GLAVAS, C. B.—«On Geometrical Equivalence and on a Certain Group of Plane Curves», *Proceedings of the Academy of Athens*, 35 (1960). p. 118-126.

GLAVAS, C. B.—«Plane Coordinate Systems in Mathematics Study». Doctoral Dissertation, New York, Teachers College, Columbia University, 1956. 241 p.

GLAVAS, C. B.—«The Principle of Geometrical Equivalence and Some of its Consequences to the Theory of Curves», *Proceedings of the Academy of Athens*, 32 (1957). p. 122-131.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Une méthode de comparaison et ses applications, *par D. Markovitch**, Beograd. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνστ. Παπαϊωάννου.

1. L'idée et le mode de comparaison.

La comparaison comme notion et méthode de raisonnement est très fréquente dans la vie, presque générale. On la rencontre très souvent à des conséquences et à des conclusions diverses déduites en comparant deux situations par leur similitude ou bien par leur contraste. En mathématiques tant plus, on rencontre la comparaison dans toute sa généralité et comme notion et comme méthode. Il suffit de mentionner par exemple que chaque relation mathématique regardée comme notion, n'est qu'une comparaison. Il est naturel qu'une classification concrète dans cet ensemble est possible pour déterminer de plus près le caractère ou l'espèce de la comparaison. Comme nous connaissons on compare les éléments par l'ordre, par la grandeur, par la position mutuelle etc. On peut trouver des exemples mathématiques où la comparaison n'est pas seulement la notion, mais aussi et la méthode de laquelle proviennent les conclusions.

On envisage un ensemble d'expressions, autrement un ensemble de formes (au sens mathématique). On suppose que parmi eux il existe au moins une forme qui possède une ou plusieurs propriétés. Elle sert alors comme la forme typique, le modèle, plus court comme le type. L'accommodement d'une élément quelconque de l'ensemble à ce type fait, que les propriétés apartenant au type se transportent immédiatement sur l'élément accomodé. Dans un ensemble de formes il est possible d'avoir plusieurs

---

* D. MARKOVITCH, Μέθοδος συγκρίσεως καὶ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς.

sous ensembles de formes et aussi plusieurs types, chaque type pour un sous ensemble.

On sait par exemple que la question pratique de calculs des intégrales indéfinies se réduit de trouver sa fonction primitive. Cependant en principe, la méthode consiste en comparaison de la forme différentielle f(x)dx avec une forme différentielle typique (avec sa formule) conformement à la classe (sous ensemble) à qui la forme appartient. L'intégration se fait alors immédiatement comme une conséquence par la similitude.

Je me suis occupé et j'ai fait des applications avec l'ensemble de formes, très souvent rencontrées en mathématiques[1]

1) $$s = \sum_{v=1}^{n} a_v \, b_v$$

a_v, b_v étant réels.

La forme typique dans cet ensemble est

2) $$a = \sum_{v=1}^{n} a_v \, k_v ,$$

a_v étant réels et k_v nonnégatifs, non tous nuls, et assujétis à la condition $\sum_{v=1}^{n} k_v = 1$. Remarquons que le type, peut être écrit aussi

3) $$a = \sum_{v=1}^{n} a_v \, \lambda_v \Big/ \sum_{v=1}^{n} \lambda_v$$

si l'on pose dans (2)

$$k_v = \lambda_v \Big/ \sum_{v=1}^{n} \lambda_v$$

et si l'on suppose que λ_v soient non négatifs et non tous nuls.

Le type a étant la moyenne arithmétique, possède la propriété suivante:

quels que soient les paramètres λ_v, *la valeur* a *appartient toujours à l'intervalle fermé* [m,M] *où*

4) $$M = \operatorname{Max}_{1 \le v \le n} \{a_v\}, \quad m = \operatorname{Min}_{1 \le v \le n} \{a_v\}.$$

[1] Polynomes, séries, les définitions classiques de l'intégrale de Rieman-Stieltjes, formes $\sum_{v=1}^{n} a_n(x) \cdot y^{(v)}$, des équations différentielles etc.

Il est à remarquer que l'intervalle (c'est à dire m respectivement M) est indépendent des λ_v et reste invariable pour tout ensemble des variables λ_v.

L'accommodement d'un élément de l'ensemble (1) se fait:

a) a_v, b_v étant réels, on peut échanger les signes $+$, $-$, de manière qu'ils deviennent positifs, soit tous a_v, soit tous b_v;

b) en supposant positifs tous les b_v, on divise s avec $\sigma = \sum_{v=1}^{n} b_v \ (\sum b_v \neq 0)$

$$5) \qquad s \Big/ \sum_{v=1}^{n} b_v = \sum_{v=1}^{n} a_v b_v \Big/ \sum_{v=1}^{n} b_v ,$$

et on applique à la seconde partie de (5) la propriété du type (3). Il suit

$$6) \qquad m\sigma \leq s \leq M\sigma$$

donc l'élément s'appartient à l'intervalle fermé $[m\sigma, M\sigma]$. La même chose peut se faire en supposant positifs tous les a_v.

