ΠΑΝΗΓΥΡΙΚΗ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 29ΗΣ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε τῆς Ἑλληνικῆς Δημοκρατίας,

Κατὰ τὴν πανηγυρικὴ αὐτὴ Συνεδρία τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ὁ Πρόεδρος σύμφωνα μὲ τὸν Ὀργανισμὸ τῆς Ἀκαδημίας ἐκφωνεῖ λόγο ὅπου ἀνακοινώνει τὰ ἔργα καὶ τὰ γεγονότα ἐν γένει, τοῦ λήγοντος ἔτους ἢ πραγματεύεται, εὐλήπτως γιὰ ὅλους, θέμα τῆς εἰδικότητάς του.

Τὴν τακτικὴ τῆς διαπραγματεύσεως θέματος τῆς εἰδικότητός του ἀκολουθεῖ σήμερα ὁ ὁμιλῶν, ἐπιφυλασσόμενος, κατὰ τὴν τελετὴ τῆς παραδόσεως τῆς προεδρίας, νὰ προβεῖ στὴν ἐπισήμανση ὡρισμένων μόνο πτυχῶν τοῦ ἔργου καὶ τῶν ἐν γένει δραστηριοτήτων τῆς Ἀκαδημίας κατὰ τὸ διαρρεῦσαν ἔτος.

* * *

Ἡ ἱστορία καὶ ἡ φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν δὲν κατέχουν κεντρικὴ θέση στὸ ἔργο τῶν περισσότερων μαθηματικῶν, εἴτε αὐτοὶ εἶναι διδάσκοντες εἴτε ἐρευνητές. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ εἶχε ὡς συνέπεια τὴν δημιουργία στοὺς περισσότερους ἀπὸ ἐμᾶς, μιᾶς ἐλλιποῦς καὶ δογματικῆς εἰκόνας περὶ τὰ θέματα αὐτά, κάτι ποὺ ἐπηρεάζει τὸ ἔργο ὅλων μας καὶ ἀποδεικνύει τὴν ὀρθότητα τῶν ὅσων ὑπεστήριζε ὁ Henri Poincaré ὅτι: «Ἐὰν θέλομε νὰ προβλέψομε τὸ μέλλον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ὀφείλομε νὰ μελετήσομε τὴν ἱστορία της καὶ τὴν παροῦσα κατάσταση στὴν ὁποίαν αὐτὴ εὑρίσκεται». Στὰ τελευταῖα αὐτὰ λόγια θὰ μπορούσαμε ἴσως νὰ προσθέσομε ὅτι ἡ βαθύτερη μελέτη τῆς ἱστορίας καὶ τῆς φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν εἶναι σημαντικὴ αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν διότι συμβάλλει, ἂν μή τι ἄλλο, στὴν οὐσιαστικὴ βελτίωση τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν. Ἂς ἀναφερθοῦμε ὅμως στὰ ἀνωτέρω θέματα κάπως ἀναλυτικότερα.

Ἱ σ τ ο ρ ί α

Ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἡ ἱστορία ποὺ μᾶς πληροφορεῖ ποιὲς ἦταν οἱ ἰδέες ποὺ ἐμφανίσθηκαν, ποιὰ ἦταν τὰ θεωρήματα ποὺ ἀποδείχθηκαν καὶ πότε. Μπορεῖ αὐτὴ νὰ σχετίζεται ἐνίοτε καὶ μὲ θέματα διαφορετικῆς φύσεως, ὅμως τὸ κύριο ἔργο της εἶναι νὰ παρουσιάσει τὸ πῶς ἀναπτύχθηκε ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν, πῶς οἱ ἰδέες συνδέθηκαν μεταξύ τους καὶ ἔδωσαν γένεση σὲ νέες ἰδέες. Ἂν λάβομε ὑπόψη τὶς τελευταῖες αὐτὲς ἀπόψεις, ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι οἱ λόγοι γιὰ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ μελετοῦμε τὴν ἱστορία τῶν μαθηματικῶν εἶναι (1) γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε βαθύτερα καὶ νὰ ἐκτιμήσομε σωστὰ τὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα ἔχομε ἤδη γνωρίσει, καὶ (2) γιὰ νὰ συνειδητοποιήσομε ὅτι ὅσο ὄμορφα καὶ γενικοῦ χαρακτῆρος καὶ ἂν εἶναι τὰ μέχρι σήμερα κτηθέντα ἀποτελέσματα, εἶναι δυνατὸν αὐτὰ νὰ προωθηθοῦν καὶ νὰ βελτιωθοῦν ἀκόμα περισσότερο. Δὲν ἀποκλείεται νὰ φθάσει ἐκείνη ἡ ἡμέρα ποὺ ἡ θεωρία τῶν γραμμικῶν τελεστῶν ἐπὶ ἑνὸς χώρου τοῦ Hilbert θὰ εἶναι ἕνα θέμα πολὺ συνηθισμένο, ἡ θεωρία ὅμως αὐτὴ δὲν θὰ παύσει νὰ διατηρεῖ τὸ κάλλος της.

Ἡ Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν, θεωρουμένη ὑπὸ τὸ πρίσμα αὐτό, διαφέρει πολὺ ἀπὸ τὶς ἄλλες ἱστορίες. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ μπορεῖ νὰ γίνει ἀντιληπτὴ ἂν λάβομε ὑπόψη τὴν ἴδια τὴν φύση τῶν μαθηματικῶν: ἕνα Εὐκλείδειο σύστημα αἰωνίων ἀληθειῶν. Ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν ἀποκαλύπτει προοδευτικὰ στὴν ἀνθρώπινη διανόηση, τὴν μιὰ μετὰ τὴν ἄλλη, τὶς ἀλήθειες αὐτές.

Ἡ σπουδαιότερη διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν ἄλλων ἱστοριῶν εἶναι ὅτι ἡ πρώτη δὲν ἔχει ἀνάγκη ἑρμηνείας. Ἡ σημασία ἑνὸς μαθηματικοῦ ἀποτελέσματος ἀναζητεῖται μόνο στὶς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑπολοίπου σώματος τῶν μαθηματικῶν. Τὸ σύνολο τῶν μαθηματικῶν γνώσεων, ποὺ ἔχομε ἀποκτήσει μέχρι σήμερα, εἶναι τὸ μοναδικὸ μέτρο διὰ τοῦ ὁποίου ἡ σπουδαιότητα ἑνὸς μαθηματικοῦ ἀποτελέσματος μπορεῖ πρεπόντως νὰ ἐκτιμηθεῖ.

