Τὰ κατὰ τὴν ἁπλῆν ταύτην ἀλκαλιμετρικὴν μέθοδον ἀποτελέσματα εἶναι ὅλως ἱκανοποιητικὰ τόσον ἐπὶ καθαροῦ βενζοϊκοῦ νατρίου ὅσον καὶ ἐπὶ τῆς εἰδικῆς ἐν προκειμένῳ περιπτώσεως διαλυμάτων βενζοϊκοῦ ὑδραργύρου ἐν φυσιολογικῷ ὀρρῷ, προκύπτουσι δὲ θεωρητικοὶ ἀριθμοί, ἐὰν ὁ συντελεστὴς διορθώσεως τοῦ χρησιμοποιουμένου ὀξέος ὑπολογισθῇ βάσει τιτλοποιήσεως διαλύματος NaOH K/10 τῇ βοηθείᾳ κυανοῦ θυμόλης συμφώνως τῇ περιγραφείσῃ, παρουσίᾳ χλωροφορμίου, τεχνικῇ.

RÉSUMÉ

La méthode proposée repose sur le fait qu'en solution isotonique (NaCl) le benzoate de mercure se trouve comme $HgCl_2$, tandis que par double décomposition l'acide benzoïque passe à l'état de son sel alcalin:

$$(C_6H_5COO)_2Hg + 2NaCl = 2C_6H_5COONa + HgCl_2$$

Ce dernier est dosé par alcalimétrie suivant un procédé simple, indépendamment de la concentration du milieu en ions hydrogène. On détermine le volume A de la solution contenue dans 10 ampoules à 0,02 gr. ou 20 ampoules à 0,01 gr., on transvase dans un Erlenmeyer bouchant à l'éméri, on ajoute 2 volumes de $CHCl_3$ contenant une trace d'une base faible insoluble dans l'eau, telle que l'aniline p. ex. ou la quinine (afin de rendre sa réaction légèrement alcaline), on verse 3 gouttes d'une solution alcoolique à 0,1 % de bleu de thymol et l'on titre par de l'HCl n/10 en agitant fortement les deux liquides après chaque addition d'acide, jusqu'à ce que l'émulsion qui se forme au moment de l'agitation vire du jaune au rose franc.

$$\frac{n \times 0{,}023}{A} = \text{gr. } (C_6H_5COO)_2Hg + H_2O \text{ par c.c.}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ. – Περὶ ἑνὸς προβλήματος τοῦ κ. *Κ. Μαλτέζου, *ὑπὸ Θ. Βαροπούλου*.** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Ὁ κ. Μαλτέζος εἰς τὸ ὑπόμνημά του «*περὶ μιᾶς ἀξιοσημειώτου ὁριζούσης*», δημοσιευθὲν εἰς τὸ πρῶτον τεῦχος τῆς ἐπιστημονικῆς Ἐπετηρίδος τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (1932), καθὼς καὶ εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (1933), μελετᾷ μίαν ἀξίαν λόγου κατηγορίαν ὁριζουσῶν, ὧν τὰ στοιχεῖα ἐξαρτῶνται ἐκ παραμέτρου τινὸς μ, καὶ τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς περιεχομένης παραμέτρου.

Ὁ κ. Μαλτέζος ἀφοῦ ἀπέδειξε εἰς τὸ ὑπόμνημά του, τὴν ἀνεξαρτησίαν ταύτην ἐκ τῆς παραμέτρου μ, ἔθεσε τὸ ζήτημα τῆς εὑρέσεως γενικωτέρας κατηγορίας ὁριζουσῶν, αἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀνεξαρτήτου ἐκ τῆς μ.

* TH. VAROPOULOS. — Sur un problème de M. Maltézos.

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ ὁρίζουσα Μαλτέζου ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ὁριζουσῶν τοῦ Van der Monde[1], μορφῆς:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \beta & \beta^2 & \dots & \beta^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

αὗται δέ, ὡς γνωστόν, ἔχουσι τιμὴν ἴσην πρὸς τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαφορῶν $\alpha - \beta$.

Συνεπῶς ἂν θέσωμεν

$$\alpha = f(x) + a$$
$$\beta = f(x) + b$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\lambda = f(x) + l,$$

ἡ ὁρίζουσα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x.

Δυνάμεθα, λόγου χάριν, νὰ λάβωμεν $f(x) = cx$, ἢ $f(x) = dx^2 + cx, \dots$

2. Μιὰ μορφή, ὑφ' ἣν δύναται νὰ τεθῇ τὸ πρόβλημα Μαλτέζου, εἶναι ἡ ἑξῆς:

«*Εὑρεῖν ὅλα τὰ συστήματα συναρτήσεων:*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),$$

τοιαῦτα ὥστε ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} f_1(x+\alpha), & f_2(x+\alpha) & \dots\dots & f_n(x+\alpha) \\ f_1(x+\beta) & f_2(x+\beta) & \dots\dots & f_n(x+\beta) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ f_1(x+\lambda) & f_2(x+\lambda) & \dots\dots & f_n(x+\lambda) \end{vmatrix}$$

νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x, τῶν $\alpha, \beta, \dots \lambda$, ὄντων σταθερῶν»·

ἢ ἔτι γενικώτερον

«*Εὑρεῖν τὰς ὁριζούσας*

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_n(x) \end{vmatrix}$$

τῶν ὁποίων ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x».

