DIFFERENTIALGEOMETRIE.— **Sechseckgewebe und die Abelsche Differentialgleichung erster Art,** vom korr. Mitglied *N. K. Stephanidis**.

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Ubersicht über vorangegangene Resultate des Verf. über Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes gegeben, die negativer Krümmung sind und die Sechseckgewebeeigenschaft besitzen, also die Eigenschaft, daß die beiden Scharen der Krümmungslinien mit jeder Schar der Asymptotenlinien ein Sechseckgewebe bilden. Ferner wird die Untersuchung einer Frage weitergeführt, die in einer früheren Note (vgl. [10]) behandelt wurde: Auf der Einheitskugel ist ein orthogonales Netz gegeben. Gesucht sind alle Flächen, die die Sechseckgewebeeigenschaft haben und deren sphärisches Bild der Krümmungslinien das gegebene orthogonale Netz ist. Ist $u = const,\ v = const.$ das Netz und

$$d\sigma^2 = e(u,v)du^2 + g(u,v)dv^2,\ e(u,v) > 0,\ g(u,v) > 0 \qquad (1)$$

die Metrik der Einheitskugel, so führt die Frage auf die Bestimmung aller Lösungen $U(u)$ der Abelschen Differentialgleichung erster Art

$$U' = f_3(u,v)U^3 + f_2(u,v)U^2 + f_1(u,v)U. \qquad (2)$$

Hierin enthalten die Koeffizienten $f_i(u,v), i = 1,2,3,$ die bekannten Funktionen $e(u,v)$, $g(u,v)$ und eine Funktion $V(v)$, die zunächst nicht bestimmt ist. Jede Lösung $U(u)$ von (2) enthält die Funktion $V(v)$ und eine willkürliche differenzierbare Funktion $h(v)$. Das Problem hat nur dann eine Lösung, wenn es möglich ist, die Funktionen $V(v)$ und $h(v)$ derart zu bestimmen ,daß die Bedingung $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$ erfüllt ist.

Im Spezialfall, in dem das gegebene Netz isotherm ist, wird die Gleichung (2) eine Bernoullische Differentialgleichung und somit integrierbar. Es wer-

* Ν. Κ. ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ. **Ἑξαγωνικὰ πλέγματα καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση τοῦ Abel πρώτου εἴδους.**

den weiter zwei Anwendungen vorgeführt, bei denen das Verfahren im einzelnen erläutert wird.

1. *Kurven-drei-Gewebe in der Ebene.* Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der (u,v)-Ebene. Wir nehmen an, daß in D drei Kurvenscharen C_1,C_2,C_3 gegeben sind, die folgende Eigenschaft haben: Durch jeden Punkt $P \in D$ gehen genau drei Kurven $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$, die den Scharen C_1,C_2,C_3 entsprechend gehören, und je zwei Kurven von $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ haben in P verschiedene Tangenten. Nach W. Blaschke bilden die Scharen C_1,C_2,C_3 ein *Kurven-drei-Gewebe.* Wir nehmen an, daß die Scharen $C_i, i = 1,2,3$, aus den Integralkurven der Differentialgleichungen $\sigma_i = 0$, $i = 1,2,3$ bestehen, wobei σ_i drei Pfaffsche Formen

$$\sigma_i = P_i(u,v)du + Q_i(u,v)dv, \quad i = 1,2,3 \tag{1.1}$$

sind. Die Formen σ_i seien aus der Differenzierbarkeitsklasse C^2 in D. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \qquad \forall (u,v) \in D \tag{1.2}$$

gilt. Für das *Flächenelement* Ω des Kurven-drei-Gewebes gilt bekanntlich

$$\Omega = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_3 \wedge \sigma_1, \tag{1.3}$$

wobei $\wedge$ das äussere Produkt der Differentialformen bezeichnet. Die äußeren Differentiale $d\sigma_i, i = 1,2,3$, sind Differentialformen zweiten Grades, daher existieren eindeutig bestimmbare Funktionen, die sogenannten *Christoffel-Symbole* $h_i(u,v), i = 1,2,3$, für die gilt

$$d\sigma_i = h_i(u,v)\Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{1.4}$$