Ἡ ἐλλιπὴς εἰκόνα, ποὺ ἀναφέραμε προηγουμένως ὅτι ἔχομε σχηματίσει λόγω τῆς περιφερειακῆς μόνο ἀπασχολήσεώς μας μὲ τὴν ἱστορία τῶν μαθηματικῶν, μᾶς ἐμποδίζει νὰ δοῦμε τὶς οὐσιώδεις ἀλλαγὲς ποὺ ἐπέρχονται στὸν ρόλο καὶ στὴν ἀντίληψη ποὺ ἔχομε γιὰ τὰ μαθηματικά, κάτι ποὺ μὲ τὴν σειρά του μᾶς ἐμποδίζει νὰ ἀντιληφθοῦμε τὶς διάφορες κρίσιμες περιόδους ποὺ παρουσιάσθηκαν σὲ σχέση μὲ τὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν. Ὅταν οὐσιαστικὲς ἀλλαγὲς στὸν ρόλο ποὺ παίζουν τὰ μαθηματικὰ δὲν γίνονται ἀντιληπτές, τότε ὑπάρχει κίνδυνος ἡ ἐπιστήμη αὐτὴ νὰ θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι τελείως ἀπομεμονωμένη ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο μέρος τῶν ἀνθρωπίνων δραστηριοτήτων. Ἡ πίστη ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι κάτι τὸ ἀπομεμονωμένο, συχνὰ παρατηρεῖται νὰ ὑπάρχει στὸ εὐρὺ κοινὸ καὶ στοὺς φοιτητές μας, καὶ ἀποτελεῖ μεγάλο ἐμπόδιο γιὰ νὰ γνωρίσομε τὴν μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Ἡ βαθύτερη ἐνασχόληση τοῦ ἀτόμου μὲ τὴν ἱστορία τῶν μαθηματικῶν τοῦ δίνει τὴν εὐκαιρία νὰ ἐξετάσει τὴν ὑπάρχουσα σχέση μεταξὺ τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς καὶ ἄλλων ὄψεων τοῦ πολιτισμοῦ.

Φιλοσοφία

Ἂς ἔλθουμε τώρα στὴν «Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν». Ὅμως τί σημαίνει ἡ φράση «φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν»; Μπορεῖ νὰ σημαίνει ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς δύο διαφορετικὰ μεταξύ τους πράγματα, ἤτοι δύο προγράμματα πού θεωροῦνται ὅτι ἀποτελοῦν κεντρικὰ θέματα τῆς φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν. Τὸ ἕνα εἶναι, τὸ «ἑρμηνευτικὸ πρόγραμμα», ἡ μελέτη τοῦ ὁποίου ὁδηγεῖ σὲ μιὰ κατάλληλη ἑρμηνεία καὶ σὲ ἕνα περιεχόμενο πού συνιστοῦν τὴν μαθηματικὴ θεωρία καὶ τὴν χρήση αὐτῆς, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι τὸ λεγόμενο «μεταφυσικὸ πρόγραμμα» ὅπου ζητεῖται νὰ ἀπαντηθεῖ τὸ ἐρώτημα ἂν ὑπάρχουν ἀφηρημένα ἀντικείμενα.

Παραθέτομε κάποια ἀναγκαία ὁρολογία. «Ἀφηρημένο ἀντικείμενο» εἶναι ἕνα ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο ὑπάρχει ἔξω ἀπὸ τὸν χωρόχρονο, ἕνα δηλαδὴ ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο ὑπάρχει ἀλλὰ δὲν ἀνήκει στὸν χωρόχρονο. Τέτοια ἀντικείμενα εἶναι μὴ-φυσικά, μὴ-νοερὰ καὶ δὲν ἀποτελοῦν ἢ δὲν προκαλοῦν μιὰ αἰτία. Ἡ πίστη στὴν ὕπαρξη τέτοιων ἀντικειμένων καλεῖται, «πλατωνισμὸς» ἐνῶ ἡ μὴ-πίστη σ' αὐτὰ καλεῖται «ἀντι-πλατωνισμός».

Ἕνα «μαθηματικὸ ἀντικείμενο» εἶναι ἕνα ἀφηρημένο ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο θεωροῦμε ὅτι ἐμπίπτει στὴν περιοχὴ τῶν μαθηματικῶν, ὅπως π.χ. εἶναι ἕνας ἀριθμός, μιὰ συνάρτηση ἢ ἕνα σύνολο. Τέλος «μαθηματικὸς πλατωνισμὸς» εἶναι ἡ ἄποψη ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικὰ ἀντικείμενα, ἐνῶ «μαθηματικὸς ἀντι-πλατωνισμὸς» εἶναι ἡ ἄποψη ὅτι δὲν ὑπάρχουν τέτοια ἀντικείμενα. Γιὰ τὴν ἁπλότητα τοῦ λόγου θὰ ἀναφερόμαστε συνήθως στὶς δύο αὐτὲς ἔννοιες μὲ τὶς λέξεις «πλατωνισμὸς» καὶ «ἀντι-πλατωνισμός».

Τὸ ἑρμηνευτικὸ καὶ τὸ μεταφυσικὸ πρόγραμμα δὲν εἶναι τελείως ξεχωριστὰ μεταξύ τους. Οἱ φιλόσοφοι οἱ ἐνδιαφερόμενοι κυρίως γιὰ τὸ ἑρμηνευτικό, διατυπώνουν πολὺ συχνὰ ἀπόψεις γιὰ τὸ μεταφυσικό, πού σημαίνει ὅτι ἀποδέχονται εἴτε τὸν πλατωνισμὸ ἢ τὸν ἀντιπλατωνισμό. Ὁμοίως, οἱ φιλόσοφοι πού ἐνδιαφέρονται γιὰ τὸ μεταφυσικό, διατυπώνουν πάντοτε ἀπόψεις πού ἀφοροῦν τὸ ἑρμηνευτικό, ἤτοι ἀποδέχονται κάποια ἑρμηνεία μαθηματικῆς θεωρίας καὶ πρακτικῆς.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ὁμάδων ἔγκειται στὸ τί ἡ κάθε μία ἀπ' αὐτὲς ἐννοεῖ μὲ τὴν λέξη ἐνδιαφέρον.

Ἕνα παράδειγμα φιλοσόφου ἐνδιαφερομένου κυρίως γιὰ τὸ μεταφυσικὸ πρόγραμμα εἶναι ὁ Hartry Field, τοῦ ὁποίου ὁλόκληρο σχεδὸν τὸ ἔργο στὴν φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν ἔχει ὡς στόχο νὰ ἀποδείξει ὅτι δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ πιστεύομε στὴν ὕπαρξη μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἕνα καλὸ παράδειγμα φιλοσόφου, τοῦ ὁποίου τὸ κύριο ἐνδιαφέρον εὑρίσκεται στὸ ἑρμηνευτικὸ πρόγραμμα, εἶναι ὁ David Hilbert.

