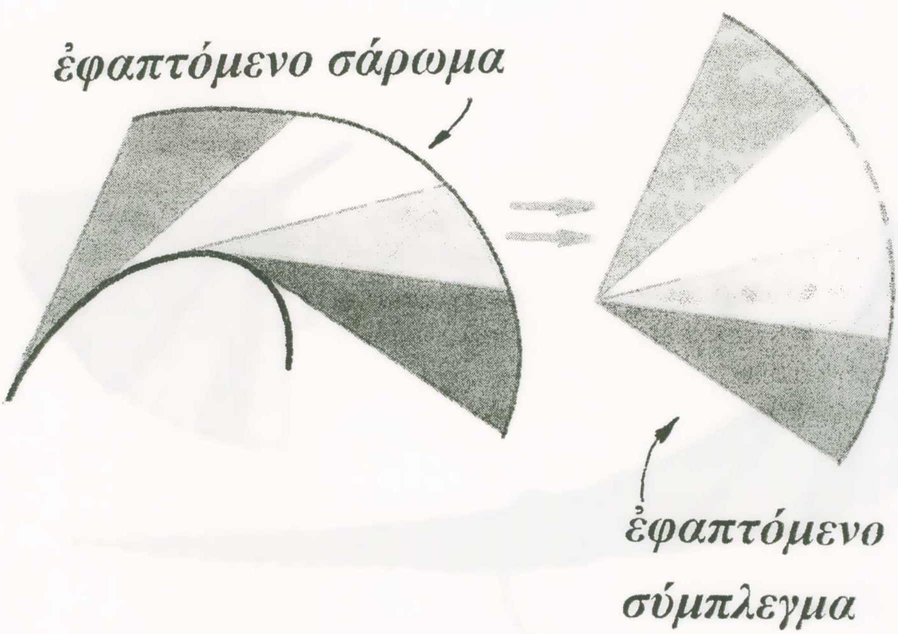
Σχ. 11. Πολύγωνο μὲ ἐφαπτομενικὰ κομμάτια



