ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 14ΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1979

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΑΙΣΑΡΟΣ ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur une classe de congruences de normales associées aux fonctions harmoniques de deux variables,** *par Othon Pylarinos* *.

RÉSUMÉ

Cet article est consacré à une étude des congruences de normales non isotropes de l'espace euclidien habituel, E^3, sur la surface moyenne de chacune desquelles les surfaces réglées engendrées par ses droites à paramètre distributeur, p, constant - le même sur toutes ces surfaces - déterminent un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de p. Les congruences de normales de E^3 pourvues de cette propriété sont appelées, dans ce qui suit, *congruences du type* N_p.

Après un exposé préliminaire concernant les congruences de normales et en particulier les congruences du type N_p, il est démontré d'abord que la surface moyenne de toute congruence du type N_p est une surface de translation engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe imaginaire, invariable de forme. Ensuite il est démontré qu'à chaque fonction harmonique de deux variables indépendantes on peut associer un ensemble de congruences du type N_p. Les congruences de cet ensemble correspondent aux fonctions d'une seule variable satisfaisant à une équation différentielle ordinaire du troisième

---

* ΟΘ. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ μιᾶς κατηγορίας καθετικῶν εὐθειογενῶν σμηνῶν σχετιζομένων πρὸς τὰς ἁρμονικὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν.**

ordre pour les diverses valeurs $\neq 0$ de l'unique coefficient constant que cette équation renferme. Enfin la forme, qu'une fonction harmonique, φ, des variables u, v doit avoir, est déterminée, afin que les paramètres distributeurs principaux de toute congruence appartenant à l'ensemble de congruences du type N_p associé à cette fonction harmonique, φ (u, v), soient des fonctions de cette même fonction φ seulement et il est démontré que les congruences du type N_p ayant cette propriété avec les congruences dont chacune est engendrée par les normales à sa surface moyeune, qui sont également du type N_p, sont les seules congruences de normales, sur l'enveloppée moyenne de chacune desquelles les surfaces réglées engendrées par ses droites à paramètre distributeur, p, constant — le même sur toutes ces surfaces — déterminent un réseau coujougué, quelle que soit la valeur constante de p.

1. La congruence de droites réelles, C_n, de E^3, à laquelle se rapportent les considérations suivantes, est, par hypothèse, *une congruence de normales non isotrope* qui admet comme *surface moyenne* la surface S définie, par rapport au système des coordonnées Oxyz — choisi comme système de référence fixe dans l'espace E^3 — par l'équation vectorielle:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u, v),^{*} \tag{1. 1}$$

les variables u, v, aux couples de valeurs réelles desquelles dans des intervalles déterminés correspondent les points de S et les droites de C_n, étant choisies de manière que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de C_n soient ses *surfaces développables.*

D'après l'hypothèse faite concernant la congruence C_n, ses surfaces développables v = Cte, u = Cte sont des surfaces réelles, dont les images sur la surface de la sphère-unité ayant comme centre un point fixe de E^3, dans la représentation sphérique de C_n sur elle, forment un réseau orthogonal [**1**, p. 277].

---

* On suppose que $\bar{r}(u, v)$ ainsi que toute autre fonction vectorielle ou scalaire des u, v, qui figure dans cet article, sont pourvues de dérivées par rapport à u et à v jusqu'à l'ordre trois inclus finies et continues dans les intervalles considérés et, si f est une fonction des u, v, on désigne par $f_{u^i v^j}$ la dérivée de f de l'ordre i par rapport à u et de l'ordre j par rapport à v.

Or, si l'on désigne par $\bar{l}(u, v)$ le vecteur-unité qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice courante $l(u, v)$ de C_n, et par $\bar{t}(u, v)$, $\bar{g}(u, v)$ les vecteurs-unités qui au point courant de l'image sphérique Σ de C_n sur la surface de la sphère-unité ayant l'origine O du système Oxyz comme centre (décrite par l'extrémité du vecteur $\bar{l}(u, v)$ mené du point O) déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes $v=$ Cte, $u=$ Cte tracées sur la surface Σ et issues de ce point, d'après les hypothèses faites, on aura:

$$\bar{t}^2 = \bar{g}^2 = \bar{l}^2 = 1, \quad \bar{t} \times \bar{g} = \bar{g} \times \bar{l} = \bar{l} \times \bar{t} = 0, \quad \bar{t} \wedge \bar{g} = \varepsilon \bar{l},^{**} \tag{1. 2}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1, et on peut choisir l'orientation sur les courbes $v=$ Cte, $u=$ Cte tracées sur la surface sphérique Σ de manière que l'on ait:

$$\bar{t} \wedge \bar{g} = \bar{l}. \tag{1. 3}$$

Ainsi le système des trois vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$, qui pour chaque couple de valeurs des u, v dans les intervalles considérés, d'après les relations (1. 2), est trirectangle, est en outre, d'après (1. 3), dans l'ordre indiqué, direct.

Cela étant les dérivées $\bar{l}_u$, $\bar{l}_v$ du vecteur $\bar{l}(u, v)$, qui en chaque point de l'image sphérique Σ de C_n sont respectivement parallèles aux tangentes aux courbes $v =$ Cte, $u =$ Cte tracées sur la surface Σ et issues de ce point, seront liées aux vecteurs-unités $\bar{t}$, $\bar{g}$ par deux relations de la forme:

$$\bar{l}_u = a\bar{t}, \qquad \bar{l}_v = b\bar{g} \tag{1. 4}$$

où a, b sont des fonctions scalaires des u, v, dont aucune, d'après l'hypothèse faite concernant la congruence C_n, ne s'annule identiquement.

Ces deux fonctions, a, b des u, v doivent satisfaire d'une part à l'équation:

$$\left[\frac{b_u}{a}\right]_u + \left[\frac{a_v}{b}\right]_v + ab = 0 \tag{1. 5}$$

qui exprime que la surface (sphérique) Σ, le carré de l'élément linéaire de laquelle, en vertu des (1. 2) et (1. 4), est de la forme:

$$d\sigma^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2, \tag{1. 6}$$

** Les notations $\bar{t} \wedge \bar{g}$, $\bar{t} \times \bar{g}$ désignent les produits, vectoriel et scalaire, des vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$ respectivement.

est une surface à courbure totale constante $=+1$, et d'autre part avec les fonctions vectorielles $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ des u, v — comme on le reconnaît facilement en ayant égard aux (1.2) et (1.4) [**3**, p. 6] — aux équations:

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}_u &= -\frac{a_v}{b}\bar{g} - a\bar{l}, & \bar{t}_v &= \frac{b_u}{a}\bar{g}, \\ \bar{g}_u &= \frac{a_v}{b}\bar{t}, & \bar{g}_v &= -\frac{b_u}{a}\bar{t} - b\bar{l}. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

De même les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1.1) de la surface S peuvent s'écrire sous la forme des fonctions linéaires et homogènes des trois vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$:

$$\bar{r}_u = t_1\bar{t} + g_1\bar{g} + l_1\bar{l}, \qquad \bar{r}_v = t_2\bar{t} + g_2\bar{g} + l_2\bar{l}, \tag{1.8}$$

où t_1, g_1, l_1, t_2, g_2, l_2 sont des fonctions scalaires des u, v, qui doivent satisfaire avec les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ à la condition de compatibilité des deux équations (1.8).

