ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.— Μέθοδος βελτιώσεως προσεγγιζούσης τιμῆς κεκρυμμένης περιοδικότητος, *ὑπὸ Θ. Διαμαντοπούλου**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Εἰς προηγουμένην ἐργασίαν μας* ἐδείξαμεν ἕνα τρόπον ἀναζητήσεως κεκρυμμένων περιοδικοτήτων τῇ βοηθείᾳ ὀλίγων καὶ λίαν ἁπλῶν ὑπολογισμῶν, δυναμένων, κατὰ τὸ πλεῖστον, νὰ γίνουν ἀπὸ μνήμης. Δεικνύεται οὕτως ἡ ὕπαρξις ἐν τῇ δοθείσῃ ἀκολουθίᾳ μιᾶς ἡμιτονοειδοῦς συνιστώσης μεγίστου εὔρους καὶ εὑρίσκεται μία προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ μήκους τῆς περιόδου. Μία μέθοδος βελτιώσεως τῆς τιμῆς ταύτης θὰ ἦτο, προφανῶς, ἐξαιρετικῶς χρήσιμος. Εἰς αὐτὴν εἶναι λογικὸν νὰ μὴ ἐπιδιώκωμεν ἁπλότητα καὶ συντομίαν πράξεων, διότι δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν κατὰ τὴν ἔρευνάν μας εἰς τὰ στενὰ ὅρια, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται τὸ γνωστὸν ἤδη κατὰ προσέγγισιν μῆκος τῆς περιόδου. Τοὐναντίον, ὅταν οὐδὲν γνωρίζωμεν περὶ τῆς ὑπάρξεως ἐν τῇ δοθείσῃ ἀκολουθίᾳ κεκρυμμένης περιοδικότητος, ἡ συντόμευσις τῶν πράξεων, τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν δοκιμὴν τῶν περιόδων ὅλων τῶν μηκῶν καὶ διὰ τῶν ὑπολογισμῶν τῶν συσχετίσεων, εἶναι λίαν ἐπιθυμητή.

Θεωρητικῶς ἐξετάζομεν συνεχῆ διαδοχὴν τιμῶν. Εἰς τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου εἶναι εὐχερὴς ἡ ἀντικατάστασις τῶν ὁλοκληρωμάτων δι' ἀθροισμάτων.

Ἔστω $z = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \beta\right)$ ἡ ζητουμένη περιοδικὴ συνιστῶσα, $T+\varepsilon$ ἡ γνωστὴ εἰς ἡμᾶς προσεγγίζουσα τιμὴ τῆς περιόδου. Θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{\Delta}\int_{\tau}^{\tau+\Delta} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+\beta\right)\eta\mu\left[\frac{2\pi}{T+\varepsilon}(t-\tau)+\varphi\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\Delta}\int_{\tau}^{\tau+\Delta}\left\{\sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi\varepsilon}{(T+\varepsilon)T}t + \frac{2\pi\tau}{T+\varepsilon} + \beta - \varphi\right] - \sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi(2T+\varepsilon)}{T(T+\varepsilon)}t - \frac{2\pi\tau}{T+\varepsilon} + \beta + \varphi\right]\right\}dt =$$

$$= \frac{T(T+\varepsilon)}{4\pi\varepsilon\Delta}\left\{\eta\mu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \frac{2\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)} + \beta - \varphi\right] - \eta\mu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \beta - \varphi\right]\right\} -$$

$$- \frac{T(T+\varepsilon)}{4\pi(2T+\varepsilon)\Delta}\left\{\eta\mu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \frac{2\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)} + \beta + \varphi\right] - \eta\mu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \beta + \varphi\right]\right\} =$$

$$= \frac{T(T+\varepsilon)}{2\pi\varepsilon\Delta}\eta\mu\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}\sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)} + \beta - \varphi\right] -$$

$$- \frac{T(T+\varepsilon)}{2\pi(2T+\varepsilon)\Delta}\eta\mu\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}\ \sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi\tau}{T} + \frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)} + \beta + \varphi\right],$$

καὶ τελικῶς:

---

* TH. DIAMANTOPOULOS, **Methode zur Verbesserung des angenährten Wertes ener vsrborgenen Periodizität.**

