ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.—**Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ**, *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

Ι. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς ἢ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, ἰσχυρότατον ἀποδεικτικὸν μέσον τῆς Ἀνωτέρας μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Τὴν σημασίαν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ἐξαίρει ἰδιαιτέρως ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Poincaré εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις»[1]. Μεταξὺ ἄλλων μαθηματικῶν, οἵτινες τονίζουσιν ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τοῦ συλλογιμοῦ τούτου εἰς τὴν Ἀνωτέραν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν μνημονεύομεν τὸν Γερμανὸν K. Knopp καὶ τὸν Φινλανδὸν E. Lindelöf. Ὡς πρῶτος διατυπώσας τὸν ἀποδεικτικὸν τοῦτον συλλογισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς συνάγεται ἔκ τινος χωρίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» (73β 32), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθ' ὅλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται. Πέρα τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Ἀριστοτέλους, οὐδεμία μέχρι τοῦ 1910 συγκεκριμένη περίπτωσις ἐφαρμογῆς τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἶχε σημειωθῆ εἰς τὰ σωθέντα μαθηματικὰ ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὸ 1910 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐπέστησε τὴν προσοχὴν τῶν συγχρόνων του ἐπιστημόνων ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἔκτοτε οὐδεμία ἄλλη σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐγένετο ἀφορῶσα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ὑπὸ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

II. Κατὰ τὴν ἐργασίαν ἡμῶν πρὸς ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διεπιστώσαμεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μεταξὺ τούτων μνημονεύομεν τὰ θεωρήματα 3,14,27,35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 20 τοῦ IX. Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὸ 20ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου εἰς τὸ ὁποῖον, καθ' ἡμᾶς, γίνεται ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνήθειαν τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων ὀνοματιζομένων, ὁτὲ μὲν δι' ἑνὸς γράμματος, ὁτὲ δὲ διὰ δύο.

---

* **EUAG. STAMATIS, Der Schluss der vollsdändigen Induktion bei Euklid.**

[1] Science et hypothése, C. 1. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ Παν. Σ. Ζερβοῦ, 1912, (ἔκδοσις Φέξη).

[2] *Mangold - Knopp*, Einführung in die höhere Mathematik. I 1944, (Teubner).

[3] *Lindelöf - Ullrich*, Einführung in die höhere Analysis, 1950, (Teubner).

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν».

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ Α. Β. Γ

Α ————————, Β ————————, Γ ————————.

Λέγω, ὅτι τῶν

Η ————————, Ε ———————— Δ —— Ζ

πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί. Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ καὶ ἔστω τοῦτο ὁ ἀριθμὸς ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τοῦτον ἡ μονὰς ΔΖ., ὥστε ΕΖ = ΔΕ + ΔΖ. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι.

1. Ἔστω πρότερον ὅτι ΕΖ εἶναι πρῶτος. Τότε εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ΕΖ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων, τῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Ε,Ζ ἤτοι εὑρέθησαν περισσότεροι τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν. (ἐνταῦθα ὁ Εὐκλείδης παραλείπει, ὡς αὐτονόητον, τὴν πρότασιν, ὅτι ὁ ΕΖ πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτός).