Les scalaires g_1, t_2, que les formules (1.8) renferment, sont nécessairement, d'après les hypothèses faites, tous les deux $\equiv 0$. On le constate, si l'on exprime, en ayant égard aux (1.2), (1.4) et (1.8), que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de C_n sont ses surfaces développables. En outre les deux autres scalaires, t_1, g_2, qui y figurent, sont nécessairement liés à a, b par la relation $t_1 b + g_2 a = 0$, puisque S est, par hypothèse, la surface moyenne de C_n [**3**, p. 17].

Il en résulte que les équations (1.8), si l'on tient compte que l'on a $g_1 = t_2 = 0$, $t_1 b + g_2 a = 0$ et que l'on pose:

$$-\frac{t_1}{a} = \frac{g_2}{b} = p_0, \tag{1.9}$$

où p_0 est une fonction des u, v, qui ne s'annule pas identiquement puisque C_n est une congruence de normales non isotrope, acquièrent dans le cas envisagé la forme:

$$\bar{r}_u = -ap_0\bar{t} + l_1\bar{l}, \qquad \bar{r}_v = bp_0\bar{g} + l_2\bar{l}, \tag{1.10}$$

les scalaires p_0, l_1, l_2, qui y figurent, étant des fonctions des u, v, qui doivent satisfaire avec a (u, v), b (u, v) aux trois équations aux dérivées partielles :

$$\frac{p_{0_u}}{p_0} = -2\frac{b_u}{b} + \frac{l_1}{p_0}, \quad \frac{p_{0_v}}{p_0} = -2\frac{a_v}{a} - \frac{l_2}{p_0}, \quad l_{1_v} - l_{2_u} = 0 \quad (1.11)$$

qui se déduisent, à l'aide des (1. 4) et (1. 7), de la condition de compatibilité des deux équations (1. 10).

Les équations (1. 10), lorsque les scalaires a, b, l_1, l_2, p_0 et les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ qui y figurent sont des fonctions des u, v satisfaisant aux équations (1. 5), (1. 11) et (1. 2), (1. 4), (1. 7) respectivement, déterminent à une translation près la surface S par rapport au système de référence fixe Oxyz ; aussi peut-on admettre, dans l'étude qui suit et qui a trait à des propriétés intrinsèques à la congruence considérée, que sa surface moyenne S est définie par rapport au système Oxyz soit par une équation de la forme (1. 1) soit par deux équations de la forme (1. 10) indifférement, à condition, dans le second cas, que les fonctions vectorielles et scalaires des u, v, que ces deux équations renderment, vérifient les équations qui viennent d'être signalées.

Cela étant, le paramètre distributeur, p, sur la génératrice courante l(u, v) de C_n, de la surface réglée engendrée par des droites de C_n et issue de la droite l, sur laquelle v est une certaine fonction de u : v = v (u), est donnée par la formule :

$$p = \frac{2\,a\,b\,p_0\,\mu}{a^2 + b^2\mu^2}, \quad (1.12)$$

où

$$\mu = \frac{dv}{du}, \quad (1.13)$$

pour les valeurs des u, v, auxquelles la droite l de C_n correspond.

De l'expression (1. 12) de p, à laquelle on parvient en appliquant la formule connue [**5**, p. 192] et en ayant égard aux expressions (1. 4) et (1. 10) des dérivées $\bar{l}_u$, $\bar{l}_v$ et $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du vecteur $\bar{l}$(u, v) et du second membre $\bar{r}$(u, v) de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n, en tenant compte que les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2 de C_n sur sa génératrice l, d'après leur définition, sont les extrêma de p considéré comme fonction de $\mu = \dfrac{dv}{du}$, on déduit aussitôt que les valeurs μ_1, μ_2 de μ, auxquelles p_1, p_2 correspondent, sont :

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{b} \tag{1.14}$$

et que, par conséquent, *les paramètres distributeurs principaux*, p_1, p_2 de C_n, d'après (1. 12), sont :

$$p_1 = p_0, \qquad p_2 = -p_0, \tag{1.15}$$

où p_0 est la fonction (1. 9) des u, v, qui, dans le cas envisagé-comme nous l'avons déjà signalé - ne peut pas s'annuler identiquement.

Par ailleurs, d'après la formule (1. 12), les surfaces réglées engendrées par les droites de C_n, à paramètre distributeur, p, constant — le même sur toutes ces surfaces — sont les surfaces engendrées par les droites de C_n sur chacune desquelles v est une fonction de $u : v = v(u)$, satisfaisant à l'équation différentielle :

$$c\left\{a^2 du^2 + b^2 dv^2\right\} - 2ab\, p_0\, du\, dv = 0, \tag{1.16}$$

où c est la valeur considérée de p sur toutes ces surfaces.

L'équation différentielle (1. 16) pour chaque valeur de c détermine deux systèmes de ∞^1 surfaces réglées engendrées par les droites de C_n sur les génératrices de chacune desquelles son paramètre distributeur, p, est constamment égal à la valeur considérée de c. Ces deux systèmes de surfaces sont en général distincts et déterminent sur la surface moyenne S de C_n un réseau ; ils ne se confondent, d'après l'équation (1. 16), que si — et seulement si — $p_0(u, v)$ est une constante et que l'on ait $c = +p_0$ ou $-p_0$.

Donc l'équation (1. 16) pour les diverses valeurs de la constante c qu'elle renferme, détermine sur la surface moyenne S de C_n un ensemble de réseaux dont chacun correspond à une — et une seule — valeur de c. Dans ce qui suit les réseaux de cet ensemble sur la surface moyenne de la congruence sont appelés — pour abréger — réseaux R_p.

Cela étant, pour que sur la surface moyenne S de C_n le réseau R_p correspondant à une certaine valeur de c soit conjugué, il faut et il suffit que les coefficients L, M, N de la seconde forme différentielle fondamentale de la surface S définie par l'équation (1. 1) soient des fonctions des u, v vérifiant avec les fonctions a, b, p_0 des u, v l'équation:

$$c\{Lb^2 + Na^2\} + 2ab\, p_0 M = 0 \qquad (1.17)$$

pour la valeur considérée de c, à laquelle on parvient si l'on exprime que la condition bien connue, qui est nécessaire et suffisante afin qu'un réseau de courbes tracées sur S soit conjugué, est remplie par les racines μ_1, μ_2 de l'équation (1. 16) en $\mu = \frac{dv}{du}$ pour cette valeur de c.

De l'équation (1. 17), qui est linéaire en c, compte tenu du fait que, d'après l'hypothèse faite concernant la congruence C_n, aucune de fonctions a, b, p_0 des u, v n'est $\equiv 0$, résulte que pour que sur la surface S tous les réseaux R_p soient conjugués et, par conséquent, *pour que la congruence de normales considerée soit une congruence du type* N_p, il faut et il suffit que l'on ait:

$$M = 0, \qquad Lb^2 + Na^2 = 0, \qquad (1.18)$$

les coefficients L, N étant des fonctions des u, v dont aucune ne s'annule identiquement lorsque S est une surface courbe.

Si les conditions (1. 18) sont remplies, C_n est nécessairement une congruence de Ribaucour, car, d'après la première condition (1. 18), le réseau de courbes, que les surfaces développables v = Cte, u = Cte de C_n déterminent sur sa surface moyenne S, est conjugué et cette propriété caractérise — comme on sait [**1**, p. 309] — les congruences de Ribaucour.