Dann folgt aus (1.2) die Beziehung

$$h_1(u,v) + h_2(u,v) + h_3(u,v) = 0 \qquad \forall (u,v) \in D. \tag{1.5}$$

Für den *Zusammenhang* γ und die *Krümmung* k des Kurven-drei-Gewebes gelten die Beziehungen ([1], S.25)

$$\gamma = h_2\sigma_1\text{-}h_1\sigma_2 = h_3\sigma_2\text{-}h_2\sigma_3 = h_1\sigma_3\text{-}h_3\sigma_1, \tag{1.6}$$

$$d\gamma = k\Omega. \tag{1.7}$$

Wir betrachten einen Punkt $P \in D$ und die Kurven $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ die durch P gehen und den Scharen C_1,C_2,C_3 entsprechend gehören (Fig. 1). Es sei A ein

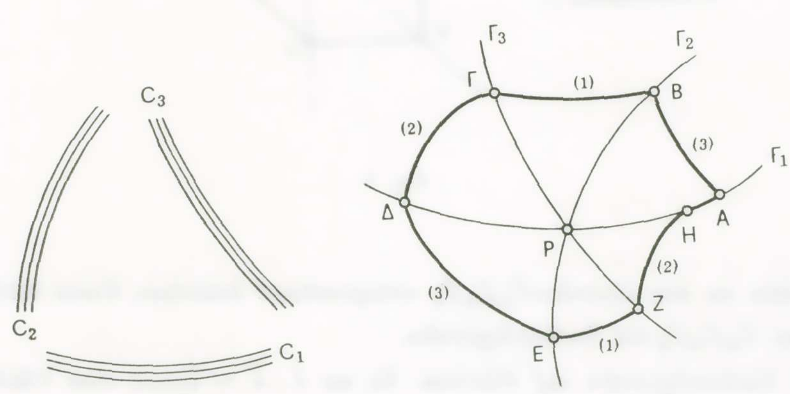

Fig. 1

beliebiger Punkt der Kurve Γ_1, $A \neq P$. Die Kurve der Schar C_3, die durch A geht, schneidet die Kurve Γ_2 in einem Punkt B. Die Kurve der Schar C_1, die durch B geht, schneidet die Kurve Γ_3 in einem Punkt Γ. Setzen wir das Verfahren fort, so gelangen wir zum Punkt $H \in \Gamma_1$, der im allgemeinen von A verschieden ist. Also, die Kurve ΑΒΓΔΕΖΗ ist im allgemeinen nicht geschlossen. Es ist aber möglich, daß ein Kurven-drei-Gewebe vorliegt mit folgender Eigenschaft: Für jede Wahl der Punkte $P,A \in D$ ist die zugehörige Kurve ΑΒΓΔΕΖΗ geschlossen, d.h. die Punkte A und H fallen zusammen. Dann heißt das Kurven-drei-Gewebe ein *Sechseckgewebe*.

Ein Beispiel eines Sechseckgewebes erhält man folgendermaßen: Man betrachte zwei senkrechte Geraden $P\Gamma_1$, $P\Gamma_3$ und die Winkelhalbierende $P\Gamma_2$ von $\Gamma_1 P \Gamma_3$ (Fig. 2). Es seien C_1, C_2, C_3 die Geradenscharen, die von den

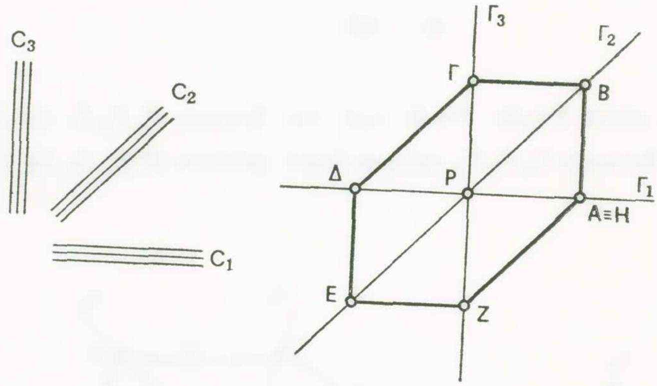

Fig. 2

Parallelen zu den Geraden $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ entsprechend bestehen. Dann bilden die Scharen C_1, C_2, C_3 ein Sechseckgewebe.

2. *Sechseckgewebe auf Flächen.* Es sei $S : \vec{x} = \vec{x}(u,v)$ eine Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D der (u,v)-Ebene erklärt ist. Wir nehmen an: α) Die Abbildung von D auf S ist eineindeutig. β) S ist aus der Differenzierbarkeitsklasse C^4. Jedem Kurven-drei-Gewebe des Gebietes D entspricht ein solches auf der Fläche S. Insbesondere jedem Sechseckgewebe auf D entspricht ein Sechseckgewebe auf S, denn bei topologischen Abbildungen bleibt die Schließungseigenschaft der Kurven erhalten.