[1] Εἰς ὑπόμνημα δημοσιευόμενον εἰς τὴν Ἐπετηρίδα τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης ὁ κ. Α. Τζώρτζης δεικνύει τίνι τρόπῳ ἡ μέθοδος τοῦ κ. Μαλτέζου ἄγει εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ Van der Monde.

Ὑπὸ τὴν δευτέραν του μορφὴν παρουσιαζόμενον τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως ἁπλῆς, καθαρῶς ἀλγεβρικῆς, ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι πολυώνυμα.

Ὄντως, λάβωμεν πρῶτον τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $n = 2$.

Τότε τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα Μαλτέζου καταντᾷ:

Μᾶς δίδονται τὰ πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$ ὡς ἔτυχε, καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογίσωμεν δύο συναρτήσεις (πολυώνυμα) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1 = C$$

Δυνάμεθα ἄλλως τε, εἰς τὴν ὁρίζουσαν τάξεως n νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως $n^2 - 1$ στοιχεῖα αὐτῆς (πολυώνυμα) καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὸ τελευταῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $C \neq o$ διαιροῦμεν διὰ C καὶ ἔχομεν πάντοτε

$$f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1 = 1,$$

κατὰ συνέπειαν, τὰ πολυώνυμα f_1, f_2 εἶναι πρὸς ἄλληλα, καθὼς καὶ τὰ πολυώνυμα φ_1, φ_2· ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας ὅτι, ὅταν δοθῶσιν αὐθαιρέτως τὰ f_1, f_2, πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὑπάρχουσι δύο ἄλλα πολυώνυμα g_1, g_2, ἅτινα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ὁρίζοντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων, τοιαῦτα ὥστε.

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 \equiv 1$$

Ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω δὲ συνθήκας ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος Μαλτέζου λαμβάνοντες

$$\varphi_2 \equiv g_2 + p \cdot f_2$$
$$\varphi_1 \equiv g_1 + p \cdot f_1$$

ἔνθα p εἶναι πολυώνυμον τυχόν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης εἶναι 0, τότε $C = 0$. Ἔστωσαν f_1, f_2 δύο τυχόντα πολυώνυμα, D ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· δυνάμεθα νὰ λάβωμεν

$$\varphi_2 = p\,\frac{f_2}{D}, \qquad \varphi_1 = p\,\frac{f_1}{D}$$

ὅπου p εἶναι πάλιν αὐθαίρετον.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν ὁριζουσῶν ἀνωτέρας τάξεως, παραδείγματος χάριν διὰ $n = 3$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \end{vmatrix}$$

λαμβάνω αὐθαιρέτως τὰ πολυώνυμα f, φ καὶ ὁρίζω τὰ g_1, g_2, g_3 ἐκ τῆς

$$\Delta(x) \equiv C$$

ἔχων ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ συνθήκη ἵνα τρία πολυώνυμα g_1, g_2, g_3 εἶναι πρῶτα πρὸς

ἄλληλα (ἐν τῷ συνόλῳ των), συνίσταται εἰς τὸ νὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρία ἄλλα $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ τοιαῦτα ὥστε νὰ ἔχωμεν $\vartheta_1 g_1 + \vartheta_2 g_2 + \vartheta_3 g_3 = 1$.
ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή.
Τούτου τεθέντος γράφω:

$$b_1(x) = f_2\varphi_3 - f_3\varphi_2, \quad b_2 = f_3\varphi_1 - f_1\varphi_3, \quad b_3 = f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1$$

καὶ ὑποθέτω ὅτι τὰ πολυώνυμα $b(x)_1$, $b(x)_2$, $b(x)_3$ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρία ἄλλα $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ τοιαῦτα ὥστε

$$b_1(x)\vartheta_1(x) + b_2(x)\vartheta_2(x) + b_3(x)\vartheta_3(x) = 1,$$

ὅτε τὸ πρόβλημα τοῦ κ. Μαλτέζου δέχεται τὴν λύσιν

$$\begin{aligned} g_1(x) &= c\vartheta_1(x) + b_3(x)\cdot\eta_1(x)\cdot h(x) \\ g_2(x) &= c\vartheta_2(x) + b_3(x)\cdot\eta_2(x)\cdot h(x) \\ g_3(x) &= c\vartheta_3(x) + \{b_1(x)\cdot\eta_1(x) + b_2(x)\eta_2(x)\}h(x) \end{aligned}$$

(διότι τότε ἔχομεν προφανῶς $\Delta(x) = C$)
ὅπου τὰ πολυώνυμα $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, $h(x)$ εἶναι αὐθαίρετα καὶ C σταθερά.