Στὸ σύγγραμμά του (Platonism and Anti-Platonism in Mathematics, Oxford Univ. Press, 1998, pp. 217) ὁ Mark Balaguer, μετὰ ἀπὸ λεπτομερὴ καὶ ἐνδελεχὴ ἀναφορὰ στὸ θέμα, καταλήγει στὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλύψει κανεὶς μιὰ λογικὴ αἰτία γιὰ νὰ πιστέψει ἢ νὰ μὴν πιστέψει στὴν ὕπαρξη ἀφηρημένων ἀντικειμένων, μελετώντας κάποια μαθηματικὴ θεωρία καὶ πρακτική. Μὲ ἄλλα λόγια ὁ Balaguer καταλήγει στὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἰσχυρὰ ἐπιχειρήματα οὔτε ὑπὲρ οὔτε κατὰ τοῦ πλατωνισμοῦ στὴν φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν.

Δὲν θὰ ἀκολουθήσουμε τὸν Balaguer στὴν δαιδαλώδη πορεία τῶν ἐπιχειρημάτων καὶ τῶν συλλογισμῶν του. Θὰ παραθέσομε μιὰ ἄποψη, προσφιλὴ στὸν ὁμιλοῦντα, ἀναφερόμενη στὸν μαθηματικὸ πλατωνισμό.

Κατὰ τὴν ἄποψη αὐτὴ ἡ ἀνθρώπινη σκέψη φαίνεται νὰ ὁδηγεῖται, νὰ κατευθύνεται πρὸς μιὰ «ἀλήθεια» ἐξωτερικὴ ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸν ἄνθρωπο, μιὰ ἀλήθεια ἡ ὁποία αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν ἔχει μιὰ ἀντικειμενικὴ ὑπόσταση καὶ ἡ ὁποία ἀποκαλύπτεται μερικῶς μόνο σὲ κάποιον ἢ κάποιους ἀπὸ ἐμᾶς. Ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς συνηγορεῖ ἡ ὕπαρξη ἑνὸς ἀντικειμένου ποὺ φέρει τὴν ὀνομασία «Σύνολο τοῦ Mandelbrot» (Βλ. Σχήματα 1, 2, 3).

Τὸ σύνολο αὐτὸ τὸ ἀνεκάλυψε, τὸ 1990, ὁ Benoit Mandelbrot καὶ εἶναι ἕνα fractal τὸ ὁποῖο παρήχθη μὲ τὴν βοήθεια Η/Υ μὲ προγραμματισμὸ πολὺ ἁπλὸ καὶ θεωρεῖται ὅτι εἶναι τὸ πιὸ πολύπλοκο καὶ τὸ πιὸ ὡραῖο σχῆμα ποὺ ποτὲ ἐμφανίσθηκε στὰ μαθηματικά.

Ἡ ὑπέροχη αὐτὴ δομὴ τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot δὲν ἐπινοήθηκε ἀπὸ κανένα καὶ δὲν σχεδιάσθηκε ἀπὸ καμμιὰ ὁμάδα μαθηματικῶν.

Ὁ ἴδιος ὁ Mandelbrot ὁ ὁποῖος πρῶτος ἐμελέτησε τὸ σύνολο, δὲν εἶχε τὴν παραμικρὴ ἰδέα γιὰ τὴν δομὴ ποὺ κρύβονταν σ' αὐτό. Πράγματι, ὅταν στὸν ὑπολογιστὴ ἄρχισαν νὰ ἐμφανίζονται οἱ πρῶτες εἰκόνες, ὁ Mandelbrot εἶχε νομίσει ὅτι οἱ πρῶτες αὐτὲς συγκεχυμένες μορφὲς ὀφείλονταν σὲ βλάβη τοῦ ὑπολογιστῆ. Ἐπιπλέον, ὅλες οἱ λεπτομέρειες τῆς πολύπλοκης δομῆς τοῦ συνόλου αὐτοῦ δὲν μποροῦν νὰ γίνουν ἐξ ὁλοκλήρου ἀντιληπτὲς ἀπὸ κανένα. Κατὰ τὰ φαινόμενα ἡ δομὴ αὐτὴ τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot δὲν ἀποτελεῖ μέρος τῆς σκέψεώς μας, μέρος τοῦ λογισμοῦ μας, δὲν τὴν ἔχομε συλλάβει νοητικὰ ἐκ τῶν προτέρων, ἀλλὰ ἔχει μιὰ δική της πραγματικότητα, ἂν δὲ ὁποιοσδήποτε μαθηματικὸς ἢ ὑπολογιστὴς ἐπιχειρήσει νὰ μελετήσει τὸ σύνολο αὐτό, τὰ εὑρήματά του θὰ εἶναι προσεγγίσεις τῆς ἴδιας θεμελιώδους δομῆς. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot δὲν ἀποτελεῖ ἐφεύρεση τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ, ἀλλὰ ὅτι ἀποτελεῖ «ἀνακάλυψη». Ὅπως τὸ ὄρος Ὄλυμπος ὑπάρχει κάπου, ἔτσι καὶ τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot «ὑπάρχει» κάπου καὶ τὸ ἀνακαλύπτομε.

Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot ὑπάρχουν καὶ ἄλλα παραδείγματα μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τὰ ὁποῖα τὰ διακρίνει ἡ ἴδια διαχρονικὴ πραγματικότητα, ἐπιτεύγματα δηλαδὴ τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦν νοητικὰ κατασκευάσματα κάποιου μαθηματικοῦ, ἀλλὰ εἶναι ἀνακαλύψεις. Ἕνα τέτοιο παράδειγμα εἶναι ἡ ἀνακάλυψη τοῦ συστήματος τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἐνῶ ὁ πρωταρχικός σκοπὸς τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἦταν νὰ καταστεῖ δυνατὴ ἡ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῶν ριζῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ νομίσθηκε στὴν ἀρχὴ ὅτι ἦταν ἁπλῶς μιὰ μαθηματικὴ ἐπινόηση μὲ σκοπὸ νὰ ἱκανοποιήσει κάποια συγκεκριμένη ἀνάγκη, ἀργότερα κατέστη σαφὲς ὅτι τὰ ἀντικείμενα αὐτά, οἱ μιγαδικοὶ δηλαδὴ ἀριθμοί, συντελέσανε στὸ νὰ προκύψουν ἀποτελέσματα πολὺ σπουδαιότερα ἀπὸ ἐκεῖνα γιὰ τὰ ὁποῖα ἀρχικὰ προορίζονταν. Μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου προέκυψαν πάρα πολλές, «μαγικὲς» θὰ λέγαμε ἰδιότητες καὶ ἀποτελέσματα, τὴν ὕπαρξη τῶν ὁποίων οὔτε κατ' ἐλάχιστον δὲν ὑποπτεύονταν κανεὶς ἀπὸ τοὺς μεγάλους μαθηματικοὺς οἱ ὁποῖοι εἶχαν ἀσχοληθεῖ μὲ αὐτά. Μποροῦμε νὰ ποῦμε, ὅτι τὰ ἐν λόγω ἀποτελέσματα καὶ οἱ ἰδιότητες προϋπῆρχαν. Ἡ «μαγικότητα» τῶν ἰδιοτήτων ποὺ ἀναφέραμε ἐνυπῆρχε στὴ δομή τους καὶ ἀποκαλύφθηκε αὐτὴ βαθμιαίως. Θὰ γινόμασταν, ἴσως, πειστικότεροι ἂν σχολιάζαμε περισσότερο τὶς παραπάνω ἰδιότητες ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς ἀναφερόμενοι στὸ Ὁλοκλήρωμα τοῦ Cauchy ἢ στὸ Θεώρημα ἀπεικονίσεως τοῦ Riemann, θέματα, τὰ ὁποῖα οὔτε κἂν μποροῦμε νὰ θίξομε ἐδῶ.