* Βλ. βιβλιογραφίαν, 1.

$$I=\frac{T(T+\varepsilon)}{2\pi\Delta}\Bigg\{\Bigg[\frac{1}{\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}+\beta-\varphi\right)-\frac{1}{2T+\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}+\right.$$

$$\left.+\beta+\varphi\right)\Bigg]\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\tau}{T}-\Bigg[\frac{1}{\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}\eta\mu\left(\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}+\beta-\varphi\right)-$$

$$-\frac{1}{2T+\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}\eta\mu\left(\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}+\beta+\varphi\right)\Bigg]\eta\mu\frac{2\pi\tau}{T}\Bigg\},$$

δηλ.

$$I=A\,\eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\delta\right) \qquad (1)$$

ἔνθα

$$A=\frac{T(T+\varepsilon)}{2\pi\Delta}\Bigg[\frac{1}{\varepsilon^2}\eta\mu^2\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}+\frac{1}{(2T+\varepsilon)^2}\eta\mu^2\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}- \qquad (2)$$

$$-\frac{2}{\varepsilon(2T+\varepsilon)}\eta\mu\frac{\pi\varepsilon\Delta}{T(T+\varepsilon)}\eta\mu\frac{\pi(2T+\varepsilon)\Delta}{T(T+\varepsilon)}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\Delta}{T+\varepsilon}+2\varphi\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπῶς, ἐὰν ἐπὶ τῆς ἡμιτονοειδοῦς συνιστώσης $z=\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+\beta\right)$ ἐφαρμόσωμεν τὸν μετασχηματισμόν, τὸν ἐκφραζόμενον ὑπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος I, προκύπτει ἡμιτονοειδὴς κύμανσις τῆς αὐτῆς περιόδου μὲ τὴν τῆς z. Τὸ εὖρος τῆς κυμάνσεως ταύτης εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀρχικοῦ εὔρους τῆς z ἐπὶ συντελεστὴν A, ἀνεξάρτητον μὲν τῆς φάσεως β τῆς z, ἐξαρτόμενον δὲ ἀπὸ τὴν αὐθαιρέτως ληφθεῖσαν φάσιν φ. Δυνάμεθα, συνεπῶς, νὰ ἐκτελῶμεν ἀλλεπαλλήλους μετασχηματισμοὺς (I) χωρὶς νὰ ἀλλάζῃ ἡ περίοδος καὶ νὰ ἐκλέγωμεν τὰς φάσεις οὕτως, ὥστε ἐν τέλει νὰ προκύψῃ συντελεστὴς ἐνισχύων ἰσχυρῶς τὸ εὖρος τῆς ζητουμένης συνιστώσης z.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ A ἁπλοποιεῖται, ἐὰν ὡς διάστημα ὁλοκληρώσεως λάβωμεν ἀκέραιον πολλαπλάσιον K τῆς γνωστῆς προσεγγιζούσης τιμῆς T+ε τῆς περιόδου:

$$A_1=\frac{T}{2K\pi}\eta\mu\frac{K\pi\varepsilon}{T}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{(2T+\varepsilon)^2}-\frac{2\sigma\upsilon\nu2\varphi}{\varepsilon(2T+\varepsilon)}}=$$

$$=\frac{T}{K\pi\varepsilon}\eta\mu\frac{K\pi\varepsilon}{T}\sqrt{\frac{T^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+(T+\varepsilon)^2\eta\mu^2\varphi}{\varepsilon(2T+\varepsilon)}}$$

Θέτομεν $\frac{\varepsilon}{T}+1=x$

$$y\equiv A_1=\frac{\eta\mu K\pi(x-1)}{K\pi(x-1)}\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi+x^2\eta\mu^2\varphi}{x+1}} \qquad (3)$$

ἤ

$$y=(-1)^K\frac{\eta\mu K\pi x}{K\pi(x^2-1)}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\varphi+x^2\eta\mu\varphi^2} \qquad (3')$$

Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἐπίδρασιν τοῦ συντελεστοῦ τούτου ἐπὶ τοῦ εὔρους συνιστώσης τυχούσης περιόδου T, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ T λαμβάνει θετικὰς τιμὰς μεταξὺ 0 καὶ $+\infty$, ἐνῷ τὸ T+ε παραμένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὴν γνωστὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς ἀληθοῦς περιόδου, μὲ τὴν ὁποίαν γίνεται ὁ μετασχηματισμός. Συνεπῶς, τὸ $x=\frac{\varepsilon}{T}+1$ λαμβάνει ἀντιστοίχως τιμὰς μεταξὺ $+\infty$ καὶ 0. Εἶναι περιττὸν νὰ ἐξετάσωμεν ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ T, διότι μία συνιστῶσα μὲ ἀρνητικὴν τιμὴν ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν συνιστῶσαν μὲ θετικὴν τιμὴν τοῦ T καὶ διαφορετικὴν φάσιν, ὁ συντελεστὴς y ὅμως δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φάσιν β: $\eta\mu\left(\frac{2\pi}{-T}t+\beta\right)=-\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t-\beta\right)=\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+(\pi-\beta)\right)$ Ἤ, ἄλλως, ὁ συντελεστὴς y εἶναι ἀντισυμμετρικὸς ὡς πρὸς x, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (3′) ἢ καὶ (3), εἰς δύο, ὅμως, ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ T ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ $x=\frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{T}$.

Ἐάν, π.χ., μὲ τὸ γνωστὸν διάστημα ὁλοκληρώσεως $T+\varepsilon$ ἐκτελέσωμεν δύο ἀλλεπαλλήλους μετασχηματισμοὺς (I), τὸν ἕνα μὲ φάσιν $\varphi=0$ καὶ τὸν ἄλλον μὲ φάσιν $\varphi=\frac{\pi}{2}$, τότε τὸ εὖρος τῆς συνιστώσης $\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+\beta\right)$ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν

$$y=\left[\frac{\eta\mu K\pi(1-x)}{K\pi(1-x)}\right]^2\cdot\frac{x}{(1+x)^2} \tag{4}$$

Τοῦ x τείνοντος πρὸς τὴν μονάδα, (δηλ. ὅταν $T\to T+\varepsilon$), ὁ συντελεστὴς οὗτος λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{4}$. Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ὁ συντελεστὴς εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{1}{4}$, διότι ἀφ᾽ ἑνὸς ὁ μὲν παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἰς τὰς ἀγκύλας αὐξάνει γραμμικῶς τοῦ x ἀποκρυνομένου τῆς μονάδος, ὁ δὲ ἀριθμητὴς δὲν ὑπερβαίνει κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν τὴν μονάδα, ἀφ᾽ ἑτέρου εἶναι πάντοτε $\frac{x}{(1+x)^2}<\frac{1}{4}$ διὰ $x\neq 1$ καὶ θετικόν.

Συνεπῶς, ὁ μετασχηματιμὸς οὗτος ἐνισχύει κυρίως τὴν περίοδον $T+\varepsilon$, ἡ δὲ ἐνίσχυσις αὐτὴ εἶναι λίαν ἰσχυρὰ ἐν συγκρίσει πρὸς πᾶσαν περίοδον, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος δὲν πλησιάζει πολὺ τὸ $T+\varepsilon$. Συγχρόνως, ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἐπιφέρει ἐξομάλυνσιν τῶν τυχαίων διαταράξεων, διότι ἐνεργεῖ ὡς βαρυκεντρικὸς μέσος ὅρος. Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ μὲ τὸ αὐτὸ $T+\varepsilon$ ἐπὶ τῆς μετεσχηματισμένης καμπύλης, ἐφ᾽ ὅσον ἐπιτρέπει τὸ μῆκος ταύτης. Εἰς τὴν μετεσχηματισμένην μεταβλητὴν (I) ὡς χρόνος θὰ ληφθῇ τὸ τ, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται μεταβλητόν. Τὸ μῆκος τοῦ διαθεσίμου διαστήματος μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς τ θὰ εἶναι κατὰ Δ μικρότερον τοῦ διαστήματος μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς μεταβλητῆς t.