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι ὁ ΕΖ. δὲν εἶναι πρῶτος ἀλλὰ σύνθετος. Τότε οὗτος θὰ μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Η (κατὰ τὸ 31ον θεώρημα τοῦ VII βιβλίου τῶν Στοιχείων). Λέγω ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἔστω ὅτι ὁ Η εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α,Β,Γ, οἱ δὲ Α,Β,Γ μετροῦσι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν τὸν ΔΕ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Η καὶ τὸν ΕΖ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΕΖ − ΔΕ = ΔΖ. Ὁ ΔΖ ὅμως εἶναι ἡ μονάς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ Η ἀριθμὸς ὢν (δηλ. πλῆθος μονάδων) εἶναι ἀδύνατον νὰ μετρῇ τὴν μονάδα. Ἄρα ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτός. Ἄρα εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς καὶ τὸ πλῆθος τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΙΙ. Εἶναι φανερόν ὅτι οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α,Β,Γ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὸ συγκεκριμένον πλῆθος τριῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀλλὰ παριστῶσι τυχὸν πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν διὰ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμός. Ἐὰν τὸ τυχὸν τοῦτο πλῆθος τὸ καλέσωμεν ν τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχουσι ν + 1 πρῶτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν τὸ νέον πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν τὸ ν + 1 τὸ καλέσωμεν λ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν· ἔστω Κ καὶ εἰς τὸν Κ προσθέτομεν τὴν μονάδα. Τότε ὁ Κ + 1 ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἐὰν ὁ Κ + 1 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμός, ὁ Κ + 1, καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων ἔγινε ν + 2. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ Κ + 1 δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους ν + 1 = λ. Ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Κ + 1 πρῶτος, θὰ εἶναι σύνθετος, ὅτε οὗτος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Λ. Κατὰ τὴν εὐκλείδιον ἀπόδειξιν ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Διότι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν ὁ Λ νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Ὁ Λ ὡς ὢν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἷς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ μετρεῖ τὸ ἐλ.κ.πολλ. αὐτῶν, τὸν Κ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Λ καὶ τὸν Κ + 1. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν Κ + 1 − Κ = 1· ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Λ εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἄρα ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ = ν + 1, ἤτοι εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Λ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων ν + 1, πρώτων ἀριθμῶν ἔγινε ν + 2. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ν + 2 τὸ καλέσωμεν μ, εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ὅτι ὑπάρχουσι μ + 1 = ν + 3 πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς: αἱ διαδοχικαὶ ὅμως αὗται ἀποδείξεις εἶναι περιτταί, διότι εἶναι ἐπανάληψις τῆς πρώτης ἀποδείξεως. Διὰ τὴν τιμὴν ν = 1, εὐνοήτως δὲν γίνεται λόγος κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἀπόδειξιν, διότι αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν ἤτοι ἀποκλείεται ἡ θεώρησις τῆς περιπτώσεως ν = 1. Τὸ ὀλιγώτερον πρέπει νὰ εἶναι ν = 2, ἤτοι τὸ θεώρημα ἔχει ἰσχὺν διὰ ν ≥ 2. Ἡ ἔννοια τῆς ἀναδρομικῆς ἰσχύος τοῦ συλλογισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: ἐθεωρήθησαν γνωστοὶ ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ εὑρέθησαν ν + 1 τὸ πλῆθος πρῶτοι. Ἐὰν θεωρηθῶσι γνωστοὶ ν − 1 πρῶτοι ἀριθμοί, θὰ εὑρεθῇ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν εἷς ἀκόμη πρῶτος, ἤτοι ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοί. Ἐὰν θεωρηθῶσι διαδοχικῶς, δεδομένοι, ν − 2, ν − 3, ν − 4 . . . 2 πρῶτοι ἀριθμοὶ θὰ εὑρεθῶσιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἀντιστοίχως ν − 1, ν − 2, ν − 3 . . . . 3 πρῶτοι ἀριθμοί. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής, ὅταν ν = 2, ὁπότε ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως διὰ ν = 3,4,5 . . . . . Τοῦτο ὅμως εἶναι μία διατύπωσις ἑρμηνεύουσα τὴν φράσιν «ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς» καὶ καταλήγουσα εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι ν = 2. Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι «ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».

Ἀνατρέχομεν εἰς τὴν θεώρησιν τοῦ πλήθους τῶν συναρτήσεων ν − 1,ν − 2. ν − 3 . . . . . 2. Ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον δύο συναρτήσεων, τότε προκειμένου νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσχὺν αὐτοῦ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων θεωροῦμεν δύο συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν νὰ ἔχωμεν πρὸς ἀπόδειξιν γινόμενον δύο συναρτήσεων διὰ τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει τὴν πρότασιν. Προκειμένου διὰ γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων, θεωροῦμεν τρεῖς συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς γινόμενον δύο συναρτήσεων. Καὶ γενικῶς, ὅταν ἔχωμεν γινόμενον ν + 1 τὸ πλῆθος συναρτήσεων, θεωροῦμεν ὡς ἕνα παράγοντα ν τὸ πλῆθος συναρτήσεις καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεχείας τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων. Εἶναι φανερὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀκριβολογία καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους, καθ' ὃν μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται.

Ἡ τυχοῦσα περίπτωσις τοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν εἶναι, ὡς ἀνωτέρω μνημονεύεται, ἡ θεώρησις δοθέντων τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὁπότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ τέταρτος πρῶτος ἀριθμός, ἤτοι ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις γενικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

G. Vacca machte 1910 aufmerksam auf die Verwendung des Schlusses der Vollständigen Induktion in den Sätzen 8 und 9 des IX. Buches der Elemente von Euklid. E. Stamatis teilt mit, dass Euklid diese Beweismethode auf viele anderen Sätze der Elemente anwendet. Seine Behauptung stützt er, beispielweise, auf den Beweis des 20. Satzes des IX. Buches der Elemente.

ΑΣΤΡΟΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑ.— **Expression de la radiation solaire en fonction de la longitude du Soleil en 11 stations de l'hémisphère Nord**, *par Jean Xanthakis**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

SUMMARY

«Let us denote by S_i, $i = 1,2 \ldots 6$ the mean values of the solar radiation for the months January, February, ... June and by S_{13-i}, the corresponding values for the months December, November, ... July.

The observations of the solar radiation at 11 stations of the northern hemisphere (see tables I and II) show that:

* ΙΩ. ΞΑΝΘΑΚΗΣ, Ἔκφρασις τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας συναρτήσει τοῦ μήκους τοῦ Ἡλίου εἰς 11 τόπους τοῦ Βορ. ἡμισφαιρίου.