Τὰ παραπάνω ὅμως μᾶς κάνουν νὰ διερωτηθοῦμε: Εἶναι τὰ μαθηματικὰ «ἐφεύρεση» ἢ «ἀνακάλυψη»; Τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα εἶναι ἐπινοήσεις (ἐφευρέσεις) τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἢ ἀποτελοῦν ὑπάρχουσες ἀντικειμενικότητες (πραγματικότητες) τὶς ὁποῖες οἱ μαθηματικοὶ βαθμιαίως ἀνακαλύπτουν; Πρὸς τοῦτο ἂς σχολιάσομε τὸ θέμα κάπως λεπτομερέστερα καὶ βαθύτερα.

Ἀναφέραμε παραπάνω ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τὰ ὁποῖα χαρακτηρίσαμε ἀνακαλύψεις καὶ ὄχι ἐφευρέσεις καὶ δώσαμε καὶ δύο σχετικὰ παραδείγματα. Τὰ ἐπιτεύγματα αὐτά, δηλαδὴ οἱ ἀνακαλύψεις, ἔχουν τὸ ἀκόλουθο θεμελιῶδες γνώρισμα: ἡ δομὴ ποὺ προκύπτει στὸ κάθε ἕνα ἀπ' αὐτὰ ἔχει συνέπειες πολὺ περισσότερες, πολὺ πιὸ ἐκτεταμένες καὶ πολὺ πιὸ σπουδαῖες σὲ σχέση μὲ τὰ ἀρχικὰ αἴτια ποὺ τὴν δημιούργησαν. Στὴν περίπτωση λ.χ. τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τὸ ἀρχικὸ αἴτιο, ποὺ ἦταν ἡ προσπάθεια νὰ μπορέσομε νὰ μιλοῦμε γιὰ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, εἶχε συνέπειες ἀπείρως δυσανάλογες πρὸς αὐτό.

Μπορεῖ ἴσως κανεὶς νὰ ἰσχυρισθεῖ ὅτι, στὶς περιπτώσεις ἐκεῖνες ποὺ τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα εἶναι ἀνακαλύψεις καὶ ὄχι ἐφευρέσεις, βρισκόμαστε τότε ἐνώπιον «θεϊκῶν δημιουργημάτων», τὰ ὁποῖα ἤδη ὑπάρχουν καὶ τὰ ὁποῖα βαθμιαίως ἀνακαλύπτομε!

Ὅμως ἂς μὴ ξεχνοῦμε ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικὲς δομὲς τὶς ὁποῖες δὲν χαρακτηρίζει ἡ μοναδικότητα ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω. Παραδείγματα τέτοιων δομῶν ἀποτελοῦν οἱ περιπτώσεις ἐκεῖνες κατὰ τὶς ὁποῖες ὁ μαθηματικός, στὴν προσπάθειά του νὰ ἀποδείξει κάποιο συγκεκριμένο ἀποτέλεσμα, ἀναγκάζεται νὰ εἰσαγάγει ὁρισμένα ἐπινοήματα τῶν ὁποίων ἡ δομὴ δὲν χαρακτηρίζεται μὲ κάποια μοναδικότητα μὲ τὴ ἔννοια ποὺ δώσαμε παραπάνω. Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς τὸ προκύπτον ἀποτέλεσμα, ἡ προκύπτουσα δομὴ δὲν ἔχει περαιτέρω γενικότερες καὶ διαχρονικὲς συνέπειες, δίνει ὅμως λύση στὸ πρόβλημα ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ ἐκείνη τὴ στιγμή. Τὰ λαμβανόμενα ἀποτελέσματα, στὶς περιπτώσεις αὐτές, πρέπει μᾶλλον νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἐπινοήσεις, ἢ ἐφευρέσεις καὶ ὄχι ἀνακαλύψεις. Πρόκειται γιὰ «ἀνθρώπινα δημιουργήματα!»

Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἐκτεθέντα προκύπτει ὅτι οἱ μαθηματικὲς ἀνακαλύψεις εἶναι ἐπιτεύγματα πολὺ μεγαλύτερα, πολὺ σπουδαιότερα ἀπὸ τὶς ἐπινοήσεις ἢ ἐφευρέσεις.

Παρόμοιος διαχωρισμὸς φαίνεται νὰ γίνεται καὶ στὰ ἔργα τέχνης. Τὰ μεγαλύτερα ἔργα τέχνης θεωροῦνται ὅτι εἶναι πλησιέστερα στὸ «θεῖον» ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα τὰ «ὀλιγότερο» σπουδαῖα. Οἱ καλλιτέχνες πιστεύουν ὅτι τὰ μεγαλύτερα, τὰ σπουδαιότερα ἐκ τῶν ἔργων τους, ἀποκαλύπτουν αἰώνιες ἀλήθειες οἱ ὁποῖες ἔχουν ἐκ τῶν προτέρων μιὰ αἰθέρια ὕπαρξη, ἐνῶ τὰ ὀλιγότερο σπουδαῖα ἔργα τους ἀποτελοῦν αὐθαίρετες κατασκευές, εἶναι ἔργα θνητῶν!

Ὅμως, νομίζω ὅτι πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι, στὴν περίπτωση τῶν μαθηματικῶν, τουλάχιστον στὶς περιπτώσεις θεμελιωδῶν ἐννοιῶν, συμβαίνει κάτι τὸ ἰσχυρότερο καὶ βαθύτερο ἀπ' αὐτὸ ποὺ πιστεύουν οἱ καλλιτέχνες ὅτι συμβαίνει στὴν τέχνη. Στὶς μαθηματικὲς ἰδέες ὑπάρχει μιὰ μοναδικότητα καὶ οἰκουμενικότητα ἐπιτακτικῆς φύσεως καὶ διαφορετικῆς τάξεως ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἀναμένει κανεὶς στὴν τέχνη.