Προκύπτει οὕτω, ἐν τέλει, μία λεία καμπύλη, (ἢ μία ὁμαλὴ διαδοχὴ τιμῶν κατὰ τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογήν), παρουσιάζουσα εὐκρινῶς μίαν ὡρισμένην περίοδον $T+\varepsilon_1$ μεγίστου εὔρους. Ἡ εὑρεθεῖσα οὕτω περίοδος $T+\varepsilon_1$ θὰ ἔχῃ γενικῶς τιμὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ διάστημα T καὶ T+ε. Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ δοθεῖσα μεταβλητὴ περιέχει περίοδον T ἀκριβῶς, καὶ ὄχι T+ε. Ἡ ἰσχυρά, διὰ μικρὸν ε, ἐνίσχυσις τῆς T καὶ ὀλίγον ἰσχυροτέρα τῆς μή, ὅμως, ἀκριβῶς ὑπαρχούσης T+ε, θὰ δώσῃ μίαν περίοδον περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω.

Μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν οὕτως ἀκριβεστέραν τιμὴν $T+\varepsilon_1$ τῆς περιόδου ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν, δηλ. τὸν αὐτὸν μετασχηματισμὸν ἐπὶ τῆς δοθείσης ἀρχικῆς μεταβλητῆς καὶ εὑρίσκομεν μίαν ἔτι ἀκριβεστέραν τιμὴν $T+\varepsilon_2$ τῆς περιόδου. Ἡ ἐργασία αὐτὴ ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου αἱ εὑρισκόμεναι διαδοχικῶς προσεγγίζουσαι τιμαὶ τῆς περιόδου δὲν θὰ παρουσιάζουν πλέον αἰσθητὴν τάσιν μεταβολῆς πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν. Ὁ μέσος ὅρος διαδοχικῶς εὑρεθέντων τιμῶν, μὴ παρουσιαζουσῶν τάσιν μεταβολῆς πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν, θὰ ληφθῇ ὡς τελικὴ τιμὴ T τῆς περιόδου.

Οὕτως ἐπιτυγχάνομεν τὴν προσέγγισιν διττῶς: ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπαναλαμβάνοντες τὸν μετασχηματισμὸν μὲ τὴν αὐτὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν T+ε ἐπὶ τῆς μετεσχηματισμένης μεταβλητῆς ἐφ' ὅσον ἐπιτρέπει τὸ μῆκος μεταβολῆς ταύτης, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀρχίζοντες ἐκ νέου τὸν ὑπολογισμὸν ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς δοθείσης μεταβλητῆς καὶ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἀρχικὸν μῆκος μεταβολῆς της μὲ βαθμιαίως ἀκριβεστέραν τιμὴν τῆς περιόδου καὶ μικρότερον σφάλμα ε.

Συνεπῶς, κύριον χαρακτηριστικὸν τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ἡ ἐναλλασσομένη ἐφαρμογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπαναληπτικῶς μὲ τὴν αὐτὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς περιόδου ἐπὶ τοῦ βαθμηδὸν ἐλαττουμένου μήκους τῆς μεταβλητῆς (ἢ τῆς ἀκολουθίας), ἀφ' ἑτέρου δὲ μὲ τὴν προκύπτουσαν ἀκριβεστέραν τιμὴν τῆς περιόδου ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ μήκους τῆς ἀρχικῆς μεταβλητῆς (ἢ ἀκολουθίας).

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ὁ προταθεὶς μετασχηματισμὸς δύναται νὰ συνδυάζεται μὲ μετασχηματισμὸν διὰ προσθέσεως τῶν προκυπτουσῶν διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (I) μεταβλητῶν (ἢ ἀκολουθιῶν), καταλλήλως ἐκλεγομένων τῶν φ καὶ τῶν προστιθεμένων ἀνὰ δύο ὅρων.

