ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur une axiomatique des treillis distributifs,** *par Jeanne Ferentinou - Nicolacopoulou* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλ. Βασιλείου.

La question de l'axiomatique des treillis a intéressé, comme c'est bien connu, beaucoup de mathématiciens, qui en ont donné des définitions différentes mais équivalentes. Les problèmes 64, 65, 66 qui avaient été posés par G. Birkhoff dans son livre [1], ont été le point de départ d'un nouvel effort pour restreindre le nombre des axiomes des treillis distributifs, et en particulier des treillis avec uniquement O ou uniquement I, ou bien avec O et I.

La première publication sur ce sujet, après l'apparition du livre de Birkhoff, a été faite en 1950 par Ph. Vassiliou [6], membre de l'Académie d'Athènes. D'autres publications ont suivi en 1951 par R. Croisot [2] et M. Sholander [4] et dans les années suivantes par S. Rudeanu [3] et B. Sobocinski [5].

Dans la présente note nous procédons à une introduction axiomatique des treillis distributifs avec O, et aussi des treillis distributifs avec I, en utilisant seulement deux axiomes.

Théorème 1. *Soit A un ensemble non-vide muni de deux lois de composition internes, qu'on note $\cup$ et $\cap$. Pour que A soit un treillis distributif avec O, il faut et il suffit que pour trois éléments quelconques a, b, c de A et pour quelque élément O de A, les deux égalités suivantes soient vérifiées :*

$$a = a \cap (a \cup b) \tag{1}$$

$$a \cap (b \cup c) = [c \cap (a \cup O)] \cup [b \cap (a \cup O)]. \tag{2}$$

D é m o n s t r a t i o n

I) Condition nécessaire : elle est évidente.

II) Condition suffisante : On suppose qu'il existe un élément fixe (qu'on note O), tel que (1) et (2) soient vérifiées.

* ΙΩΑΝΝΑΣ ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΥ - ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ, **Ἐπὶ ἀξιωματικῆς τινος ἐπιμεριστικῶν δικτυωτῶν.**

Pour $a = b = c$ on a suivant (2) :

$$a \cap (a \cup a) = [a \cap (a \cup O)] \cup [a \cap (a \cup O)].$$

Mais d'après (1) cette égalité s'écrit

$$a = a \cup a. \tag{3}$$

Donc la loi $\cup$ satisfait l'idempotence.

Pour $b = c$ en utilisant les (2) et (3) on obtient

$$a \cap b = b \cap (a \cup O)\ ; \tag{4}$$

donc l'égalité (2) s'écrit

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap c) \cup (a \cap b). \tag{5}$$

Pour $b = a$, d'après (1) et (3), on a

$$a \cap a = a. \tag{6}$$

Donc l'idempotence est aussi satisfaite par la loi $\cap$.

En utilisant les (1), (5) et (6), on obtient

$$a = a \cap (a \cup b) = (a \cap b) \cup (a \cap a) = (a \cap b) \cup a\ ,$$

c'est-à-dire

$$(a \cap b) \cup a = a\ . \tag{7}$$

En utilisant maintenant successivement les (4), (5), (1) et (7), on obtient

$$(a \cup b) \cap a = a \cap [(a \cup b) \cup O] = (a \cap O) \cup [a \cap (a \cup b)] = (a \cap O) \cup a = a.$$

Donc on la

$$(a \cup b) \cap a = a\ . \tag{8}$$

En utilisant les (6), (7), (8) on trouve

$$a \cup (a \cap b) = \Big[\Big((a \cap b) \cup a\Big) \cap a\Big] \cup \Big[\Big((a \cap b) \cup a\Big) \cap (a \cap b)\Big]$$

et, d'après (5), on obtient

$$a \cup (a \cap b) = [(a \cap b) \cup a] \cap [(a \cap b) \cup a]\ .$$

Par conséquent, en utilisant les (6) et (7), on a

$$a \cup (a \cap b) = a \tag{9}$$

et, d'après les (5), (6) et (9),

$$a \cap (b \cup a) = a\ . \tag{10}$$

Maintenant, en se servant successivement des (4), (5), (10), (7), on obtient

$$(b \cup a) \cap a = a \cap [(b \cup a) \cup O] = (a \cap O) \cup [a \cap (b \cup a)] = (a \cap O) \cup a = a,$$

c'est-à-dire

$$(b \cup a) \cap a = a. \tag{11}$$

Des propriétés démontrées résulte la commutativité pour la loi $\cup$ car, en utilisant les (8) et (11), on obtient

$$a \cup b = [(b \cup a) \cap a] \cup [b \cup a) \cap b]$$

et par conséquent, d'après les (5) et (6),

$$a \cup b = (b \cup a) \cap (b \cup a) = b \cup a.$$

Donc

$$a \cup b = b \cup a. \tag{12}$$

Nous montrerons maintenant que l'élément O de l'ensemble A vérifie les propriétés

$$O \cap a = a \cap O = O, \tag{13}$$

$$O \cup a = a \cup O = a, \tag{14}$$

pour chaque $a \in A$.