Donc, dans ce cas, la congruence de normales C_n est nécessairement une congruence normale de Ribaucour et, cela étant, le réseau formé par les images des surfaces développables v = Cte, u = Cte de C_n sur la surface de la sphère-unité considérée, dans la représentation sphérique de C_n sur elle, doit être isotherme, car cette propriété caractérise les congruences de normales, qui sont à la fois des congruences de Ribaucour [**2**, p. 422].

Or, si les conditions (1. 18) sont remplies, d'après les constatations précédentes, on peut faire correspondre les droites de C_n aux couples de valeurs des deux variables u, v telles que, les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de C_n étant ses surfaces développables, dans les formules (1. 4) on ait:

$$a = b = \lambda(u, v). \qquad (1.19)$$

Ainsi le carré de l'élément linéaire (1. 6) de l'image sphérique Σ de C_n acquiert la forme :

$$d\sigma^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \tag{1.20}$$

le coefficient unique λ qui y figure, étant une fonction des u, v, qui doit satisfaire d'une part à l'équation :

$$\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \lambda^2 = 0 \tag{1.21}$$

et d'autre part avec les fonctions vectorielles $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ des u, v aux équations :

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}_u &= -\frac{\lambda_v}{\lambda}\bar{g} - \lambda\bar{l}, & \bar{g}_u &= \frac{\lambda_v}{\lambda}\bar{t}, & \bar{l}_u &= \lambda\bar{t}, \\ \bar{t}_v &= \frac{\lambda_u}{\lambda}\bar{g}, & \bar{g}_v &= -\frac{\lambda_u}{\lambda}\bar{t} - \lambda\bar{l}, & \bar{l}_v &= \lambda\bar{g}, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

auxquelles se ramènent, grâce aux (1. 19), l'équation (1. 5) et les équations (1. 4), (1. 7) respectivement.

En outre la fonction $\lambda(u, v)$ doit satisfaire avec les fonctions p_0, l_1, l_2 des u, v aux équations :

$$\frac{p_{0_u}}{p_0} = -2\frac{\lambda_u}{\lambda} + \frac{l_1}{p_0}, \quad \frac{p_{0_v}}{p_0} = -2\frac{\lambda_v}{\lambda} - \frac{l_2}{p_0}, \quad l_{1_v} - l_{2_u} = 0, \tag{1.23}$$

qui s'obtiennent, à l'aide des (1. 22), de la condition de compatibilité des deux équations :

$$\bar{r}_u = -\lambda p_0 \bar{t} + l_1 \bar{l}, \quad \bar{r}_v = \lambda p_0 \bar{g} + l_2 \bar{l}, \tag{1.24}$$

auxquelles se ramènent, grâce aux (1. 19), les équations (1. 10) qui expriment les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n.

Enfin, des deux conditions (1. 18) — qui, par hypothèse, sont remplies — la première est identiquement vérifiée, puisque C_n est une congruence normale de Ribaucour et les surfaces v=Cte, u=Cte engendrées par les droites de C_n sont ses surfaces développables, tandis que la seconde, en vertu des (1. 19), acquiert la forme :

$$L + N = 0 \tag{1.25}$$

ou finalement, si l'on y remplace L, N par leurs expressions comme fonctions des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ et $\bar{r}_{u^2}$, $\bar{r}_{v^2}$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1. 1) de la surface S, la forme :

$$(\bar{r}_{u^2} + \bar{r}_{v^2}) \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0 . \qquad (1.26)$$

Mais la différentiation de la première équation (1. 24) par rapport à u et de la seconde par rapport à v conduit, à l'aide des (1. 22) et (1. 23), aux équations :

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{u^2} &= p_0 \lambda_u \bar{t} + p_0 \lambda_v \bar{g} + (l_{1_u} + p_0 \lambda^2)\, \bar{l} , \\ \bar{r}_{v^2} &= - p_0 \lambda_u \bar{t} - p_0 \lambda_v \bar{g} + (l_{2_v} - p_0 \lambda^2)\, \bar{l}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

et la condition (1. 26), si l'on y substitue les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ et $\bar{r}_{u^2}$, $\bar{r}_{v^2}$ par leurs valeurs (1. 24) et (1. 27), devient :

$$l_{1_u} + l_{2_v} = 0. \qquad (1.28)$$

D'autre part, si la congruence considérée C_n est une congruence normale de Ribaucour dont la surface moyenne est définie par les équations (1. 24) et que des quatre fonctions scalaires λ, p_0, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans ces équations et vérifient les équations (1. 21) et (1. 23), les deux dernières l_1, l_2 vérifient en plus l'équation (1. 28), il est aisé de reconnaître, à l'aide des (1. 22) et (1. 23), que les conditions (1. 18) — qui sont nécessaires et suffisantes afin que C_n soit une congruence du type N_p — sont remplies.

On peut donc, en tenant compte du fait que toute congruence du type N_p est nécessairement une congruence normale de Ribaucour, énoncer le :

Théorème I.— *Afin qu'une congruence normale de Ribaucour, dont la surface moyenne par un choix convenable des variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent ses droites, est définie par deux équations de la forme (1. 24), soit une congruence du type N_p, il faut et il suffit que les deux dernières l_1, l_2 des quatre fonctions scalaires λ, p_0, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans ces équations et vérifient les équations (1. 21) et (1. 23), vérifient en plus l'équation (1. 28).*

Remarque. — Si la surface moyenne de la congruence de normales C_n est définie par les équations (1. 24), l'équation (1. 28), à laquelle les fonctions l_1, l_2 des u, v, que ces équations renferment, doivent satisfaire si C_n est une congruence du type N_p, jointe à la troisième équation (1. 23) à laquelle ces deux fonctions des u, v doivent également satisfaire, exprime que *la fonction* $l_1(u, v) - i l_2(u, v)$ *est une fonction analytique de la variable complèxe* $u + iv$, *ou — ce qui revient au même — que* $l_1(u, v)$, $-l_2(u, v)$ *sont deux fonctions harmoniques conjuguées des variables* u, v *dans les intervalles considérés.*

2. Supposons maintenant que la congruence considérée C_n — qui admet la surface S définie par l'équation (1. 1) comme surface moyenne et les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites comme surfaces développables — soit une congruence normale de Ribaucour.

Les suppositions faites permettent d'admettre en plus — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1 — que les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles dans des intervalles déterminés correspondent les droites de C_n, ont été choisies de manière que les expressions (1. 4) et (1. 10) des dérivées $\bar{l}_u$, $\bar{l}_v$ du vecteur $\bar{l}(u, v)$ qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice courante $l(u, v)$ de C_n et du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1. 1) de sa surface moyenne S, acquièrent la forme (1. 22) et (1. 23) respectivement.