Comme on voit, il existe une correspondance entre la relation de similitude des intervalles $[m\sigma, M\sigma]$ et $[m, M]$ d'une part et des éléments correspondants (1) et (2) d'autre part. Les intervalles coïncident $(\sigma = 1)$ en même temps que les éléments (1) et (2). Ce fait nous conduit que nous donnons à l'idée de cette comparaison aussi l'interprétation suivante:

Un élément quelconque de l'ensemble (1) est divisé avec un autre élément du même ensemble, concrétement avec $\sum_{v=1}^{n} c_v \neq 0$, c_v arbitraires et non négatifs, pour le réduire à l'élément particulier (3), c'est à dire à la forme de la moyenne arithmétique. La division peut être conçue comme une comparaison de l'élément $\sum_{v=1}^{n} a_v b_v$ avec $\sum_{v=1}^{n} c_v$ qui le réduit à la forme typique. Puisque il existe un nombre infini d'éléments $\sum_{v=1}^{n} c_v$, avec lesquels on peut comparer une même forme, il suit qu'il existera (en variant c_v) aussi un nombre illimité d'intervalles. D'où il vient le nom de comparaison, mais comme cette comparaison amène quelque élément à la moyenne arithmétique, on peut la nommer *la comparaison à la moyenne arithmétique*. La comparaison de la moyenne arithmétique $\sum_{v=1}^{n} a_v k_v$ avec $\sum_{v=1}^{n} k_n = 1$ est *la comparaison unité*.

2. **Applications.**

J'ai appliqué cette méthode de comparaison le plus à la détermination des limites superieures resp. inférieures des modules des zéros des polynomes [1].

En partant de l'équation en complexe

7) $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = o$$

on peut former l'inégalité

8) $$p^n \leqq |a_{n-1}| p^{n-1} + \ldots + |a_1| p + |a_0|, \ |a_n| = 1, \ |z| = p.$$

En comparant la seconde partie de l'inégalité avec les divers éléments, on obtiendra aussi les diverses limites superieures.

Ainsi par exemple si la comparaison est effectueé avec le polynome

$$Q(\rho) = c_{n-1} p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0$$

c_n arbitraires et *non négatifs*, *on obtiendra* la lim. sup. des modules des zéros de (7) par la racine positive de l'équation

$$P^n = M\,Q(\rho)$$

où $$M = \operatorname{Max}\left\{\frac{|a_v|}{|c_v|}\right\}$$

$$o \leq v \leq n-1.$$

Une modification legère de l'inégalité (8)

$$(1+\lambda)p^n \leqq \lambda p^n + |a_{n-1}| p^{\lambda-1} + \ldots + |a_0|, \lambda > o$$

conparée avec le polynôme

$$Q(\rho) = (\rho + a)^n, \ a > o$$

généralise le théorème suivant de Birkhoff:

λ étant une constante positive et

$$a = \operatorname{Max}\left\{\sqrt[v]{\frac{|a_{n-v}|}{\lambda\binom{n}{v}}}\right\}$$

$$1 \leq v \leq n$$

la lim. sup. des modules des zéros de l'équ. (7) est égale à

$$\frac{a}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{\lambda}} - 1}.$$

La comparaison de l'inégalité [2]

8 a). $$1 \leq \frac{|a_{n-1}|}{p} + \frac{|a_{n-2}|}{p^2} + \ldots + \frac{|a_0|}{p^n}$$

avec la série

[1] Voir Références.

[2] Voir l'inégalité (8).

$$S(\rho) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \ldots,$$

convergente à l'extérieur d'un cercle de centre origine et de rayon $r \neq o$, et dont les coefficients c_v sont les nombres non négatifs, donne le résultat:

La lim. sup. des modules des zéros de l'equ. (7) est répresentée par celle des racines positives de l'équation.

$$1 - M \cdot S(\rho) = o, \; M = \underset{v \in N}{\mathrm{Max}} \left\{ \frac{|a_{n-v}|}{c_v} \right\}$$

qui rend la série convergente.

Pour les valeurs particulières des c_v, on obtiendra les limites connues de Montel, Anghelutza et d'autres.

L'inégalité (8 a) comparée avec

$$\sigma = \frac{|a_{n-1}|}{c_{n-1}} + \frac{|a_{n-2}|}{c_{n-2}} + \cdots + \frac{|a_0|}{|c_0|}$$

donne la limite par la racine positive de l'équ.:

$$1 - \sigma . M(\rho) = o,$$

où

$$M(\rho) = \mathrm{Max} \left\{ \frac{c_{n-v}}{\rho^v} \right\}$$

$$1 \leq v \leq n.$$

Si $c_v = 1$, on obtiendra un théorème de Montel et si $c_v = \sqrt[v]{|a_{n-v}|^{v-1}}$ on obtiendra un théorème de Walsh.

Les résultats analogues s'obtiendront pour la lim. inférieure des modules des zéros de l'équ. (7) si on part de l'inégalité

(9). $$|a_0| \leq |a_1|\rho + |a_2|p^2 + \ldots + |a_n| \rho^n,$$

et si l'on compare d'une manière semblable au précédente.