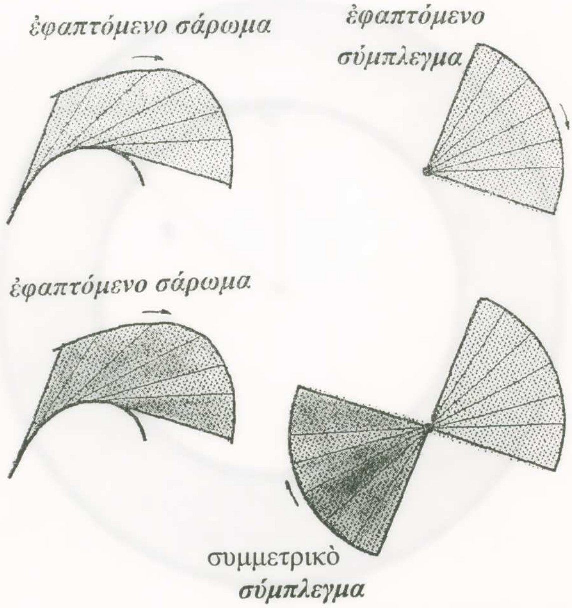
Σχ. 12. Ὅριο κυρτῶν πολυγώνων



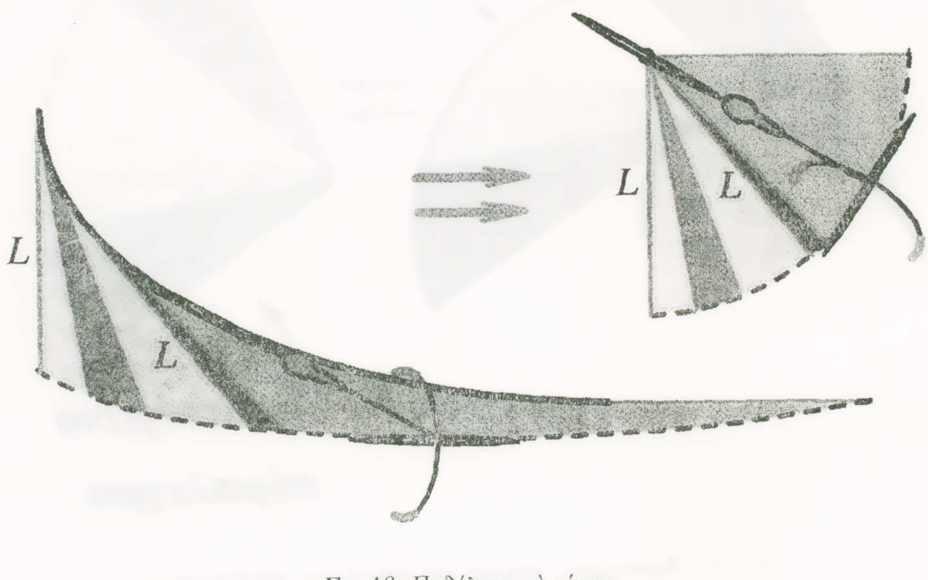
Σχ. 13. Νέα ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρα



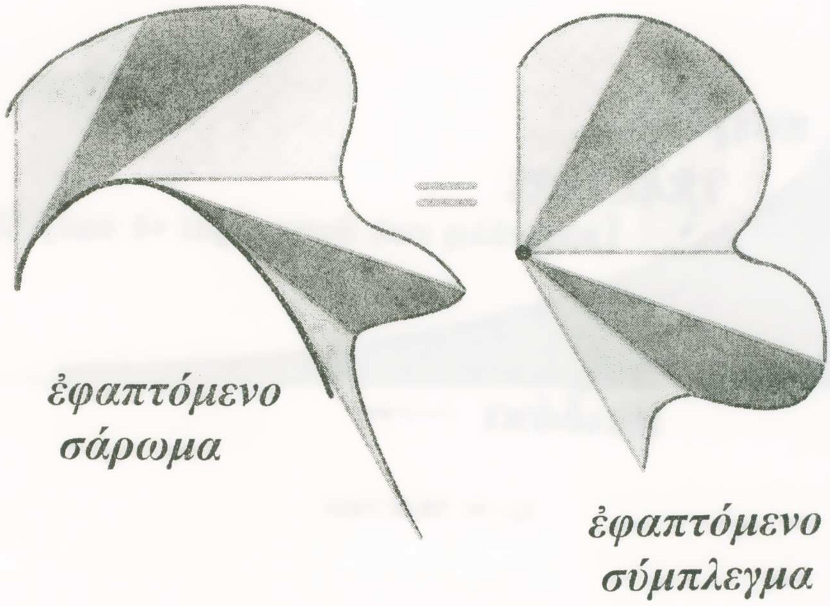
Σχ. 14. Ἐφαπτόμενο σάρωμα καὶ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα



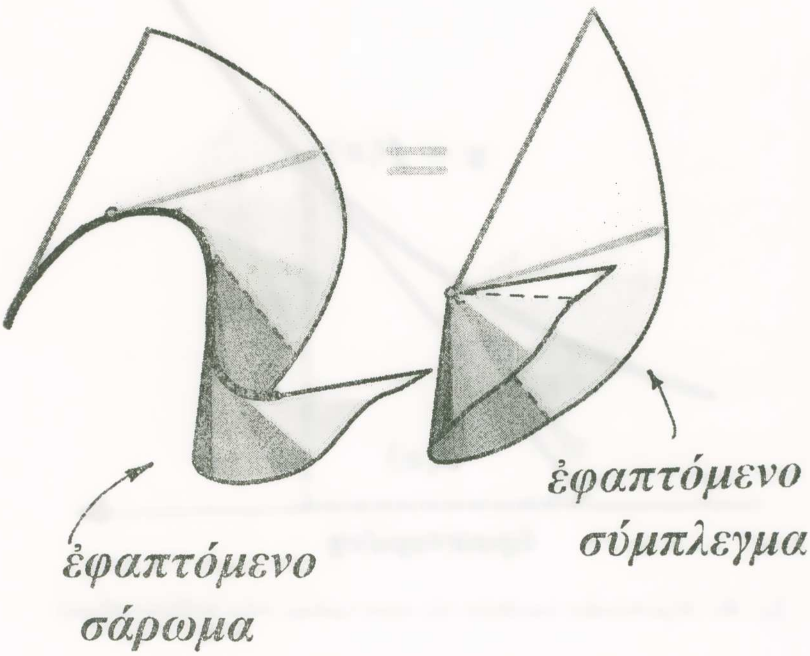
Σχ. 15. Συμμετρικὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα



Σχ. 16. Ποδήλατο σὲ κίνηση

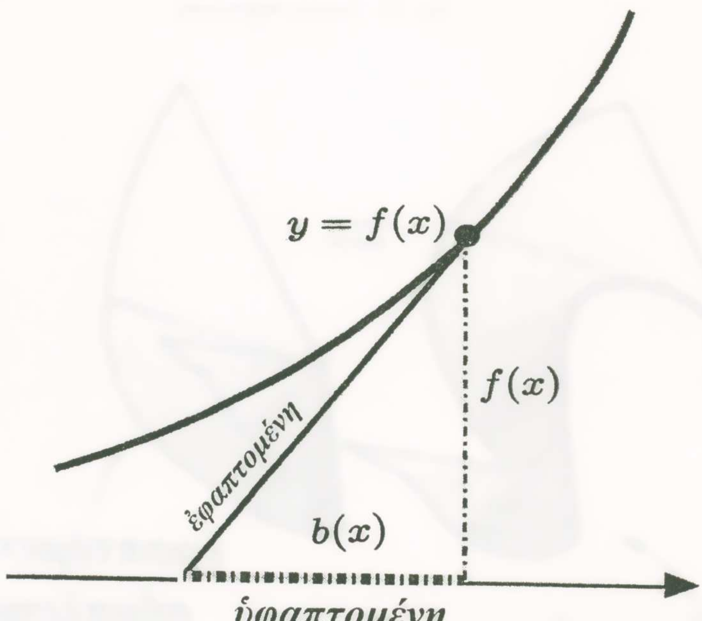


Σχ. 17. Γενικὴ περίπτωση

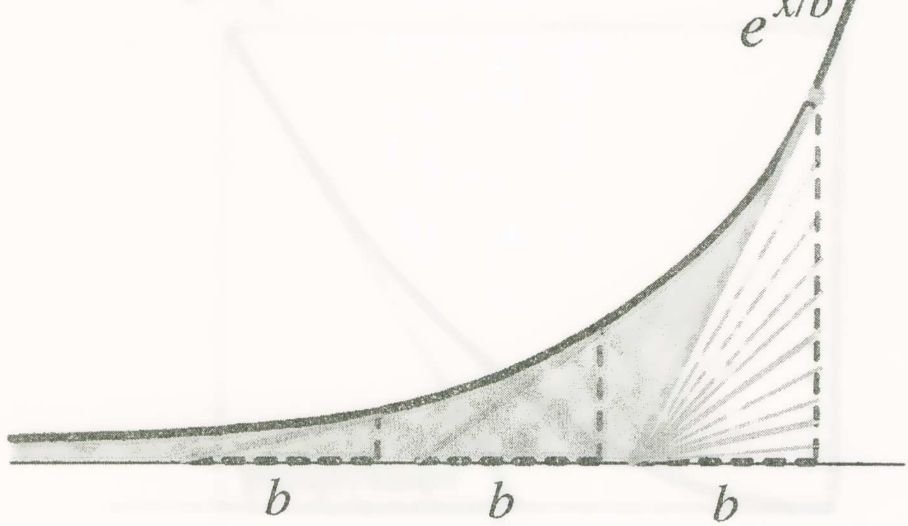


Σχ. 18. Πιὸ γενικὴ περίπτωση (στὸ χῶρο)