Cela étant, si l'on fait correspondre les droites de C_n aux couples de valeurs des variables α, β liées aux variables u, v par les relations:

$$\alpha = u + iv, \qquad \beta = u - iv, \tag{2. 1}$$

on obtient, à l'aide des (1. 22) et (2. 1), pour les dérivées $\bar{l}_\alpha$, $\bar{l}_\beta$ du vecteur $\bar{l}$, considéré comme fonction des α, β, les expressions :

$$\bar{l}_\alpha = \frac{\bar{l}_u - i\bar{l}_v}{2} = \frac{\lambda}{2}(\bar{t} - i\bar{g}), \qquad \bar{l}_\beta = \frac{\bar{l}_u + i\bar{l}_v}{2} = \frac{\lambda}{2}(\bar{t} + i\bar{g}). \tag{2. 2}$$

Or, si l'on pose :

$$\frac{\bar{t} - i\bar{g}}{\sqrt{2}} = \bar{t}', \qquad \frac{\bar{g} - i\bar{t}}{\sqrt{2}} = \bar{g}', \tag{2. 3}$$

on peut écrire les équations (2. 2) sous la forme :

$$\bar{l}_\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{t}', \qquad \bar{l}_\beta = i\frac{\lambda}{2}\bar{g}', \tag{2. 4}$$

tandis que l'on a :

$$\bar{t}' \wedge \bar{g}' = \bar{l}\,. \tag{2. 5}$$

Les équations (2. 4) montrent que les vecteurs $\bar{t}'$, $\bar{g}'$ en chaque point de l'image sphérique Σ de C_n sur la surface de la sphère — unité considérée dans le paragraphe 1, sont respectivement parallèles aux tangentes aux courbes $\beta = \text{Cte}$, $\alpha = \text{Cte}$ tracées sur la surface Σ et issues de ce point, *les courbes $\beta = Cte$, $\alpha = Cte$ tracées sur la surface sphérique Σ étant les lignes de longueur nulle de cette surface.*

En outre, en faisant usage des (1. 22), (1. 23) et (2. 1), (2. 3), (2. 4), on obtient pour les dérivées du premier ordre par rapport à α et à β des vecteurs $\bar{t}'$, $\bar{g}'$ et du second membre de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n, considérés comme fonctions des α, β, les expressions :

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}'_\alpha &= \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}\bar{t}', \qquad \bar{t}'_\beta = -\frac{\lambda_\beta}{\lambda}\bar{t}' - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{l}, \\ \bar{g}'_\alpha &= -\frac{\lambda_\alpha}{\lambda}\bar{g}' + i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{l}, \qquad \bar{g}'_\beta = \frac{\lambda_\beta}{\lambda}\bar{g}' \end{aligned}\right\} \tag{2. 6}$$

et

$$\bar{r}_\alpha = -ip_0\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{g}' + \frac{l_1 - il_2}{2}\bar{l}, \qquad \bar{r}_\beta = -p_0\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{t}' + \frac{l_1 + il_2}{2}\bar{l}\,. \tag{2. 7}$$

Cela étant, la différentiation de la première équation (2. 7) par rapport à β et de la seconde par rapport à α conduit, à l'aide des (2. 4) et (2. 6), aux équations :

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[(\lambda p_0)_\beta + p_0\lambda_\beta - \lambda\frac{l_1 - il_2}{2}\right]\bar{g}' + \frac{(l_1 - il_2)_\beta}{2}\bar{l}, \\ \bar{r}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\lambda p_0)_\alpha + p_0\lambda_\alpha - \lambda\frac{l_1 + il_2}{2}\right]\bar{t}' + \frac{(l_1 + il_2)_\alpha}{2}\bar{l} \end{aligned}\right\} \tag{2. 8}$$

et la condition de compatibilité des deux équations (2. 7) implique, eu égard aux (2. 5) et (2. 8), que les scalaires λ, p_0, l_1, l_2, qui y figurent, considérés comme fonctions des α, β, doivent satisfaire aux équations:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda p_0)_\alpha + p_0 \lambda_\alpha - \lambda \frac{l_1 + i l_2}{2} = 0, \quad (\lambda p_0)_\beta + p_0 \lambda_\beta - \lambda \frac{l_1 - i l_2}{2} = 0, \\ (l_1 - i\, l_2)_\beta = (l_1 + i\, l_2)_\alpha . \end{aligned}\right\} \tag{2. 9}$$

Mais, en vertu des (1. 24) et (2. 1), on a:

$$\left.\begin{aligned} (l_1 - i\, l_2)_\beta &= \frac{(l_{1_u} - i\, l_{2_u}) + i\,(l_{1_v} - i\, l_{2_v})}{2} = \frac{l_{1_u} + l_{2_v}}{2} \\ (l_1 + i\, l_2)_\alpha &= \frac{(l_{1_u} + i\, l_{2_u}) - i\,(l_{1_v} + i\, l_{2_v})}{2} = \frac{l_{1_u} + l_{2_v}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2. 10}$$

On aura donc, grâce aux (2. 9) et (2. 10):

$$\bar{r}_{\alpha\beta} = \bar{r}_{\beta\alpha} = \frac{l_{1_u} + l_{2_v}}{4}\, \bar{l}\,, \tag{2. 11}$$

et on déduit de là, en ayant égard aux hypothèses faites concernant la congruence C_n et les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent ses droites, que, si C_n est une congruence du type N_p, d'après le théorème I, on aura:

$$\bar{r}_{\alpha\beta} = 0\,; \tag{2. 12}$$

ce qui montre que, dans ce cas, le second membre de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n est nécessairement une fonction des α, β de la forme:

$$\bar{r}\,(\alpha, \beta) = \bar{r}_1(\alpha) + \bar{r}_2(\beta) \tag{2. 13}$$

et que, par conséquent, S est une surface de translation engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe imaginaire invariable de forme. Les diverses positions de ces deux courbes imaginaires sur la surface S sont les courbes $\beta = \text{Cte}$, $\alpha = \text{Cte}$ tracées sur elle, qui admettent comme images, dans la représentation sphérique de la congruence, les lignes de longueur nulle de son image sphérique.

On peut donc formuler le

Théorème II.— *La surface moyenne de toute congruence du type N_p est une surface de translation engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe imaginaire invariable de forme. Les diverses positions* *des deux courbes imaginaires qui engendrent cette surface, admettent comme images, dans la représentation sphérique de la congruence, les lignes de longueur nulle de son image sphérique.*

Par ailleurs, si la surface moyenne S de la congruence considérée C_n — qui, par hypothèse, est une congruence normale de Ribaucour — est définie par les équations (1. 24), d'après les deux premières équations (1. 23) auxquelles doivent satisfaire les fonctions scalaires λ, p_0, l_1, l_2 des u, v, que les équations (1. 24) renferment, les fonctions $-\frac{l_1}{p_0}$, $\frac{l_2}{p_0}$ sont les dérivées du premier ordre par rapport à u et à v d'une même fonction f(u, v):

$$-\frac{l_1}{p_0} = f_u, \qquad \frac{l_2}{p_0} = f_v, \tag{2.14}$$

qui est liée aux fonctions λ, p_0 des u, v par une relation de la forme:

$$p_0 \lambda^2 = c' e^{-f}, \tag{2.15}$$

où c' est une constante nécessairement $\neq 0$.

Si l_1, $l_2 \equiv 0$, la fonction f(u, v) se réduit à une constante et, d'après les équations (1. 24), la congruence C_n est engendrée par les normales à sa surface moyenne S. Dans ce cas, la surface S est une surface minima et la congruence C_n engendrée par les normales à S est une congruence du type N_p [**4**, p. 173].

Si l_1, l_2 ne sont pas tous les deux $\equiv 0$, la fonction f(u, v), d'après les relations (2. 14), doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles:

$$l_2 f_u + l_1 f_v = 0 \tag{2.16}$$

et, au cas où C_n est une congruence du type N_p, l'équation différentielle ordinaire:

$$l_1 du - l_2 dv = 0 \tag{2.17}$$

à l'intégration de laquelle se ramène l'intégration de l'équation (2. 16), admet la fonction $\frac{1}{l_1^2 + l_2^2}$ des u, v comme facteur intégrant.