Pour la démonstration de (13) on utilise successivement les propriétés (4), (3), (4), (10) ; de cette façon on obtient

$$O \cap a = a \cap (O \cup O) = a \cap O = O \cap (a \cup O) = O.$$

Donc

$$O \cap a = a \cap O = O.$$

Pour la démonstration de (14) on utilise successivement les propriétés (12), (13), (9) et on obtient

$$O \cup a = a \cup O = a \cup (a \cap O) = a.$$

Donc

$$O \cup a = a \cup O = a.$$

La commutativité de la loi $\cap$ est évidente d'après les propriétés (4) et (14) ; ainsi l'on a

$$a \cap b = b \cap a. \tag{15}$$

Les propriétés déjà démontrées suffisent [Garrett Birkhoff «Lattice theory», pag. 136 - 137] pour prouver l'associativité de $\cup$ et $\cap$ et aussi la distributivité de la loi $\cup$ par rapport à la loi $\cap$.

En effet, d'après la méthode suivi dans le livre cité, en utilisant successivement les propriétés (5), (1), (7), (5), (10), (7), (10), on trouve

$$a \cap [(a \cup b) \cup c] = a, \quad b \cap [(a \cup b) \cup c] = b, \quad c \cap [(a \cup b) \cup c] = c. \tag{16}$$

Donc, si on remplace a, b, c par leurs égaux dans $a \cup (b \cup c)$, et si on utilise les proprietés (5), (12) et (15), on obtient

$$a \cup (b \cup c) = [(a \cup b) \cup c] \cap [a \cup (b \cup c)].$$

De même, si on utilise les formules

$$b \cap [(b \cup c) \cup a] = b, \quad c \cap [(b \cup c) \cup a] = c, \quad a \cap [(b \cup c) \cup a] = a, \tag{16'}$$

qu'on obtient en permutant circulairement a, b, c dans (16), et si on remplace a, b, c par leurs égaux dans $(a \cup b) \cup c$, on trouve

$$(a \cup b) \cup c = [a \cup (b \cup c)] \cap [(a \cup b) \cup c].$$

Donc :

$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c, \tag{17}$$

c'est-à-dire, l'associativité est satisfaite par la loi $\cup$.

De la propriété (17) et des propriétés précédentes il résulte maintenant

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = [a \cap (a \cup c)] \cup [b \cap (a \cup c)] = a \cup [b \cap (a \cup c)] =$$
$$= a \cup [(b \cap a) \cup (b \cap c)] = [a \cup (b \cap a)] \cup (b \cap c) = a \cup (b \cap c).$$

Donc

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c), \tag{18}$$

c'est-à-dire la loi $\cup$ est distributive par rapport à la loi $\cap$.

L'associativité de la loi $\cap$ résulte à présent en vertu de la dualité. Donc l'ensemble A est bien un treillis distributif avec O.

Théorème 2. *Soit A un ensemble non-vide, muni des deux lois de composition internes, qu'on note $\cup$ et $\cap$. Pour que A soit un treillis distributif avec I, il faut et il suffit que pour trois éléments quelconques a, b, c de A et pour quelque élément I de A, les deux égalités suivantes soient vérifiées :*

$$a = a \cup (a \cap b)$$
$$a \cup (b \cap c) = [c \cup (a \cap I)] \cap [b \cup (a \cap I)].$$

La démonstration du théorème 2 résulte de la loi de dualité.

BIBLIOGRAPHIE

1. BIRKHOFF, G.: Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. 25 (1948).
2. CROISOT, R.: Axiomatique des lattices distributives, Canadian J. Math. vol. 3, pag. 24-27 (1951).
3. RUDEANU, S.: Independent systems of axioms in lattice theory. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumaine, vol. 3 (51), pag. 475-488 (1959).
4. SHOLANDER, M.: Postulates for distributives lattices, Canadian J. Math. vol. 3, pag. 28-30 (1951).
5. SOBOCINSKI, B.: Six new sets of independent axioms for distributive lattices with O and I, Notre Dame J. Formal Logic, vol. 3, pag. 187-192 (1962).
6. VASSILIOU, PH.: A set of postulates for distributive lattices, Publ. Nat. Tech. Univ. Athens N° 5, pag. 1-3 (1950).