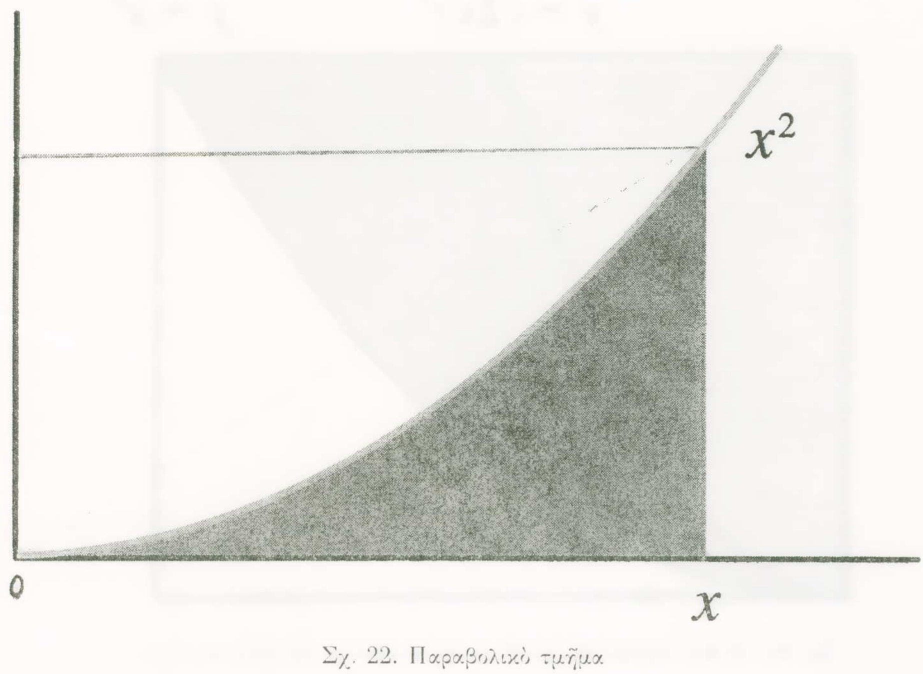
Σχ. 19. TRACTRIX



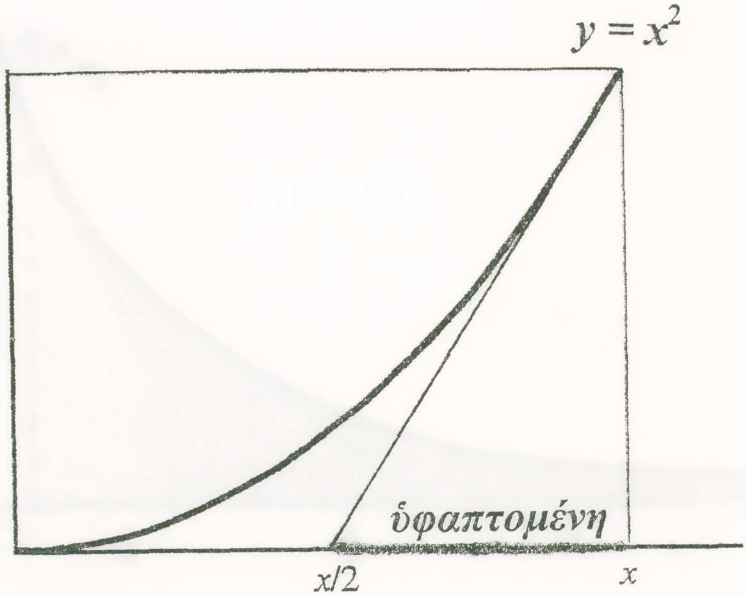
Σχ. 20. Ἐφαπτομένη (προβολὴ τῆς ἐφαπτομένης στὸν ὁριζόντιο ἄξονα)