Ἡ ἄποψη ὅτι διάφορες μαθηματικὲς ἔννοιες, μαθηματικὰ ἀντικείμενα, ὑπάρχουν ἀνεξαρτήτως τοῦ χωροχρόνου εἶναι βέβαια γνωστὴ ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων (360 π.Χ.) καὶ ὀφείλεται στὸν μέγιστο Ἕλληνα φιλόσοφο Πλάτωνα ἀπὸ ὅπου καὶ ἡ ὀνομασία «πλατωνισμός».

Μετὰ τὴν παράθεση τῆς παραπάνω ἀπόψεως, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἕνα ἐπιχείρημα ὑπὲρ τοῦ πλατωνισμοῦ, ἂς ἐπανέλθομε σὲ περαιτέρω σχόλια καὶ παρατηρήσεις ποὺ ἀφοροῦν τὴν φιλοσοφία, τὴν ἱστορία καὶ τὰ μαθηματικά.

Πολλοὶ πιστεύουν ὅτι ἡ μετάβαση ἀπὸ τὴν ἱστορία στὴν φιλοσοφία ἀποτελεῖ μετάβαση ἀπὸ ἕνα ἐλαφρὰ ὁμιχλώδη χῶρο σὲ ἕνα πυκνὰ ὁμιχλώδη χῶρο. Οἱ ἱστορικὲς παρατηρήσεις μπορεῖ νὰ ἔχουν κάποια σχέση καὶ νὰ συντελοῦν στὴν καλύτερη διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν, ὅμως τί μποροῦμε νὰ ἀναμένομε ἀπὸ τὴν φιλοσοφία. Τὸ κύριο ἐνδιαφέρον γιὰ τὴν φιλοσοφία ἀνέκυψε ἀπὸ τὴν κρίση ποὺ εἶχε προκύψει σχετικὰ μὲ τὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία κρίση ὀφείλετο στὴν ἀνακάλυψη ὑπαρχουσῶν ἀντινομιῶν (παράδόξων) στὴν θεωρία συνόλων. Ἡ προσπάθεια ἄρσεως τῶν ἀντινομιῶν κατέληξε στὴν δημιουργία μιᾶς ἰσχυρῆς «μαθηματικῆς λογικῆς». Τὰ μαθηματικὰ βγῆκαν ἀπὸ τὴν κρίση αὐτὴ ἰσχυροποιημένα καὶ δὲν φαίνεται νὰ ἔχουν τὴν ἀνάγκη μιᾶς «φιλοσοφίας» γιὰ νὰ στηριχθοῦν ἐπάνω σ' αὐτήν.

Ὑπάρχει στὴν ἀτμόσφαιρα κάτι τὸ παράτολμο σχετικὰ μὲ αὐτὴν καθ' ἑαυτὴν τὴν ἰδέα τῆς φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν. Πολλοὶ διερωτῶνται, σημαίνουν τίποτα ὅλα αὐτὰ τὰ λεγόμενα, οἱ «φλυαρίες» ὅπως λένε, περὶ πλατωνισμοῦ, περὶ ρεαλισμοῦ καὶ τὰ παρόμοια; Ὁ Ἀρχιμήδης ἢ ὁ Newton ἢ ὁ Gauss ἦταν φιλόσοφοι; Οἱ φιλόσοφοι μποροῦν νὰ μιλοῦν ἐπ' ἄπειρον, οἱ μαθηματικοὶ ὅμως ἐργάζονται.

Ὁ περίφημος μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Descartes (Καρτέσιος) στὸ 2ο Μέρος τοῦ μνημειώδους συγγράμματός του «Discours de la méthode pour bien conduire sa Raison et chercher la vérité dans les sciences» γράφει:

> «Εἶναι ἀδύνατον νὰ φαντασθεῖ κανεὶς κάποια ἄποψη, ὁσοδήποτε παράλογη καὶ ἀπίστευτη καὶ ἂν εἶναι αὐτή, ποὺ νὰ μὴν ἔχει ὑποστηριχθεῖ ἀπὸ κάποιον ἀπ' τοὺς φιλοσόφους».

Οἱ διαφορὲς μεταξὺ φιλοσοφίας, ἱστορίας καὶ μαθηματικῶν στηρίζονται στὴν ὑπάρχουσα διαφορὰ σαφηνείας μεταξὺ τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Τὰ φιλοσοφικὰ προβλήματα ποτὲ δὲν εἶναι σαφῆ, καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο οἱ θετικιστὲς (positivists) μποροῦν νὰ «ζήσουν» χωρὶς τὴν φιλοσοφία.

Τὰ προβλήματα ποὺ ἀπασχολοῦν τὴν ἱστορία ποικίλλουν ἀπὸ πολὺ ἁπλά, ὅπως λ.χ. εἶναι τὸ ἐρώτημα πότε ψηφίσθηκε τὸ πρῶτο Σύνταγμα στὴν Ἑλλάδα, σὲ φιλοσοφικὰ προβλήματα ὅπως εἶναι τὸ πρόβλημα πῶς ἡ κρίση τῆς 10-ετίας τοῦ 1920 ἐπηρέασε τὴν πολιτικὴ κατάσταση στὴν Ἑλλάδα. Ἂν συγκρίνομε ἕνα μαθηματικὸ πρόβλημα μὲ προβλήματα τοῦ εἴδους ποὺ μόλις ἀναφέραμε, παρατηροῦμε ὅτι τὸ μαθηματικὸ πρόβλημα εἶναι ἀπολύτως σαφές.

Τὸ μαθηματικὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ εἶναι πολὺ δύσκολο, ὅμως πιστεύομε ὅτι ὅταν αὐτὸ λυθεῖ θὰ τὸ ἀντιληφθοῦμε. Φαίνεται ὅμως, ὅτι ὑπάρχει μιὰ ποιοτικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῆς πολυπλοκότητας καὶ τῆς ὁμιχλώδους καταστάσεως ἡ ὁποία παρατηρεῖται στὰ φιλοσοφικὰ προβλήματα. Τὰ μαθηματικὰ προβλήματα ἀπαιτοῦν λύσεις ἐνῶ τὰ φιλοσοφικὰ προβλήματα ἀπαιτοῦν περισσότερη σκέψη.