En effet, on reconnaît aussitôt, en tenant compte que, dans ce cas, les fonctions l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans l'équation (1. 16), vérifient la troisième équation (1. 23), et — d'après le théorème I — l'équation (1. 28), que la condition nécessaire et suffisante :

$$\left[\frac{l_1}{l_1^2+l_2^2}\right]_v = \left[\frac{-l_2}{l_1^2+l_2^2}\right]_u,$$

afin que la fonction $\frac{1}{l_1^2+l_2^2}$ des u, v soit un facteur intégrant de l'équation différentielle (2. 17), est remplie.

Donc, si C_n est une congruence du type N_p, qui n'est pas engendrée par les normales à sa surface moyenne S, la fonction f(u, v) qui figure dans la relation (2. 15) et vérifie l'équation (2. 16) est une fonction de la seule fonction $\varphi(u, v)$:

$$f = f(\varphi), \tag{2.18}$$

dont les dérivées du premier ordre par rapport à u et à v sont :

$$\varphi_u = \frac{l_1}{l_1^2+l_2^2}, \quad \varphi_v = -\frac{l_2}{l_1^2+l_2^2}. \tag{2.19}$$

Cela étant on obtient pour les dérivées φ_{u^2}, φ_{v^2} de la fonction $\varphi(u,v)$ les expressions :

$$\varphi_{u^2} = \frac{l_{1_u}(l_2^2-l_1^2) - 2\,l_1 l_2 l_{2_u}}{(l_1^2+l_2^2)^2}, \quad \varphi_{v^2} = \frac{l_{2_v}(l_2^2-l_1^2) + 2\,l_1 l_2 l_{1_v}}{(l_1^2+l_2^2)^2} \tag{2.20}$$

et on déduit de là que, dans le cas envisagé, la fonction $\varphi(u, v)$ vérifie, en vertu de (1. 28) et de la troisième équation (1. 24), l'équation aux dérivées partielles :

$$\varphi_{u^2} + \varphi_{v^2} = 0.$$

Donc φ *est une fonction harmonique des variables* u, v.

Par ailleurs, dans ce cas, les deux relations (2. 14) qui, grâce à (2. 18), acquièrent la forme :

$$l_1 = -p_0\,\dot{f}\,\varphi_n, \quad l_2 = p_0\,\dot{f}\,\varphi_v,\,^{*} \tag{2.21}$$

* Les points désignent les dérivées par rapport à la variable φ.

se ramènent, si l'on y remplace φ_u, φ_v par leurs valeurs (2. 19), à la relation :

$$p_0 \dot{f} = -(l_1^2 + l_2^2) \tag{2.22}$$

et la relation (2. 15), si l'on y porte la valeur de p_0 tirée de (2. 22), devient :

$$\lambda^2 = -\frac{c'}{l_1^2 + l_2^2} e^{-f} \dot{f}. \tag{2.23}$$

Mais, cela étant, on obtient, à l'aide des (2. 18) et (2. 19), pour les dérivées logarithmiques par rapport à u et à v de $\lambda(u, v)$ les expressions :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_u}{\lambda} &= \frac{1}{2}\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]\varphi_u - l_{1_u}\varphi_u + l_{2_u}\varphi_v, \\ \frac{\lambda_v}{\lambda} &= \frac{1}{2}\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]\varphi_v - l_{1_v}\varphi_u + l_{2_v}\varphi_v \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

et de là pour les dérivées $\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u$, $\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v$ les expressions :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u &= \frac{1}{2}\dot{\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]}\varphi_u^2 + \frac{1}{2}\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]\varphi_{u^2} - \\ &\quad - l_{1_{u^2}}\varphi_u + l_{2_{u^2}}\varphi_v - l_{1_u}\varphi_{u^2} + l_{2_u}\varphi_{uv} \\ \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v &= \frac{1}{2}\dot{\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]}\varphi_v^2 + \frac{1}{2}\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]\varphi_{v^2} - \\ &\quad - l_{1_{v^2}}\varphi_u + l_{2_{v^2}}\varphi_v - l_{1_v}\varphi_{uv} + l_{2_v}\varphi_{v^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Ainsi, grâce aux (2. 23) et (2. 25), l'équation aux dérivées partielles (1. 21), à laquelle doit satisfaire la fonction $\lambda(u, v)$, se réduit, à l'aide des (1. 24), (1. 28), (2. 19), (2. 20) et du fait que, d'après la remarque finale du paragraphe 1, l_1, l_2 sont, dans le cas envisagé, des fonctions harmoniques des u, v, à l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{\left[-\dot{f} + \frac{\ddot{f}}{\dot{f}}\right]} - 2c'e^{-f}\dot{f} = 0, \tag{2.26}$$

à laquelle doit satisfaire f considérée comme fonction de φ, la constante unique c', qu'elle renferme, étant nécessairement $\neq 0$.

L'intégration de l'équation (2. 26) s'obtient par des quadratures, quelle que soit la valeur $\neq 0$ de la constante c' ; on le voit aussitôt en tenant compte que cette équation, si l'on pose ;

$$e^{-f(\varphi)} = \sigma(\varphi), \tag{2. 27}$$

se ramène à l'équation :

$$\dot{\left[\frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\right]} + 2c'\dot{\sigma} = 0. \tag{2. 28}$$

D'autre part, il est aisé de reconnaître que les quatre fonctions des u, v :

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \left[c'\frac{d\sigma}{d\varphi}(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)\right]^{\frac{1}{2}}, & p_0 &= \frac{\sigma}{(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)\dfrac{d\sigma}{d\varphi}}, \\ l_1 &= \frac{\varphi_u}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}, & l_2 &= -\frac{\varphi_v}{\varphi_u^2 + \varphi_v^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2. 29}$$

où c' est une constante $\neq 0$, φ une fonction des u, v et f une fonction de $\varphi(u, v)$, vérifient les équations (1. 21), (1. 23) et (1. 28), lorsque φ est une fonction harmonique des u, v et σ est une fonction de φ satisfaisant à l'équation différentielle (2. 28) pour la valeur considérée de la constante c'.

Or, si l'on considère quatre fonctions des u, v de la forme (2. 29), en supposant que des deux fonctions $\varphi(u, v)$ et $\sigma(\varphi)$ qui y figurent, la première soit une fonction harmonique des u, v et la seconde une fonction de $\varphi(u, v)$ satisfaisant à l'équation différentielle (2. 28) pour une valeur donnée $\neq 0$ de c' et que l'on choisisse les coordonnées curvilignes u, v sur la surface de la sphère-unité considérée ou sur une partie Σ de cette surface de manière que le carré de son élément linéaire affecte la forme (1. 20), le coefficient unique λ qui y figure étant la première de quatre fonctions considérées des u, v, au réseau (u, v) sur la surface sphérique Σ, qui est isotherme, on peut associer une congruence du type N_p définie à une translation près par rapport au système de référence Oxyz. La surface moyenne de cette congruence est la surface S définie à une translation près par les équations compatibles, que l'on obtient des deux équations (1. 24) en y remplaçant les scalaires λ, p_0, l_1, l_2 et les vecteurs

$\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ qui y figurent par les quatre fonctions des u, v considérées et par les vecteurs-unités qui, au point courant de la surface Σ, déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes v=Cte, u=Cte tracées sur Σ et issues de ce point et de la normale à Σ en ce même point respectivement. Les surfaces S, Σ sont représentées, l'une sur l'autre, de manière que deux points homologues des deux surfaces, dans cette représentation, correspondent à un même couple de valeurs des u, v, la droite de la congruence issue de chaque point de la surface S étant parallèle à la normale à la surface Σ au point homologue de ce point de S.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

Théorème III.— *A chaque fonction harmonique de deux variables indépendantes on peut associer un ensemble de congruences du type* N_p. *Les congruences de cet ensemble correspondent aux fonctions d'une seule variable satisfaisant à l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre (2. 28) pour les diverses valeurs* $\neq 0$ *du coefficient unique* c' *que cette équation renferme.*

3. Supposons enfin que *l'enveloppée moyenne* de la congruence de normales considérée C_n soit une surface S' qui ne se confond pas avec la surface moyenne S de C_n.