Une des inégalités (8) ou (8a) est comparée directement. Mais la comparaison peut être faite après une modification. Ainsi par exemple une des égalités mentionnées peut être transformée à l'aide de l'inégalité de Hölder, est puis comparée avec un élément convenablement choisi (voir Références [1], [3]).

Un autre exemple montre l'application de la méthode dans la limitation d'un polynôme trigonométrique, où on a fait d'abord la transformation d'Abel, et puis la comparaison [4].

Soit

$$S_n(\theta) = \sum_{v=o}^{n} a_v \varrho^{v\theta i},$$

a_v étant les nombres complexes, et $o < \theta \leq \bar{u}$.

Après la transformation d'Abel il devient

$$S_n(\theta) = \sum_{v=o}^{n} \Delta a_v \frac{1-\varrho^{(v+1)\theta i}}{1-\varrho\theta i},$$

où

$$\Delta_v = a_{v+1} - a_v, \; a_{n+1} = o.$$

On en tire l'inégalité

$$|\delta_n(\theta)| \leqq \sum_{v=o}^{n} |\Delta a_v| . \left| \frac{1-\varrho^{(v+1)\theta i}}{1-\varrho\theta i} \right|$$

et si on la compare avec

$$L_n = |a_0 - a_1| + |a_1 - a_2| + \ldots |a_{n-1} - a_n| + |a_n|,$$

il viendra

$$|S_n(\theta)| \leqq L_n \operatorname{Max} \left\{ \frac{\operatorname{Sin}\frac{(v+1)\theta}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}} \right\} \leqq \frac{L_n}{\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}}.$$

Remarque I.— Dans tous les cas en haut on a considéré les sommes finies. Mais l'ensemble (1) peut être composé ainsi et des sommes infinies. On ne change rien en idée. On y ajoute seulement les conditions de convergence.

Remarque II.—L'application de la méthode a été faite indirectement, c'est à dire les expressions en complexes sont limitées en modules, et les intervalles (o,M) ainsi obtenues sont positives. Quant aux quantités réeles, elles peuvent être comparées directement. Les intervalles sont alors positifs, resp. négatifs, ou bien positifs et négatifs.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς γενικῆς μεθόδου συγκρίσεως μεταξὺ μαθηματικῶν μορφῶν ὁ συγγραφεὺς εὑρίσκει γενικοὺς τύπους ἀνωτέρων φραγμάτων τῶν μέτρων τῶν ριζῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ μιγαδικοὺς συντελεστάς. Ἡ μέθοδος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς ἄλλας μορφάς.

REFERENCES

1. D. Markovitch, Sur la limite supérieure des modules des racines d'une équation algébrique. Bull. de l'Acad. des sciences math. et nat. A. Sciences math. et phys., No 6. Beograd, pp. 91-97.

2. D. Markovitch, Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynôme. Mathematika, Vol. XV Cluj (Roumaine) 1939, pp. 8-11.

3. D. Markovitch, Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme. Publications de l'Insitut mathématique de l'Acad. serbe des sciences. Beograd, 1948, t. II, pp. 236-142.

4. D. MARKOVITCH, Sur quelques limites des modules d'une somme. Bull. de la Soc. des math. et physiciens, II (1-2), Beograd, 1950, pp. 32-35 (en serbe, résumé en français).

5. D. MARKOVITCH, A propos d'une inégalité de M. Petrovitch. Bull. de la Soc. des math. et phys., XI, Beograd 1950, pp. 44-53 (en serbe, résumé en français).

6. D. MARKOVITCH, Sur la limite inf. des modules des zéros des polynômes de deux variables. Publications de l'Institut mathématique, t.I (15), 1961, pp. 101-107.

Les autres auteurs cités dans cet article se trouvent dans les articles de cette liste.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.- **Factorisation approximative des polynômes par une méthode itérative,** *par D. Markovitch**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνστ. Παπαϊωάννου.

1° **Procédé d'itération.** Soit

1) $$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x^\nu = 0$$

une équation sur le corps C des nombres complexes et x un des ses zéros. D'une manière quelconque on peut exprimer x explicitement comme

2) $$x = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

c'est à dire sous la forme d'une fraction rationelle, le dégré de $Q(x)$ etant $m-1$, et le dégré de $P(x)$ $m-1$ au plus.

Appliquons au second membre de (2) les transformations T_k définies par

3) $$x^k = \frac{x^{k-1}P(x)}{Q(x)}.$$
$$k=1,2,\ldots,m-1.$$

Il deviendra alors

4) $$x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

où il faut effectuer au moyen de l'équation (1) la réduction des puissances x^m, x^{m+1},... à puissance x^{m-1} au plus. Il est possible de répéter les transformations T_k n fois successivement, et ainsi obtenir

5) $$x = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}, \; n \in N,$$

* D. MARCOVITCH, Προσεγγιστικὴ ἀνάλυσις εἰς παράγοντας τῶν πολυωνύμων διὰ μιᾶς μεθόδου ἐπαναλήψεως.