Παρὰ ταῦτα, πιστεύεται ὅτι μιὰ κατάλληλη φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν μπορεῖ νὰ ἀποδείξει ὅτι ἡ προαναφερθεῖσα αὐτὴ διαφορὰ μεταξὺ φιλοσοφίας καὶ μαθηματικῶν δὲν εἶναι τόσο μεγάλη ὅσο φαίνεται νὰ εἶναι. Γιὰ νὰ φανεῖ αὐτὸ ἀπαιτεῖται κατ' ἀρχὴν μιὰ προσεκτικότερη καὶ λεπτομερέστερη ἐξέταση τοῦ θέματος.

Τὰ προβλήματα ποὺ ἀπασχολοῦν τὴν φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν μποροῦν νὰ χωρισθοῦν στὶς κάτωθι ἑνότητες : λογικὲς θεμελιώσεις - ἀπώλεια βεβαιότητας - ἡ φύση τῆς ἀποδείξεως - ἡ σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς μαθηματικῆς γνώσης, καὶ τοῦ πραγματικοῦ κόσμου - καὶ τέλος αὐτὸ ποὺ ἀναφέραμε καὶ προηγουμένως ἡ «ὀντολογικὴ θέση» τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων ὅπως εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ συναρτήσεις, τὰ σύνολα κ.λπ.

Ἡ πλήρης παρουσίαση τῶν ἐξελίξεων στὶς ἑνότητες αὐτές, προφανῶς, δὲν ἐμπίπτει στοὺς σκοποὺς τῆς ὁμιλίας αὐτῆς. Ἁπλῶς θὰ ἀναφερθοῦμε ἀκροθιγῶς σὲ μερικὲς ἀπὸ αὐτές.

Ἡ πιὸ ἐκτεταμένη δραστηριότητα κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ 20οῦ αἰώνα ὑπῆρξε ἡ ἀναφερόμενη στὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ πρώτη ἀπὸ τὶς δραστηριότητες ποὺ ὑπῆρξαν αἰτίες νὰ ἀσχοληθοῦν οἱ μαθηματικοὶ μὲ τὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν, ἦταν ἡ ἀνακάλυψη διαφόρων ἀντιφάσεων (τὶς ὁποῖες κατ' εὐφημισμὸν ἀπεκάλεσαν «παράδοξα») στὰ μαθηματικὰ καὶ κυρίως στὴν θεωρία συνόλων. Ἕνα ἀπὸ τὰ παράδοξα αὐτὰ εἶναι τὸ παράδοξο Burali-Forti (1861-1931) ὅπου : ἡ ἀκολουθία ὅλων τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία εἶναι καλῶς διατεταγμένη, πρέπει νὰ ἔχει τὸν μέγιστο τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν ὡς τακτικὸν ἀριθμὸ αὐτῆς. Τότε ὅμως, ὁ τακτικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν!

Κατὰ τὰ πρῶτα ἔτη τοῦ 20οῦ αἰώνα παρατηρήθηκαν καὶ ἄλλα παράδοξα. Προφανῶς ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀντιφάσεων αὐτῶν ἐνόχλησε σὲ μεγάλο βαθμὸ τὴν μαθηματικὴ κοινότητα. Ἕνα ἄλλο πρόβλημα, ἡ ὕπαρξη τοῦ ὁποίου βαθμιαίως ἀναγνωρίσθηκε, ἦταν κατὰ πόσον ὑπάρχει συνέπεια στὸ ὅλο μαθηματικὸ οἰκοδόμημα. Λόγω ὑπάρξεως παραδόξων στὴν περιοχὴ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ἡ ὕπαρξη ἢ ὄχι συνεπείας στὴν περιοχὴ αὐτὴ ἦταν ἀνάγκη νὰ διασαφηνισθεῖ.

Κατὰ τὸ δεύτερο ἥμισυ τοῦ 19ου αἰ. μερικοὶ ἐπιστήμονες εἶχαν ἤδη ἀρχίσει νὰ ἀσχολοῦνται μὲ τὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν καὶ ἰδιαίτερα μὲ τὴν σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς λογικῆς καὶ τῶν μαθηματικῶν. Μερικοὶ ἐρευνητὲς θέλησαν νὰ θεμελιώσουν τὰ μαθηματικὰ ἐπὶ τῆς λογικῆς μόνο. Ἄλλοι ἀμφισβήτησαν τὴν καθολικὴ ἐφαρμογὴ τῆς λογικῆς καὶ τὴν ἐγκυρότητα ὁρισμένων ἀποδείξεων ποὺ εἶχαν δοθεῖ σὲ διάφορες προτάσεις.

Οἱ ἤδη ὑποβόσκουσες αὐτὲς ἀντιθέσεις πρὸ τοῦ 1900 ἐξελίχθηκαν σὲ ζωηρὴ ἀντιπαράθεση ἀπόψεων, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ «θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν» νὰ ἀποτελέσει θέμα εὐρέος ἐνδιαφέροντος.

Τὸ ἱστορικὸ τῆς «ἀπώλειας βεβαιότητας», μᾶς τὸ παρουσιάζει ὁ Kline στὸ βιβλίο του: Mathematics: The Loss of Certainty (Oxford

University Press, Oxford, 1980). Στὸ βιβλίο αὐτὸ περιγράφει τὴν δημιουργία (κατὰ τὸν 16ο αἰ.) τῆς ἰδέας, τοῦ ὑπὸ τοῦ Θεοῦ, μαθηματικοῦ σχεδιασμοῦ τῆς φύσεως. Ἡ παρουσία τῆς ἰδέας αὐτῆς ὑπῆρξε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐντάσεως ποὺ εἶχε δημιουργηθεῖ μεταξὺ τῶν θρησκευτικῶν δοξασιῶν τῆς ἐποχῆς καὶ τῆς τάσης πρὸς ἐπάνοδο στὴν κλασικὴ σκέψη. Ἡ ἐποχὴ αὐτὴ ὑπῆρξε μιὰ χρυσὴ ἐποχὴ γιὰ τὰ μαθηματικά.

Τὸ ὑπόλοιπο τοῦ βιβλίου τοῦ Kline ἀσχολεῖται μὲ τὴν βαθμιαία ἀπώλεια τῆς «ἀθωότητας» τῆς «βεβαιότητας». Ἀποδείχθηκε ὅτι τὰ μαθηματικὰ ὑπόκεινται καὶ αὐτὰ στὸ μὴ-ἀλάθητο τοῦ ἀνθρώπου. Ἡ ἀπώλεια αὐτὴ τῆς βεβαιότητας παρουσιάζει σοβαρὰ φιλοσοφικὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα εἶναι φανερὸ ὅτι ἔχουν σχέση μὲ τὰ μαθηματικά.