Οὕτω, ἐκ τοῦ τύπου (I) διὰ $\varphi=0$ καὶ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, μὲ $\Delta=K(T+\varepsilon)$, K θετικῶς ἀκέραιος, προκύπτει:

$$I_0=\frac{T^2}{\pi K\varepsilon(2T+\varepsilon)}\,\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\beta+\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right)$$

$$I_{\frac{\pi}{2}}=\frac{T(T+\varepsilon)}{\pi K\varepsilon(2T+\varepsilon)}\,\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\,\eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\beta+\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right)$$

Διὰ $\varepsilon\to 0$ τὸ ὄρισμα τοῦ I_0 προηγεῖται τοῦ ὀρίσματος τοῦ $I_{\frac{\pi}{2}}$ κατὰ $\tau=\frac{T}{4}$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, διὰ νὰ ἔχωμεν εὐνοϊκωτέραν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ, κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν τιμῶν τῶν I_o καὶ $I_{\frac{\pi}{2}}$, λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τοῦ I_o μὲ ὅρισμα ὑστεροῦν κατὰ $\frac{T+\varepsilon}{4}$ ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὅρισμα τοῦ $I_{\frac{\pi}{2}}$. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ γράψωμεν προηγουμένως εἰς τὸ I_o ἀντὶ $\tau \rightarrow \tau - \frac{T+\varepsilon}{4}$, τότε τὸ I_o γίνεται

$$I_{o,\tau-\frac{T+\varepsilon}{4}} = \frac{T^2}{\pi K\varepsilon(2T+\varepsilon)} \eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T} \eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T} + \beta + \frac{\pi\varepsilon(2K-1)}{2T}\right),$$

καὶ

$$I_{\frac{\pi}{2},\tau} + I_{o,\tau-\frac{T+\varepsilon}{4}} =$$

$$= \left(\frac{T}{\pi K\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right)\cdot\left[\frac{T+\varepsilon}{2T+\varepsilon}\eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\beta+\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right)+\frac{T}{2T+\varepsilon}\eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\beta+\frac{\pi\varepsilon(2K-1)}{2T}\right)\right] = \tag{5}$$

$$= \left|\frac{T}{\pi K\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right|.B.\eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\eta\right)$$

ἔνθα

$$B = \underset{+}{\sqrt{\left(\frac{T+\varepsilon}{2T+\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{T}{2T+\varepsilon}\right)^2 + \frac{2T(T+\varepsilon)}{(2T+\varepsilon)^2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\varepsilon}{T}}} \leq 1$$

Συνεπῶς, διὰ $\varepsilon \longrightarrow 0$ εἶναι:

$$I_{\frac{\pi}{2},\tau} + I_{o,\tau-\frac{T+\varepsilon}{4}} = \eta\mu\left(\frac{2\pi\tau}{T}+\eta\right)$$

Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\varepsilon \neq 0$ ὁ συντελεστὴς $\left|\frac{T}{\pi K\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right|\cdot B$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, διότι $\left|\frac{T}{\pi K\varepsilon}\eta\mu\frac{\pi K\varepsilon}{T}\right| < 1$, καὶ $B < 1$. Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον εἰς τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον βελτιώσεως δι' ἀλλεπαλλήλων μετασχηματισμῶν.

Συσχέτισις μὲ ἄλλας μεθόδους: Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (I) θέσωμεν διὰ φ τὰς τιμὰς 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, εὑρίσκομεν τὰ διπλάσια τῶν συντεταγμένων προβολῶν ἑνὸς διανύσματος, προκύπτοντος εἰς τὴν μέθοδον τοῦ περιοδογράμματος *) καὶ χρησιμοποιουμένου ὡς ἑξῆς: Δεικνύεται ὅτι τὸ διάνυσμα τοῦτο εἶναι ἄθροισμα δύο διανυσμάτων, 1) τοῦ «κυρίου διανύσματος», περιστρεφομένου ἰσοταχῶς μετὰ τοῦ τ μὲ περίοδον T καὶ 2) τοῦ «διανύσματος διαταράξεων», διαταράσσοντος τὴν ἰσοταχῆ περιστροφὴν τοῦ πρώτου. Τὰ δύο τελευταῖα διανύσματα δὲν γίνονται γνωστὰ ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν, δεικνύεται ὅμως ὅτι τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος διαταράξεων εἶναι μικρὸν ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἄλλου καὶ θεωρεῖται ὅτι ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ἀρχικοῦ διανύσματος εἶναι ἴση, κατὰ προσέγγισιν, πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ κυρίου διανύσματος καὶ ἐκ τῆς ταχύτητος ταύτης προσδιορίζεται ἡ περίοδος *).