Καθ' ἣν περίπτωσιν τὰ πολυώνυμα $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$ δὲν εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, τότε ὁρίζομεν τὰ $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$\vartheta_1\frac{b_1}{D} + \vartheta_2\frac{b_2}{D} + \vartheta_3\frac{b_3}{D} = 1, \quad D \text{ εἶναι ὁ } \mu\cdot\kappa\cdot\delta \text{ τῶν } b_1\, b_2\, b_3\,\cdot$$

καὶ λαμβάνομεν ὡς λύσιν τοῦ προβλήματος τὴν ἀκόλουθον

$$\begin{aligned} g_1 &= C\frac{\Theta_1(x)}{D} + b_3\eta_1\cdot h(x) \\ g_2 &= C\frac{\Theta_2(x)}{D} + b_3\eta_2\cdot h(x) \\ g_3 &= C\frac{\Theta_3(x)}{D} - (b_1\eta_1 + b_2\eta_2)\,h(x) \end{aligned}$$

ὑπὸ μορφήν, ἐν γένει ῥητῶν συναρτήσεων, τῶν $\eta_1, \eta_2, h(x)$ ὄντων αὐθαιρέτων πολυωνύμων τοῦ x. Ἡ γενικὴ περίπτωσις δύναται νὰ μελετηθῇ κατ' ἀνάλογον τρόπον.

3. Εἰς τὴν κατηγορίαν τοῦ προβλήματος Μαλτέζου εἰσέρχονται καὶ αἱ σχέσεις, αἵτινες μένουνσιν ἀναλλοίωτοι ὑπὸ ἑνὸς ὁμογραφικοῦ μετασχηματισμοῦ

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{cx + \delta},$$

καὶ αἵτινες εἶναι τῆς ἑξῆς μορφῆς[1]

[1] J. DIEUDONNÉ: Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **60**, fasc. III-IV, p. 173-196 § 10, 1932.

$$\Delta \quad \begin{vmatrix} (x_1-y_1)^K & (x_1-y_2)^K & (x_1-y_3)^K & \dots & (x_1-y_n)^K \\ (x_2-y_1)^K & (x_2-y_2)^K & (x_2-y_3)^K & \dots & (x_2-y_n)^K \\ (x_3-y_1)^K & (x_3-y_2)^K & (x_3-y_3)^K & \dots & (x_3-y_n)^K \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n-y_1)^K & (x_n-y_2)^K & (x_n-y_3)^K & \dots & (x_\eta-y_n)^K \end{vmatrix}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς 2n συναρτήσεις

$$y_1, y_2, \dots, y_n \; ; \; x_1, x_2, \dots, x_n$$

παραμέτρου τινὸς μ, τότε ἡ προηγουμένη ὁρίζουσα, διὰ $0 \leqq K \leqq n-2$, εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μ, διότι—καθ' ἃ ἀπέδειξεν ὁ κ. Dieudonné—, ἡ ὡς ἄνω ὁρίζουσα εἶναι ὡς πρὸς x_1 πολυώνυμον βαθμοῦ K καὶ δέχεται ρίζας $x_2, x_3, \dots, x_n$ πλήθους μείζονος τοῦ βαθμοῦ του, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τὰς μεταβλητὰς $x_2, \dots, y_i$.

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ὁρίσωμεν τὸ K, ὥστε ἡ Δ νὰ μὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μ.

Καθ' ἣν περίπτωσιν $K = n-1$ ἡ ἔκφρασις

$$D = \frac{\Delta}{V_1 \cdot V_2}$$

ὅπου
$$V_1 = \prod_{\mu \neq \nu} (x_\mu - x_\nu), \qquad V_2 = \prod_{\mu \neq \nu} (y_\mu - y_\nu)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μ.

Πράγματι[1] ἡ Δ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ὁριζουσῶν V_1, V_2 καὶ εἶναι βαθμοῦ (ὡς πρὸς x_i, y_i) Kn, μετὰ δὲ τὴν ἁπλοποίησιν καθίσταται βαθμοῦ $Kn - n(n-1)$ καὶ συνεπῶς ὡς πρὸς ἑκάστην μεταβλητὴν εἶναι βαθμοῦ μηδενός.

RÉSUMÉ

Je me suis proposé de résoudre un problème que M. Maltézos a posé dans son mémoire «Περὶ μιᾶς ἀξιοσημειώτου ὁριζούσης» qui a paru dans les Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Thessalonique, ainsi qu'au Bulletin de la Société Mathématique de Grèce.

Le problème de M. Maltézos se formule ainsi: chercher les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_n(x) \end{vmatrix}$$

dont la valeur est une constante par rapport à x.

Je traite ce problème au cas où $\varphi_i, f_i, \dots, g_i$ sont des polynômes et j'indique un moyen simple qui permet de former tous ces déterminants.

[1] DIEUDONNÉ, loc. cit § 10, p. 186.

Je signale que dans la catégorie de ces déterminants rentre la classe de formes invariantes par homographie du type étudié récemment par M. Dieudonné (loc. cit.)

En choisissant convenablement l'exposant K on obtient un déterminant de M. Maltézos.

K. A. Kς