Sechseckgewebe auf Flächen hat zuerst G. Thomsen untersucht und folgenden Satz bewiesen (vgl. [11]): *Sind die Darboux-Kurven einer Fläche reell, so bilden sie genau dann ein Sechseckgewebe, wenn die Fläche isotherm-asymptotisch ist.*

Andererseits hat K. Mayrhofer (s. [7]) Sechseckgewebe auf einer Fläche betrachtet, die von Geodätischen der Fläche gebildet werden.

N. K. Stephanidis hat Flächen negativer Krümmung untersucht (s. [8], [9], [10]), die die Sechseckgewebeeigenschaft haben.

Fragen, die mit *Diagonalnetzen* auf Flächen zusammenhängen, wurden von R. Koch untersucht (s. [5], [6]).

3. *Flächen mit der Sechseckgewebeeigenschaft.* Wir nehmen an, daß die Fläche $S : \vec{x} = \vec{x}(u,v)$ in jedem Punkt negative Krümmung hat. Es seien a_1, a_2 zwei unabhängige Pfaffsche Formen der Differenzierbarkeitsklasse C^3, die in D erklärt sind und für die gilt

$$ds^2 = a_1^2 + a_2^2, \tag{3.1}$$

wobei ds das Linienelement von S ist. Bezeichnet man die Invarianten des Streifens $a_2 = 0$ (bzw. $a_1 = 0$) mit q,r,n (bzw. $\bar{q}, -\bar{r}, -n$), so gelten die Integrabilitätsbedingungen (s. [3], S. 159)

$$\nabla_2 q + \nabla_1 \bar{q} - q^2 - \bar{q}^2 - r\bar{r} + n^2 = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla_2 n + \nabla_1 \bar{r} - 2qn - \bar{q}(r - \bar{r}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla_2 r + \nabla_1 n + 2\bar{q}n - q(r - \bar{r}) = 0. \tag{3.4}$$

Das Symbol ∇_1 (bzw. ∇_2) bedeutet die Pfaffsche Ableitung längs der Integralkurve von $a_2 = 0$ (bzw. $a_1 = 0$) bezüglich der Form a_1 (bzw. a_2).

Im Spezialfall, in dem $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ die Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Fläche S sind, gilt

$$n(u,v) = 0 \qquad \forall (u,v) \in D \tag{3.5}$$

und $r, \bar{r}$ sind die Hauptkrümmungen von S. Es ist also

$$K(u,v) = r(u,v)\bar{r}(u,v) < 0 \qquad \forall (u,v) \in D, \tag{3.6}$$

$$H(u,v) = r(u,v) + \bar{r}(u,v), \tag{3.7}$$

wobei K die Krümmung und H die mittlere Krümmung von S sind. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien von S ist

$$r a_1^2 + \bar{r} a_2^2 = 0. \tag{3.8}$$

Wegen (3.6) können wir annehmen, daß

$$r(u,v) > 0, \ \bar{r}(u,v) < 0 \qquad \forall(u,v) \in \mathrm{D} \tag{3.9}$$

gilt und somit sind

$$\sqrt{r}\, a_1 + \sqrt{-\bar{r}}\, a_2 = 0, \tag{3.10}$$

$$\sqrt{r}\, a_1 - \sqrt{-\bar{r}}\, a_2 = 0 \tag{3.11}$$

die Differentialgleichungen der beiden Scharen der Asymptotenlinien von S.

Wir betrachten die Pfaffschen Formen $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, die durch die Beziehungen

$$\sigma_1 = -\sqrt{r}\, a_1, \quad \sigma_2 = -\sqrt{-\bar{r}}\, a_2, \quad \sigma_3 = \sqrt{r}\, a_1 + \sqrt{-\bar{r}}\, a_2 \tag{3.12}$$

definiert sind. Den Integralkurven von

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0 \tag{3.13}$$

entspricht das Kurven-drei-Gewebe auf der Fläche S, das aus den Krümmungslinien und der Schar (3.10) der Asymptotenlinien besteht. Für dieses Gewebe gelten die Beziehungen (s. [9], S. 30)

$$\Omega = \sqrt{-K}\, a_1 \wedge a_2, \tag{3.14}$$

$$h_1 = -\frac{q H}{r \sqrt{-\bar{r}}}, \tag{3.15}$$

$$h_2 = \frac{\bar{q} H}{\bar{r} \sqrt{r}}, \tag{3.16}$$

$$h_3 = \left(\frac{q}{r\sqrt{-\bar{r}}} - \frac{\bar{q}}{\bar{r}\sqrt{r}}\right)H. \tag{3.17}$$