Σχετικὰ μὲ τὴν ἑνότητα «ὀντολογικὴ θέση», ἡ ὁποία συνδέεται στενὰ μὲ τὸ ἐρώτημα ἂν τὰ μαθηματικὰ ἀποτελέσματα εἶναι ἀνακαλύψεις ἢ ἐπινοήματα, μιλήσαμε παραπάνω.

Ἕνα τελευταῖο θέμα ποὺ θὰ θίξουμε εἶναι ἡ διαφορὰ ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ μαθηματικῶν καὶ ἐμπειρικῶν ἐπιστημῶν. Οἱ ἐμπειρικὲς ἐπιστῆμες ἔχουν ὡς ἀντικείμενο μελέτης τὴν ὑλικὴ πραγματικότητα, ἐνῶ τὰ ἀντικείμενά μελέτης τῶν μαθηματικῶν εἶναι «ἰδέες» (δὲν ἐξετάζομε ποιὸς κατασκευάζει τὶς ἰδέες).

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ μεταξὺ ἐμπειρικῶν ἐπιστημῶν καὶ μαθηματικῶν περιγράφεται ἀπὸ διαφόρους φιλοσόφους ὡς ἑξῆς:

Στὸ παραδοσιακὸ (Εὐκλείδειο) πρότυπο τῶν μαθηματικῶν ἡ ἀλήθεια τοποθετεῖται στὴν κορυφή, ὑπὸ μορφὴν ἀδιαμφισβητήτων ἀξιωμάτων καὶ προχωρεῖ πρὸς τὰ κάτω, διὰ ἐπαγωγικῶν ὁδῶν, σὲ διάφορα θεωρήματα. Ἀντιθέτως, οἱ ἐμπειρικὲς ἐπιστῆμες δὲν ἀρχίζουν μὲ ἀδιαμφισβήτητα ἀξιώματα.

Τὸ «ἀδιαμφισβήτητο» σ' αὐτὲς εὑρίσκεται στὸν «πυθμένα», καὶ εἶναι ἡ πραγματικότητα τῶν γεγονότων. Τὰ συμπεράσματα προχωροῦν πρὸς τὰ ἐπάνω πρὸς τὶς θεωρητικὲς ὑποθέσεις. Ἂν μιὰ πρόβλεψη ἔλθει σὲ ἀντίθεση μὲ τὰ γεγονότα, τότε αὐτὴ ἐπανέρχεται στὴν θεωρία ἡ ὁποία πρέπει τότε νὰ μεταβληθεῖ.

Ἐν τῷ μεταξὺ καὶ οἱ ἔννοιες «γεγονὸς» καὶ «ἀντικειμενικὴ πραγματικότητα» ἔχουν ἀρχίσει νὰ γίνονται προβληματικές. Ἔτσι, οἱ ἐν γένει ἀντιλήψεις περὶ μαθηματικῶν καὶ περὶ ἐμπειρικῶν ἐπιστημῶν ἔχουν ἀρχίσει νὰ μεταβάλλονται καὶ νὰ κινεῖται ἡ μία πρὸς τὴν κατεύθυνση τῆς ἄλλης.

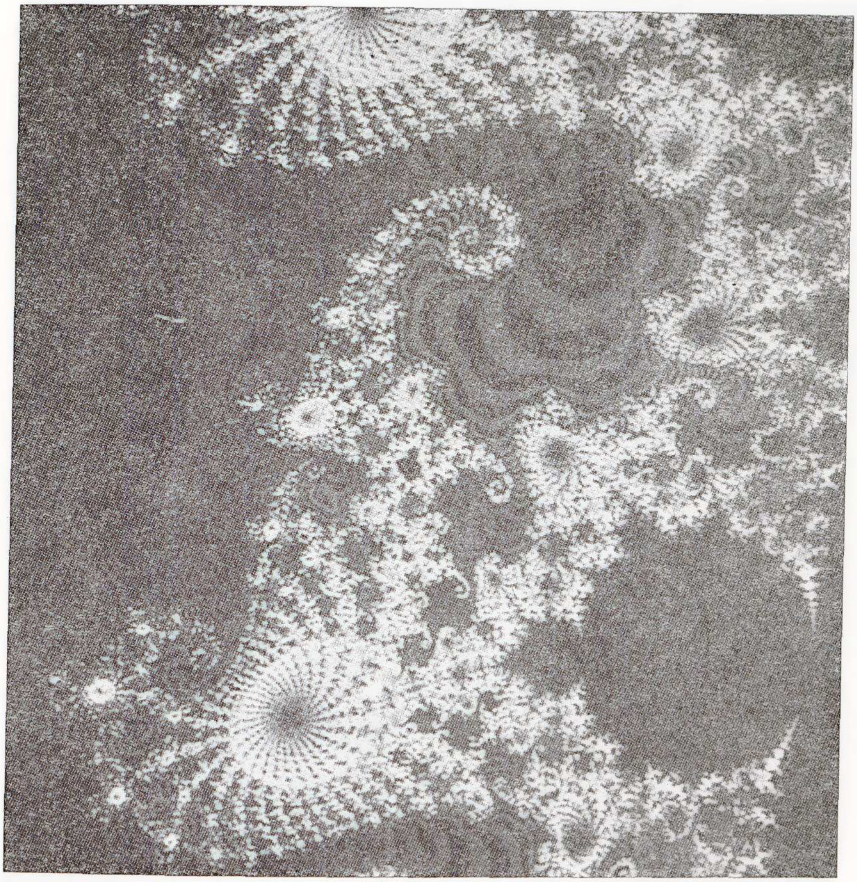
Ἐν κατακλεῖδι μὲ ὅλα ὅσα εἰπώθηκαν παραπάνω ὡς παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν καὶ τὶς φιλοσοφίας, δὲν θὰ θέλαμε νὰ νομισθεῖ ὅτι ὑποστηρίζομε τὴν ἄποψη ὅτι ἡ ἱστορία καὶ ἡ φιλοσοφία πρέπει νὰ διδάσκονται στὰ μαθήματα τῶν μαθηματικῶν. Πιστεύομε ὅμως, ὅτι ὁ διδάσκων τὰ μαθήματα αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι καλὰ κατατοπισμένος σ' αὐτὰ τὰ θέματα γιὰ νὰ καταστεῖ ἡ διδασκαλία του ἀποτελεσματικότερη.

Ὅταν κανεὶς διδάσκει ἕνα μάθημα, τοῦ ὁποίου τὸ περιεχόμενο δὲν εἶναι ἀκριβῶς καθορισμένο, εἶναι ἀπαραίτητο νὰ γνωρίζει πολὺ περισσότερα γιὰ τὸ ἀντικείμενο τοῦ μαθήματος ποὺ θὰ διδάξει ἀπὸ ὅ,τι στὴν πραγματικότητα θὰ παρουσιάσει στοὺς μαθητές του. Εἶναι ἀπαραίτητο ὁ διδάσκων νὰ ἔχει διερευνήσει ὅλα τὰ μονοπάτια καὶ νὰ διαλέξει ἐκεῖνο διὰ τοῦ ὁποίου θὰ ὁδηγήσει τοὺς μαθητές του στὸν ἐπιδιωκόμενο σκοπό. Τὸ ἴδιο βέβαια ἰσχύει καὶ γιὰ τὸν ἐρευνητὴ μαθηματικό.