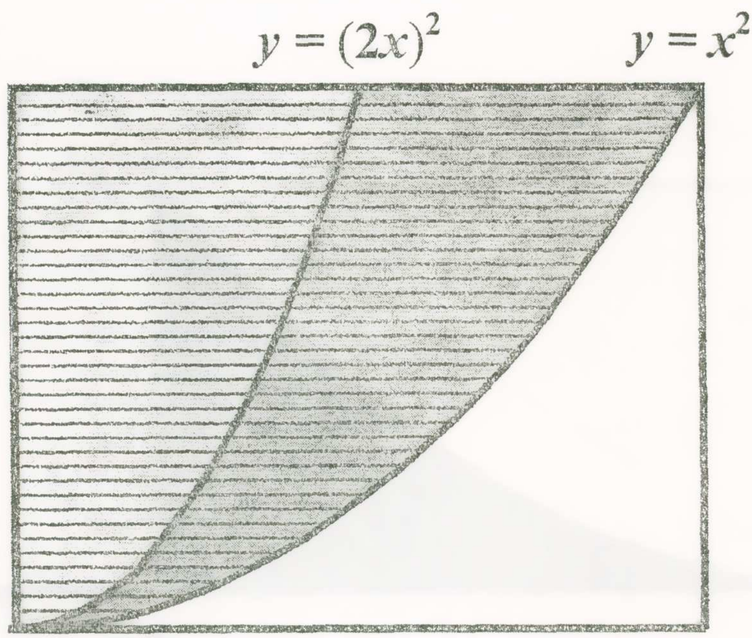
Σχ. 21. Ἡ ὑφαπτομένη ἔχει σταθερὸ μῆκος b.
Τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα εἶναι τρίγωνο μὲ βάση b καὶ ὕψος ex/b