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ ἀξιωματικὴ θεμελίωσις τῶν ἐπιμεριστικῶν δικτυωτῶν μὲ O, καθὼς καὶ τῶν ἐπιμεριστικῶν δικτυωτῶν μὲ I, γίνεται διὰ δύο μόνον ἀξιωμάτων. Ἀποδεικνύεται ἡ ἰσχὺς τῶν ἑξῆς θεωρημάτων:

Θεώρημα 1. *Ἵνα ἓν μὴ κενὸν σύνολον A, ἐφωδιασμένον μὲ δύο διμελεῖς πράξεις $\cup$ καὶ $\cap$, εἶναι ἐπιμεριστικὸν δικτυωτὸν μὲ O, πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ τυχόντα στοιχεῖα a, b, c αὐτοῦ καὶ διὰ κάποιον ὡρισμένον (τοὐλάχιστον ἕν) στοιχεῖον τοῦ συνόλου A, νὰ εἶναι:*

$$a = a \cap (a \cup b)$$
$$a \cap (b \cup c) = [c \cap (a \cup O)] \cup [b \cap (a \cup O)].$$

Θεώρημα 2. *Ἵνα ἓν μὴ κενὸν σύνολον A, ἐφωδιασμένον μὲ δύο διμελεῖς πράξεις $\cup$ καὶ $\cap$, εἶναι ἐπιμεριστικὸν δικτυωτὸν μὲ I, πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ τυχόντα στοιχεῖα a, b, c αὐτοῦ καὶ διὰ κάποιον ὡρισμένον (τοὐλάχιστον ἕν) στοιχεῖον I τοῦ συνόλου A, νὰ εἶναι:*

$$a = a \cup (a \cap b)$$
$$a \cup (b \cap c) = [c \cup (a \cap I)] \cap [b \cup (a \cap I)].$$

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φίλ. Βασιλείου** κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας εἶπε τὰ ἑξῆς :

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀξιωματικῆς τῶν ἐπιμεριστικῶν δικτυωτῶν ἀπησχόλησεν, ὡς γνωστόν, πολλοὺς μαθηματικούς, διάφορα δὲ ἰσοδύναμα συστήματα ἀξιωμάτων, διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται τὰ ἐπιμεριστικὰ δικτυωτά, ἔχουν κατὰ καιροὺς εὑρεθῆ. Οἱ μαθηματικοὶ G. Birkhoff καὶ S. A. Kiss πρῶτοι ἀπέδειξαν, ὅτι ἂν θεωρήσῃ τις τὸν γνωστὸν τριμελῆ «τελεστὴν Boole» ὡς πρᾶξιν δικτυωτοῦ, τότε ἐπιμεριστικὸν δικτυωτόν, ἔχον *μέγιστον* καὶ *ἐλάχιστον* στοιχεῖον, δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῇ βάσει καὶ μόνον τῆς ἐν λόγῳ πράξεως. Ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸ περίφημον σύγγραμμα αὐτοῦ Lattice Theory — ἐκδοθὲν τὸ πρῶτον τὸ 1948 — ὁ G. Birkhoff ἐπρότεινε πρὸς λύσιν, ὡς πρόβλημα ὑπ' ἀριθμ. 64, τὸν περιορισμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ S. A. Kiss δοθέντων ἀξιωμάτων, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ ἐπετεύχθη πράγματι ὑπὸ τοῦ ὁμιλοῦντος τὸ 1950. Πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν εἰργάσθησαν περαιτέρω πλεῖστοι μαθηματικοί, ἐπὶ τῶν ὁποίων καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἀνεφέρθημεν.

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως εἶναι ὁ ὑπὸ τὸ ὡς ἄνω πνεῦμα περιορισμὸς εἰς δύο τῶν ἀξιωμάτων διὰ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ὁρισθῇ κατηγορία τις ἐπιμεριστικῶν δικτυωτῶν, ἐκείνων δηλ. μὲ *ἐλάχιστον* ἢ μὲ *μέγιστον* στοιχεῖον, ἄνευ ὅμως τῆς χρήσεως τοῦ ὡς ἄνω μνημονευομένου τριμελοῦς τελεστοῦ Boole.