L'équation vectorielle par rapport au système de référence Oxyz de l'enveloppée moyenne S' de C_n peut s'écrire — comme on le reconnaît facilement [**4**, p. 181] — sous la forme :

$$\bar{r}' = \bar{r}'(u, v) = \bar{r}(u, v) + \frac{l_1}{a}\bar{t} + \frac{l_2}{b}\bar{g}, \tag{3. 1}$$

où $\bar{r}(u, v)$ est le second membre de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n et a, b, l_1, l_2 sont les fonctions scalaires des u, v, qui avec $p_0(u, v)$ et les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ figurent dans les expressions (1. 10) des derivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ de $\bar{r}(u, v)$.

L'enveloppée moyenne S' de C_n, d'après son équation (3. 1), ne se confond avec la surface moyenne S de C_n que si — et seulement si — $l_1 = l_2 \equiv 0$. Dans ce cas C_n est engendrée par les normales à sa surface moyenne S et elle est — comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 2 — une congruence du type N_p ; par conséquent *tous les réseaux* R_p *sur la surface moyenne de* C_n *, qui, dans ce cas, est à la fois son enveloppée moyenne, sont conjugués.*

Or, si $l_1(u, v)$, $l_2(u, v)$ ne sont pas toutes les deux $\equiv 0$, l'enveloppée moyenne S′ de C_n ne coïncide pas avec sa surface moyenne S et, d'après sa définition, elle est représentée sur la surface moyenne S de C_n de manière que le point de S′ homologue, dans cette représentation, du point courant de S est le point de contact de S′ avec le plan perpendiculaire à la droite de C_n issue de ce point de S en ce même point.

Dans cette représentation des surfaces S, S′, l'une sur l'autre, deux points homologues de ces surfaces correspondent à un même couple de valeurs des u, v ; par suite l'équation (1. 16) qui pour une certaine valeur de la constante c qu'elle renferme est — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1 — l'équation différentielle du réseau de courbes que les surfaces réglées engendrées par les droites de C_n à paramètre distributeur constant : $p = c$ déterminent sur sa surface moyenne S, est aussi l'équation différentielle du réseau de courbes que ces mêmes surfaces déterminent sur l'enveloppée moyenne S′ de C_n.

Cela étant, si L′, M′, N′ sont les coefficients de la seconde forme différentielle fondamentale de la surface S′ définie par l'équation (3. 1), pour que le réseau défini sur elle par l'équation différentielle (1. 16) pour une certaine valeur de c soit conjugué, il faut et il suffit, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1, que l'on ait :

$$c\{L' b^2 + N' a^2\} + 2 a b p_0 M' = 0, \tag{3. 2}$$

et de là on déduit aussitôt que pour que ce réseau de courbes tracées sur la surface S′ soit conjugué quelle que soit la valeur de c, il faut et il suffit que l'on ait :

$$M' = 0, \qquad L' b^2 + N' a^2 = 0. \tag{3. 3}$$

Donc, si l'enveloppée moyenne de C_n est une surface S′, sur laquelle les surfaces réglées engendrées par les droites de C_n à paramètre distributeur, p, constant — le même sur toutes ces surfaces — déterminent un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de p, le second membre $\bar{r}'(u, v)$ de l'équation (3. 1) de S' doit être une fonction des u, v satisfaisant, d'après la première condition (3. 3), à l'équation:

$$\bar{r}'_{uv} \times (\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v) = 0\,, \tag{3. 4}$$

et avec a(u, v), b(u, v), d'après la seconde condition (3. 3), à l'équation:

$$(\bar{r}'_{u^2} b^2 + \bar{r}'_{v^2} a^2) \times (\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v) = 0\,. \tag{3. 5}$$

Mais en différentiant l'équation (3. 1) par rapport à u et à v on obtient, à l'aide des (1. 7) et (1. 10), les équations:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}'_u &= \left[-ap_0 + \left(\frac{l_1}{a}\right)_u + l_2 \frac{a_v}{b^2}\right]\bar{t} + \left[\left(\frac{l_2}{b}\right)_u - l_1 \frac{a_v}{ab}\right]\bar{g} \equiv \lambda_1 \bar{t} + \mu_1 \bar{g}\,, \\ \bar{r}'_v &= \left[\left(\frac{l_1}{a}\right)_v - l_2 \frac{b_u}{ab}\right]\bar{t} + \left[bp_0 + \left(\frac{l_2}{b}\right)_v + l_1 \frac{b_u}{a^2}\right]\bar{g} \equiv \lambda_2 \bar{t} + \mu_2 \bar{g} \end{aligned}\right\} \tag{3. 6}$$

et de là les équations:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}'_{u^2} &= \left[\lambda_{1_u} + \mu_1 \frac{a_v}{b}\right]\bar{t} + \left[\mu_{1_u} - \lambda_1 \frac{a_v}{b}\right]\bar{g} - a\lambda_1 \bar{l}\,, \\ \bar{r}'_{uv} &= \left[\lambda_{1_v} - \mu_1 \frac{b_u}{a}\right]\bar{t} + \left[\mu_{1_v} + \lambda_1 \frac{b_u}{a}\right]\bar{g} - b\mu_1 \bar{l}\,, \\ \bar{r}'_{vu} &= \left[\lambda_{2_u} + \mu_2 \frac{a_v}{b}\right]\bar{t} + \left[\mu_{2_u} - \lambda_2 \frac{a_v}{b}\right]\bar{g} - a\lambda_2 \bar{l}\,, \\ \bar{r}'_{v^2} &= \left[\lambda_{2_v} - \mu_2 \frac{b_u}{a}\right]\bar{t} + \left[\mu_{2_v} + \lambda_2 \frac{b_u}{a}\right]\bar{g} - b\mu_2 \bar{l}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3. 7}$$

et, si l'on substitue dans les équations (3. 4) et (3. 5) les dérivées du premier et du second ordre par rapport à u et à v de $\bar{r}'(u, v)$ par leurs valeurs (3. 6) et (3. 7), et que l'on tienne compte de ce que l'on a $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$, puisque l'enveloppée moyenne de C_n est une surface, on parvient de l'équation (3. 4), aux deux équations:

$$a\mu_1 = l_{2_u} - l_2 \frac{b_u}{b} - l_1 \frac{a_v}{a} = 0, \qquad b\lambda_2 = l_{1_v} - l_1 \frac{a_v}{a} - l_2 \frac{b_u}{b} = 0 \tag{3. 8}$$

qui, en vertu de la troisième équation (1. 11): $l_{1_v} - l_{2_u} = 0$, sont identiques et peuvent être remplacées évidemment par l'équation:

$$l_{1_v} + l_{2_u} - 2\, l_1 \frac{a_v}{a} - 2\, l_2 \frac{b_u}{b} = 0, \tag{3. 9}$$