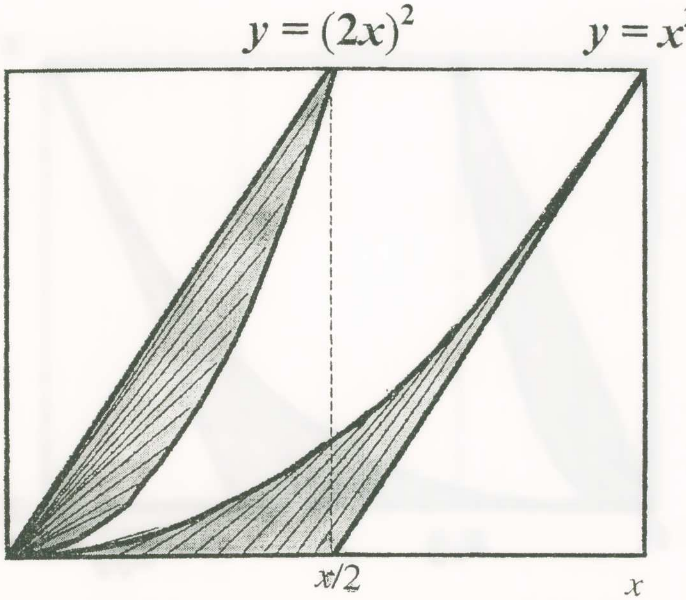
Σχ. 22. Παραβολικὸ τμῆμα



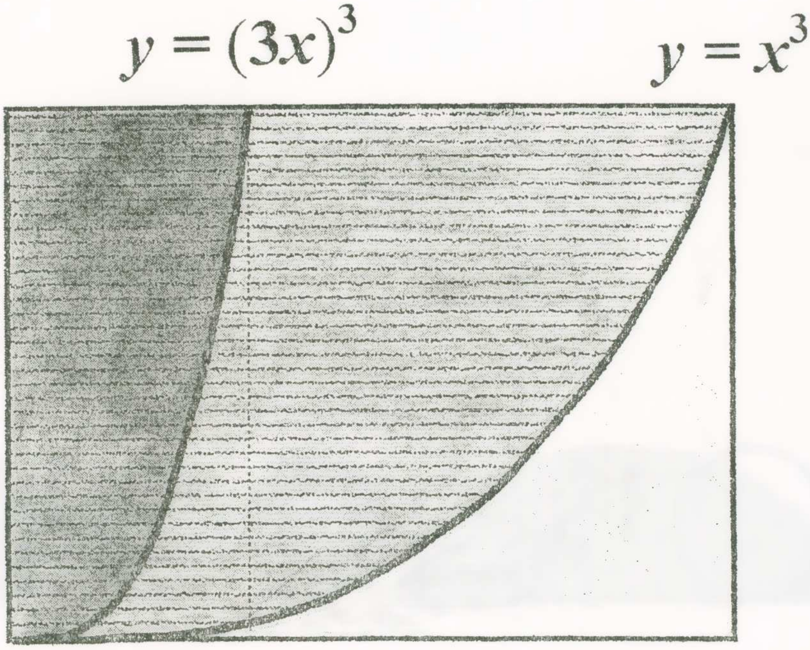
Σχ. 23. Ἡ ὑφαπτομένη γραμμὴ ἔχει μῆκος x/2



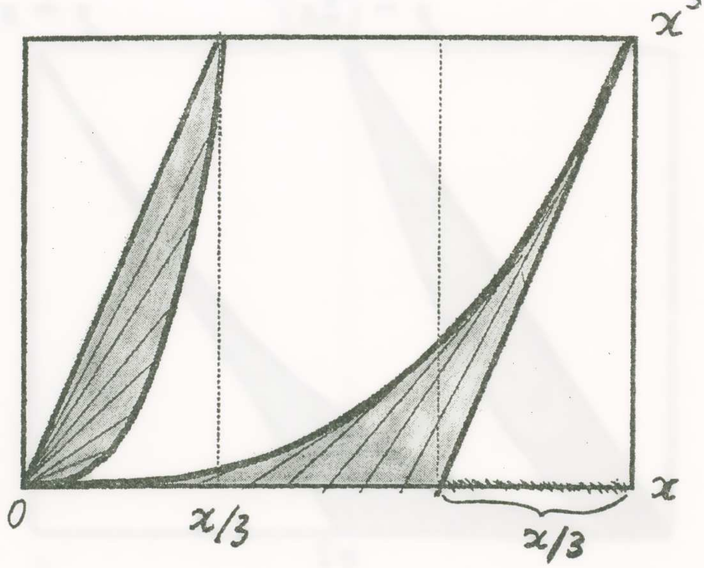
Σχ. 24. Οἱ δυὸ παραβολὲς χωρίζουν τὸ τετράγωνο σὲ τρεῖς περιοχὲς



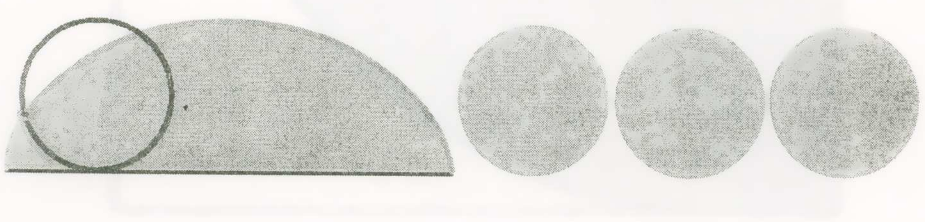
Σχ. 25. Οἱ δυὸ σκιασμένες περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν



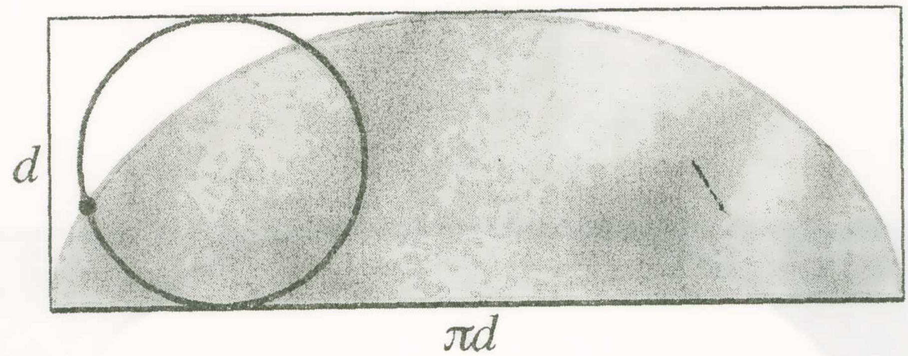
Σχ. 26. Ἡ πάνω καμπύλη εἶναι τριχοτόμος



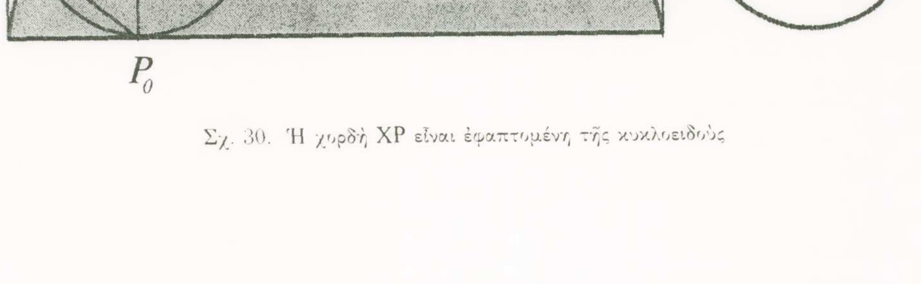
Σχ. 27. Οἱ δυὸ σκιασμένες περιοχὲς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν



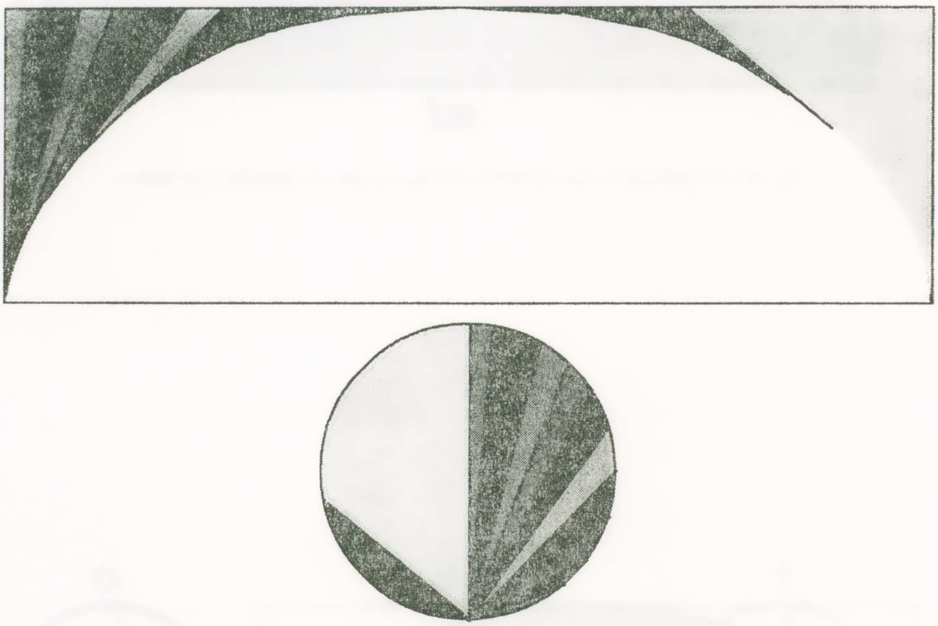
Σχ. 28. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς εἶναι τρεῖς φορὲς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλιόμενου δίσκου



Σχ. 29. Τὸ ὀρθογώνιο ἔχει ἐμβαδὸν τέσσερις φορὲς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δίσκου



Σχ. 30. Ἡ χορδὴ ΧΡ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς



Σχ. 31. Ὁ δίσκος εἶναι τὸ ἐφαπτόμενο σύμπλεγμα