Für den Zusammenhang γ des Gewebes gilt

$$\gamma = -\left(\frac{\bar{q}\,a_1}{\bar{r}} + \frac{q a_2}{r}\right) \tag{3λ18}$$

und aus (1.7) erhalten wir (s. [9], S. 29)

$$\int\limits_{\partial D}\left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\,a_1 + \frac{q}{r}a_2\right)H = -\iint\limits_{D} k\sqrt{-K}\,a_1 \wedge a_2, \tag{3.19}$$

wobei ∂D den Rand des Gebietes D bezeichnet.

Die Sechseckgewebeeigenschaft gilt genau dann, wenn $k(u,v) = 0\ \forall (u,v) \in D$ gilt. Somit folgt aus (3.19): Die Sechseckgewebeeigenschaft gilt genau dann, wenn für jede geschlossene Kurve $C \subset D$ die Beziehung gilt

$$\int\limits_{C}\left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\,a_1 + \frac{q}{r}\,a_2\right) = 0. \tag{3.20}$$

Es hat sich herausgestellt (s. [8], [9], [10]), daß die Klasse der Flächen, die die Sechseckgewebeeigenschaft haben, sehr reichhaltig ist. Ihr gehören die Minimalflächen, die Rotationsflächen negativer Krümmung, die Flächen konstanter negativer Krümmung, das einschalige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid und jedes hyperbolisch gekrümmte Stück einer Dupinschen Zyklide an.

4. *Vorgabe des sphärischen Bildes der Krümmungslinien.* Wir nehmen an, daß die Fläche S sphärisch eineindeutig abbildbar ist. Die Metrik des sphärischen Bildes von S sei in der Form gegeben

$$d\sigma^2 = e(u,v)du^2 + g(u,v)dv^2,\ e(u,v) > 0,\ g(u,v) > 0,\ e,g \in C^2, \tag{4.1}$$

wobei $u = const.$, $v = const.$ den Krümmungslinien von S entsprechen. Für die Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 gilt

$$R_1 = \frac{1}{r}, \; R_2 = \frac{1}{\bar{r}}. \tag{4.2}$$

Die Fläche hat die Sechseckgewebeeigenschaft genau dann, wenn zwei Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ derart existieren, daß die folgenden Bedingugen

$$U(u)V(v) < 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{R_1(u,v)}{R_2(u,v)} = \frac{g(u,v)U(u)}{e(u,v)V(v)} \tag{4.4}$$

für alle $(u,v) \in D$ gelten (s. [10], S. 157). Die Integrabilitätsbedingungen (3.3), (3.4) sind für $n = 0$ gleichbedeutend mit den folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = (R_1 - R_2)\frac{\partial log\sqrt{g}}{\partial u}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial v} = (R_2 - R_1)\frac{\partial log\sqrt{e}}{\partial v}. \tag{4.6}$$

Eliminieren wir die Funktion R_1 aus (4.4), (4.5), (4.6), so finden wir

$$\Big[log(-R_2)\Big]_v = \frac{V'}{V} + \frac{e_v V}{2gU} - \Big(log\frac{g}{\sqrt{e}}\Big)_v, \tag{4.7}$$

$$\Big[log(-R_2)\Big]_u = \frac{g_u U}{2eV} - (log\sqrt{g})_u, \tag{4.8}$$

wobei der Strich die Ableitung bedeutet. Die Integrabilitätsbedingung des Systems (4.7), (4.8) ist (s.[10], S. 158)

$$V\Big(\frac{e_v}{gU}\Big)_u - U\Big(\frac{g_u}{eV}\Big)_v = \Big(log\frac{g}{e}\Big)_{uv}. \tag{4.9}$$

Auf einem Stück der Einheitskugel sei ein orthogonales Netz $u = const.$, $v = const.$ gegeben. Die Metrik sei (4.1). Die Bestimmung einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die die Sechseckgewebeeigenschaft hat und deren sphärisches Bild der Krümmungslinien das gegebene Netz ist, reduziert sich auf die Ermittlung zweier Funktionen $U(u)$ und $V(v)$, welche der Bedingung (4.9) genügen. Denn, aus (4.7), (4.8) ist die Funktion $R_2(u,v)$ bestimmbar und mittels (4.4) auch die Funktion $R_1(u,v)$. Sind E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Fläche, so gilt

$$E = eR_1^2, \quad F = 0, \quad G = gR_2^2, \tag{4.10}$$

$$L = eR_1, \quad M = 0, \quad N = gR_2 \tag{4.11}$$

und somit sind die quadratischen Fundamentalformen der Fläche bestimmbar und folglich die Fläche selbst.