---

*) Βλ. βιβλιογραφίαν (2).

Ἡ ἐπαναληπτικὴ ἐφαρμογὴ ἐπὶ τῶν μετεσχηματισμένων μεταβλητῶν τοῦ μετασχηματισμοῦ (Ι) μὲ καταλλήλως ἐκλεγομένας ἑκάστοτε φάσεις φ, ἔχει ὡς συνέπειαν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συντελεστῶν μεγεθύνσεως εὔρους, τῶν προκυπτόντων δι' ἑκάστου μετασχηματισμοῦ χωριστά. Ἐπαναληπτικὴ ἐφαρμογὴ διαφορετικοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀποτέλεσμα τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑκάστου εὔρους ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του γίνεται καὶ εἰς τὴν μέθοδον τῆς αὐτοσυσχετίσεως **).

Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (5) διὰ προσθέσεως τῶν μετασχηματισθεισῶν συναρτήσεων (ἢ ἀκολουθιῶν), ὁ συντελεστὴς δὲν πολλαπλασιάζεται, πάντως προκύπτει πάλιν βελτιωμένος συντελεστής.

Τὸ διαθέσιμον διάστημα μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἐλαττοῦται κατὰ Δ μετὰ ἀπὸ ἕκαστον μετασχηματισμὸν (1), καὶ κατὰ $\frac{T+\varepsilon}{4}$ μετὰ ἀπὸ ἕκαστον μετασχηματισμὸν (5), τοῦτο ὅμως δὲν ἔχει σημασίαν κατὰ τὴν ἐπανάληψιν τῶν ὑπολογισμῶν μὲ νέαν, ἀκριβεστέραν προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς περιόδου, διότι ἡ ἐπανάληψις αὐτὴ γίνεται μὲ ὁλόκληρον τὸ ἀρχικὸν διάστημα μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine Methode für die genauere Bestimmung der Wellenlänge einer verborgenen persistenten Sinuswelle entwickelt, derer angenäherte Länge nach einer anderen, einfachen Methode gefunden wurde.

Die gegebene Zeitfunktion, welche aus verborgenen Periodizitäten und zufälligen Störungen besteht, wird einer Anzahl von Transformationen unterworfen. Diese setzen sich zusammen aus nacheinanderfolgenden Transformationen (I) mit dem bekannten angenäherten Werte $T+\varepsilon$ der Periode T und mit den Phasen $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$, kombiniert mit der Addition (5) der nach den Transformationen (1) mit $\varphi=0$, und $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ergebenden Zeitfunktionen, versetzt gegeneinander um $\frac{T+\varepsilon}{4}$.

Es ergibt sich nach diesen Transformationen eine Zeitfunktion, aus welcher man eine genauere Bestimmung der Periodenlänge erzielen kann. Mit dieser Periodenlänge werden die Transformationen erneut auf die ursprüngliche Zeitfunktion in ihrem ganzen gegebenen Definitionsinterval

---

**) Βλ. βιβλιογραφίαν (3).

angewandt. Das Mittel der letzten Bestimmungen, wenn diese keine mehr systematische Tendenz nach grösseren oder kleineren Werten zeigen, ist als die endgültige Bestimmung der Periodenlänge anzunehmen.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θ. ΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ, Μέθοδος ἀναζητήσεως περιοδικοτήτων. Δελτ. Ἑλλην. Μαθηματικῆς Ἑταιρ. τόμ. 31, Ἀθῆναι, 1959.

2. KARL STUMPFF, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, Berlin, Verlag v. Julius Springer, 1937.

3. J. FUHRICH, Uber die numerische Ermittlung von Periodizitäten und ihre Beziehung zum Zufallsgesetz, Statisticky Obzor. Prag. 1933.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ. – **Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν συνθηκῶν διαδόσεως τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων μεταξὺ Martina - Franca καὶ Κερκύρας**, ὑπὸ ***Μιχ. Ἀναστασιάδου*** *καὶ* ***Λεωνίδου Καραπιπέρη****.

*Θὰ δημοσιευθῇ κατωτέρω.