et de même de l'équation (3. 5) à l'équation :

$$\lambda_1 b + \mu_2 a = 0. \tag{3.10}$$

Par ailleurs la condition de compatibilité des deux équations (3. 6), qui, si les équations (3. 8) et (3. 10) sont vérifiées, deviennent :

$$\bar{r}'_u = \lambda_1 \bar{t}, \qquad \bar{r}'_v = \mu_2 \bar{g}, \tag{3.11}$$

implique, eu égard aux (1. 7), que les scalaires λ_1, μ_2, qui y figurent, doivent être des fonctions des u, v satisfaisant avec a(u, v), b(u, v) aux équations :

$$\lambda_{1_v} - \mu_2 \frac{a_v}{b} = 0, \qquad \mu_{2_u} - \lambda_1 \frac{b_u}{a} = 0 \tag{3.12}$$

ou bien, grâce à (3. 10), aux équations :

$$\lambda_{1_v} + \lambda_1 \frac{a_v}{a} = 0, \qquad \mu_{2_u} + \mu_2 \frac{b_u}{b} = 0; \tag{3.13}$$

ce qui montre que, dans ce cas les produits $a\lambda_1$ et $b\mu_2$ doivent être des fonctions de la seule variable u et de la seule variable v respectivement :

$$a\lambda_1 = \sigma_1(u), \qquad b\mu_2 = \sigma_2(v). \tag{3.14}$$

Donc, si les équations (3. 9) et (3. 10), auxquelles se ramènent les équations (3. 3), sont vérifiées, grâce aux (3. 10) et (3. 14), on aura :

$$\frac{\sigma_1(u)}{a^2} + \frac{\sigma_2(v)}{b^2} = 0,$$

et on déduit de là que, dans ce cas, les images sur la surface de la sphère-unité considérée dans le paragraphe 1 des surfaces développables v = Cte, u = Cte de C_n dans sa représentation sphérique, forment un réseau isotherme et que, par conséquent, la congruence de normales C_n est nécessairement une congruence normale de Ribaucour.

Cela étant, les variables u, v peuvent être choisies de manière que, les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de C_n étant ses surfaces développables, dans les formules (1. 4) on ait : $a = b = \lambda(u, v)$. Ainsi les expressions (1. 10) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1. 1) de la surface moyenne S de C_n acquièrent la forme (1. 24) et les fonctions λ, p_0, l_1, l_2 des u, v, qui y figurent et vérifient les équations (1.21) et (1.23), doivent vérifier en plus, d'après l'hypothèse faite, les équations:

$$l_{1_v} + l_{2_u} - 2\,l_1 \frac{\lambda_v}{\lambda} - 2\,l_2 \frac{\lambda_u}{\lambda} = 0 \tag{3.15}$$

et
$$\lambda_1 + \mu_2 = \left(\frac{l_1}{\lambda}\right)_u + \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)_v + l_1 \frac{\lambda_u}{\lambda^2} + l_2 \frac{\lambda_v}{\lambda^2} = \frac{l_{1_u} + l_{2_v}}{\lambda} = 0, \tag{3.16}$$

auxquelles se ramènent les équations (3.9) et (3.10) respectivement, si l'on y substitue a et b par λ.

Mais, d'après les deux premières équations (1.23), les fonctions l_1, l_2, p_0 des u, v doivent vérifier l'équation:

$$\left(\frac{l_1}{p_0}\right)_v + \left(\frac{l_2}{p_0}\right)_u = \frac{l_{1_v} + l_{2_u}}{p_0} - l_1 \frac{p_{0_v}}{p_0^2} - l_2 \frac{p_{0_u}}{p_0^2} = 0, \tag{3.17}$$

tandis qu'à la fois elles doivent satisfaire à l'équation:

$$l_{1_v} + l_{2_u} + l_1 \frac{p_{0_v}}{p_0} + l_2 \frac{p_{0_u}}{p_0} = 0, \tag{3.18}$$

à laquelle se réduit l'équation (3.15), si l'on y substitue $\frac{\lambda_u}{\lambda}$, $\frac{\lambda_v}{\lambda}$ par leurs valeurs tirées de ces mêmes équations (1.23), et les équations (3.17), (3.18) jointes à l'équation (3.16) et à la troisième équation (1.23) montrent que, dans le cas envisagé, on a nécessairement:

$$l_{1_v} = 0, \quad l_{2_u} = 0, \quad l_1 p_{0_v} + l_2 p_{0_u} = 0, \quad l_{1_u} + l_{2_v} = 0. \tag{3.19}$$

La dernière équation (3.19) exprime, d'après le théorème I, que la congruence de normales C_n est nécessairement, dans ce cas, une congruence du type N_p. Cela étant, d'après la troisième équation (3.19) — qui, si l'on y substitue l_1, l_2 par leurs expressions (2.29) comme fonctions des dérivées φ_u, φ_v de la fonction harmonique $\varphi(u, v)$ définissant l'ensemble de congruences du type N_p auquel C_n appartient, devient: $p_{0_u}\varphi_v - p_{0_v}\varphi_u = 0$ et, d'après (1.15), les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2 de C_n sont des fonctions de la seule fonction $\varphi(u, v)$.

D'autre part, si C_n est une congruence du type N_p, qui n'est pas engendrée par les normales à sa surface moyenne S et que la surface S soit définie par deux équations de la forme (1.24), les fonctions scalaires λ, p_0, l_1, l_2 des u, v, qui y figurent et vérifient les équations (1.21), (1.23) et (1.28), vérifient en plus les équations (3.3), lorsque les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2 de C_n — où, d'après (1.15), $p_1 = -p_2 \equiv p_0$, sont des fonctions de la seule fonction harmonique $\varphi(u, v)$, relative à l'ensemble de congruences du type N_p auquel C_n appartient; par suite les surfaces réglées engendrées par les droites de C_n à paramètre distributeur p constant — le même sur toutes ces surfaces — déterminent, dans ce cas, sur l'enveloppée moyenne de C_n un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de p.

On peut donc, en tenant compte du fait qu'une congruence de normales, dont l'enveloppée moyenne se confond avec sa surface moyenne, est engendrée par les normales à sa surface moyenne et que, par conséquent, elle est une congruence du type N_p qui jouit évidemment de la propriété qui vient d'être signalée, formuler le

Théorème IV.— *Les congruences du type* N_p, *les paramètres distributeurs principaux de chacune desquelles sont des fonctions de la seule fonction harmonique des deux variables, à laquelle est associé l'ensemble de congruences de ce type auquel appartient la congruence envisagée, sont avec les congruences dont chacune est engendrée par les normales à sa surface moyenne, qui sont également du type* N_p, *les seules congruences de normales, sur l'enveloppée moyenne de chacune desquelles les surfaces réglées engendrées par ses droites à paramètre distributeur,* p, *constant — le même sur toutes ces surfaces — déterminent un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de* p.

Il est à noter que les équations (3.19) jointes à la troisième équation (1.23) permettent de déterminer la forme qu'une fonction harmonique $\varphi(u, v)$ doit avoir, afin que les congruences du type N_p appartenant à l'ensemble associé à une fonction harmonique de cette forme, soient pourvues de la propriété signalée dans le théorème IV.