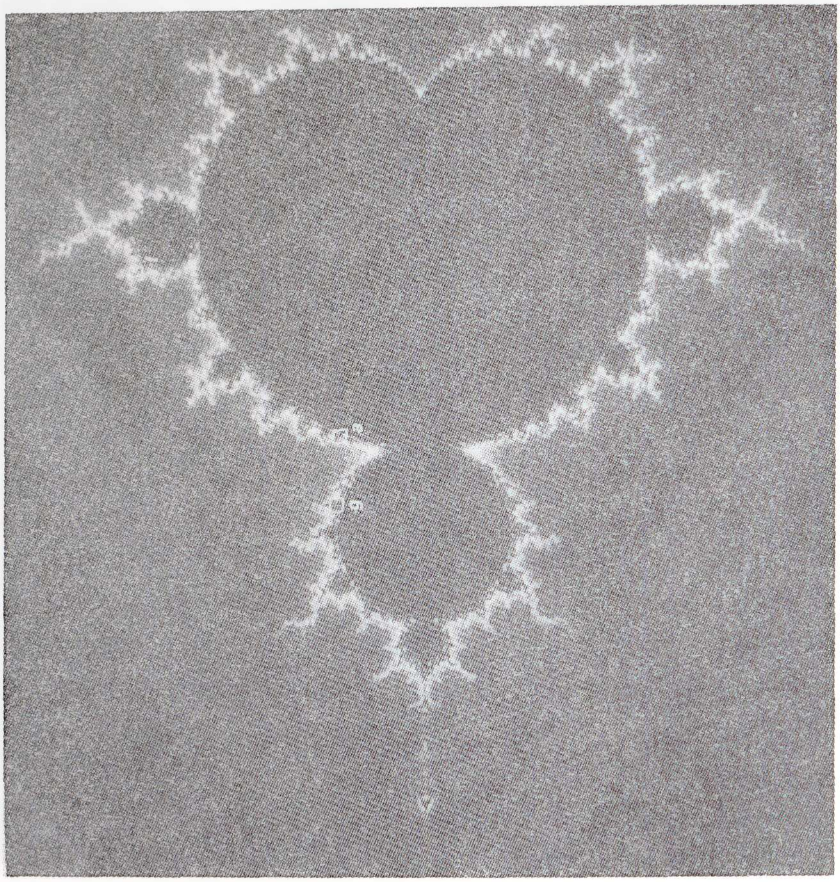
Τέλος θὰ κλείσω τὴν σύντομη αὐτὴ ὁμιλία μὲ τὶς ἀκόλουθες σκέψεις.

Τὸ ἐρώτημα ποὺ ἀφορᾶ τὴν τελικὴ καὶ πλήρη θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν καθὼς καὶ τὴν τελικὴ «σημασία» τους παραμένει ἀνοικτό. Δὲν γνωρίζομε πρὸς ποιὰ κατεύθυνση θὰ βρεῖ τὴν τελική του λύση ἢ ἀκόμα ἂν μιὰ τελικὴ ἀπάντηση πρέπει νὰ ἀναμένεται ἢ ὄχι.

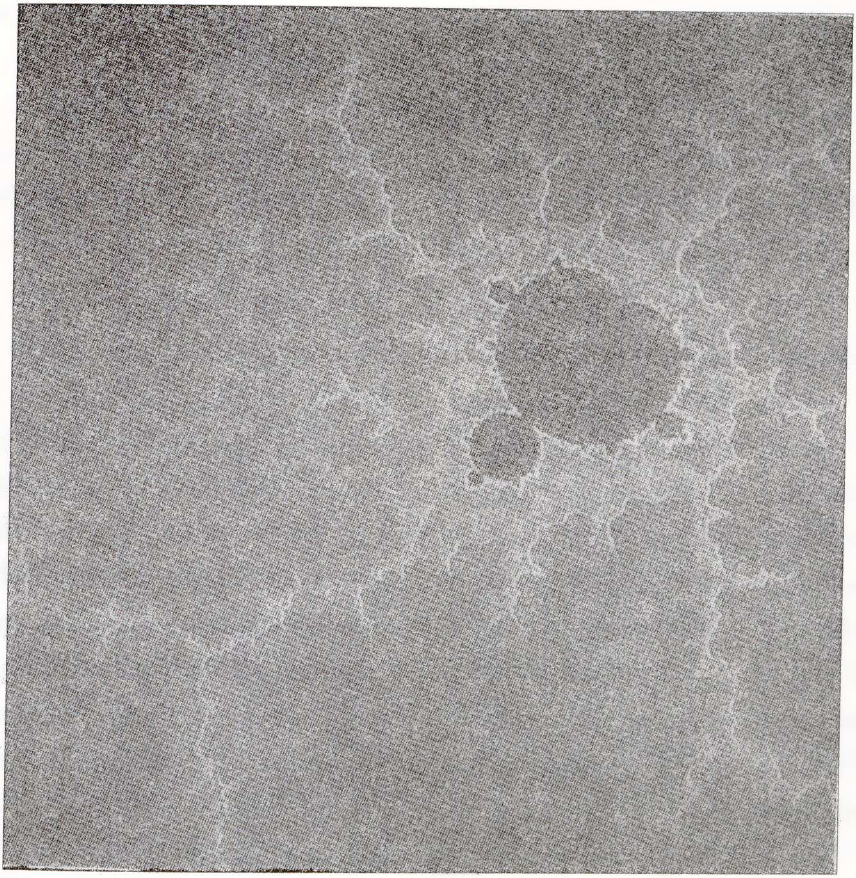
Ἡ ἀπασχόληση μὲ τὰ Μαθηματικὰ μπορεῖ νὰ εἶναι μιὰ δημιουργικὴ δραστηριότητα τοῦ ἀνθρώπου, ὅπως εἶναι ἡ γλῶσσα ἢ ἡ μουσική, δραστηριότητα ὑψίστης πρωτοτυπίας, ἡ ὁποία ὅμως ἱστορικὰ καὶ φιλοσοφικὰ δὲν φαίνεται ἀκόμα νὰ ἐπιδέχεται μιὰ πλήρη λογικὴ καὶ ἀντικειμενικὴ ἀνάλυση.



Σχῆμα 1.



Σχῆμα 2.



Σχῆμα 3.