En effet, d'après les équations (3.19) et la troisième équation (1.23) les scalaires l_1, l_2, que les équations (1.24) de la surface moyenne S de C_n renferment, lorsque C_n est une congruence de normales, qui, n'étant pas engendrée par les normales à sa surface moyenne, jouit de la propriété signalée, sont des fonctions linéaires de u et de v respectivement de la forme:

$$l_1 = cu + c_1, \qquad l_2 = -cv + c_2, \tag{3.20}$$

où c, c_1, c_2 sont des constantes dont au moins une est $\neq 0$.

Cela étant, on peut distinguer deux cas suivant que la constante c est $\neq$ ou $= 0$.

Si $c \neq 0$, la fonction harmonique $\varphi(u, v)$ relative à l'ensemble de congruences du type N_p auquel C_n appartient, est — comme on le reconnaît aussitôt en remplaçant dans les formules (2. 19) l_1, l_2 par leurs valeurs (3. 20) — de la forme :

$$\varphi = \frac{1}{2c} \log\left\{(cu + c_1)^2 + (-cv + c_2)^2\right\} \tag{3. 21}$$

et les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de toute congruence appartenant à l'ensemble de congruences du type N_p associé à une fonction harmonique, $\varphi(u, v)$, de la forme (3. 21), sont — comme on le constate en ayant égard aux (1. 15) et à la seconde formule (2. 29) — des fonctions de la seule fonction $\varphi(u, v)$.

Si $c = 0$, d'après (3. 20), l_1, l_2 sont respectivement égaux aux constantes c_1, c_2, dont au moins une est $\neq 0$. Dans ce cas la fonction harmonique $\varphi(u, v)$ est, d'après les formules (2. 19), la fonction linéaire des u, v :

$$\varphi(u, v) = c_1 u - c_2 v \tag{3. 22}$$

et on reconnaît aussitôt, à l'aide des (1. 15) et de la seconde formule (2. 29), que même dans ce cas les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de toute congruence appartenant à l'ensemble de congruences du type N_p associé à une fonction (harmonique) φ de la forme (3. 22), sont des fonctions de la seule fonction φ.

En outre, si l'on tient compte du fait que, lorsque les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, d'une congruence C_n du type N_p sont des fonctions de la seule fonction harmonique, $\varphi(u, v)$, relative à l'ensemble de congruences de ce type auquel C_n appartient, d'après (1. 15), (2. 15) et (2. 18), il en est de même de $\lambda(u, v)$, et que, par conséquent, si la fonction harmonique $\varphi(u, v)$ est de la forme (3. 22), les équations (1. 24) de la surface moyenne S de la congruence C_n acquièrent la forme :

$$\bar{r}_u = -\lambda(\varphi)\, p_0(\varphi)\, \bar{t} + c_1 \bar{l}, \qquad \bar{r}_v = \lambda(\varphi)\, p_0(\varphi)\, \bar{g} + c_2 \bar{l}, \tag{3. 23}$$

on voit facilement, en différentiant les équations (3. 23) par rapport à u et à v et en ayant égard aux formules (1. 22) et à la forme (3. 22) de la fonction $\varphi(u, v)$, que les courbures totale K et moyenne H de la surface

S sont des fonctions de la seule fonction φ et que, par conséquent, S est, dans ce cas, une surface - W.

Les constatations précédentes permettent d'énoncer le

Théorème V.— *Si les paramètres distributeurs principaux d'une congruence du type* N_p *sont des fonctions de la seule fonction harmonique* $\varphi(u, v)$ *relative à l'ensemble de congruences de ce type, auquel cette congruence appartient, la fonction harmonique* $\varphi(u, v)$ *est ou bien de la forme (3. 20), la première de constantes* c, c_1, c_2, *qui y figurent, étant* $\neq 0$, *ou bien une fonction linéaire des* u, v *à coefficients constants ; dans le dernier cas la surface moyenne de la congruence est une surface* - W.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην — ἀναφερομένην εἰς τὰ μὴ ἰσότροπα καθετικὰ σμήνη εὐθειῶν τοῦ συνήθους τριδιαστάτου χώρου, ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ σμήνους σχηματιζόμεναι (εὐθειογενεῖς) ἐπιφάνειαι σταθερᾶς παραμέτρου διανομῆς, p — τῆς αὐτῆς ἐφ' ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων — ὁρίζουν δίκτυον καμπύλων συζυγὲς οἱασδήποτε οὔσης τῆς τιμῆς τῆς p καὶ τὰ ὁποῖα, συντομίας χάριν, καλοῦνται σμήνη N_p — δίδεται ἐν ἀρχῇ, μεταξὺ ἄλλων στοιχείων χρησίμων διὰ τὰ ἑπόμενα, συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία, ἵνα καθετικὸν σμῆνος εἶναι σμῆνος N_p. Ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μέση ἐπιφάνεια παντὸς σμήνους N_p εἶναι ἐπιφάνεια γραφομένη ὑπὸ καμπύλης φανταστικῆς κινουμένης παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ δὴ κατὰ δύο διαφόρους τρόπους. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἑκάστην ἁρμονικὴν συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχηθῇ σύνολον σμηνῶν N_p, τῶν σμηνῶν τοῦ συνόλου τούτου ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς τὰς πληρούσας κοινὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τρίτης τάξεως δι' ὅλας τὰς διαφόρους τοῦ μηδενὸς τιμὰς τοῦ μοναδικοῦ συντελεστοῦ, τὸν ὁποῖον ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμπεριέχει, ἐξίσωσιν τῆς ὁποίας ἡ ὁλοκλήρωσις δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τούτου ἐπιτυγχάνεται διὰ τετραγωνισμῶν. Ἐν τέλει καθορίζεται ἡ μορφή, τὴν ὁποίαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ἁρμονικὴ συνάρτησις φ τῶν μεταβλητῶν u, v, ἵνα αἱ κύριαι παράμετροι διανομῆς παντὸς σμήνους N_p ἀνήκοντος εἰς τὸ σύνολον τοιούτων σμηνῶν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην, $\varphi(u, v)$, εἶναι συναρτήσεις μόνης τῆς φ καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ σμήνη τὰ ἀνήκοντα εἰς τὰ σύνολα σμηνῶν N_p τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἁρμονικὰς συναρτήσεις τοιαύτης μορφῆς μετὰ τῶν σμηνῶν ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι εἶναι αἱ κάθετοι τῆς μέσης ἐπιφανείας αὐτοῦ εἰς τὰ διάφορα σημεῖα της, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης σμήνη N_p, εἶναι τὰ μόνα καθετικὰ σμήνη ἐπὶ τῆς μέσης περιβαλλούσης ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ σμήνους σχηματιζόμεναι ἐπιφάνειαι σταθερᾶς παραμέτρου διανομῆς p, τῆς αὐτῆς ἐφ' ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ὁρίζουν δίκτυον καμπύλων συζυγὲς οἱασδήποτε οὔσης τῆς τιμῆς τῆς p.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. (Teubner) 1910.
2. H. P. Eisenhart, A Treatise of the Differential Geometry of curves and surfaces. (Dover publication).
3. H. Milloux et P. Vincensini, Sur une méthode vectorielle d'étude des congruences de droites et quelques-unes de ses applications, Bull. Sc. Math. S. 2, 94 (1970), p. 5 à 24.
4. O. Pylarinos, Sur un type spécial de congruences de droites. Praktika Acad. d'Athènes, 49 (1974), p. 160 à 186.
5. C. E. Weatherburn, Differential Geometry of three dimensions I, Cambridge, University Press (1961).