5. *Transformation der Integrabilitätsbedingung.* Wir setzen in (4.9)

$$\lambda = \frac{e_v}{g}, \quad \mu = \frac{g_u}{e}, \quad \nu = \left(\log \frac{g}{e}\right)_{uv} \tag{5.1}$$

und nach kurzer Rechnung finden wir

$$\lambda U' = -\frac{1}{V}\left(\frac{\mu}{V}\right)_v U^3 - \frac{\nu}{V} U^2 + \lambda_u U. \tag{5.2}$$

Wir nehmen an, daß

$$e_v(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D \tag{5.3}$$

gilt. Aus (5.2) folgt

$$U' = f_3 U^3 + f_2 U^2 + f_1 U, \tag{5.4}$$

wobei gesetzt wurde

$$f_3 = -\frac{1}{\lambda V}\left(\frac{\mu}{V}\right)_v, \quad f_2 = -\frac{\nu}{\lambda V}, \quad f_1 = \frac{\lambda_u}{\lambda}. \tag{5.5}$$

Betrachten wir vorübergehend die Funktion $V(v)$ als bekannt, so können wir (5.4) als eine Abelsche Differentialgleichung erster Art (s. [4] S. 24) mit $U(u)$ als gesuchter Funktion auffassen. Angenommen, wir haben eine Lösung von (5.4) gefunden. Sie wird die bekannten Funktionen $e(u,v)$, $g(u,v)$, $V(v)$ und eine willkürliche differenzierbare Funktion $h(v)$ enthalten. Da aber U eine Funktion von u allein ist, muss gelten

$$\frac{\partial U}{\partial v} = 0. \tag{5.6}$$

Wenn es möglich ist, die Funktionen $V(v)$, $h(v)$ derart zu bestimmen, daß die Bedingung (5.6) erfüllt ist, so ist unser Problem lösbar.

6. *Der Fall eines isothermen Netzes.* Ist das gegebene Netz auf der Einheitskugel isotherm, so gilt

$$\left(\log\frac{g}{e}\right)_{uv} = 0 \quad \forall\, (u,v) \in D \tag{6.1}$$

und folglich ist $\nu = 0$. Dann wird (5.4) eine Bernoullische Differentialgleichung

$$U' = f_3 U^3 + f_1 U, \tag{6.2}$$

woraus folgt

$$\frac{U'}{U^3} = f_3 + \frac{f_1}{U^2}\,. \tag{6.3}$$

Durch die Substitution

$$\frac{1}{U^2} = z \tag{6.4}$$

nimmt die Gleichung (6.3) die Form an

$$z' + 2f_1 z = -\,2f_3\,. \tag{6.5}$$

Integrieren wir die lineare Differentialgleichung (6.5) und finden

$$z = e^{-2\int f_1 du}\left[h(v) - 2\int f_3 e^{2\int f_1 du}\, du \right], \tag{6.6}$$

wobei $h(v)$ eine willkürliche differenzierbare Funktion der Variablen v ist. Unter Beachtung von (5.1), (5.5), (6.4) erhalten wir aus (6.6)

$$\frac{1}{U^2} = \frac{g^2}{e_v^2}\left[h(v) + \frac{2}{V}\int \frac{e_v}{g}\left(\frac{g_u}{eV}\right)_v du \right]. \tag{6.7}$$

Die linke Seite von (6.7) ist eine Funktion der Variablen u allein. Die Beziehung (6.7) hat also nur dann einen Sinn, wenn es möglich ist, die Funktionen $V(v)$ und $h(v)$ derart zu bestimmen, daß

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{ \frac{g^2}{e_v^2}\left[h(v) + \frac{2}{V}\int \frac{e_v}{g}\left(\frac{g_u}{eV}\right)_v du \right]\right\} = 0 \tag{6.8}$$

gilt. Somit haben wir das Resultat:

Die Metrik der Einheitskugel sei

$$d\sigma^2 = e(u,v)du^2 + g(u,v)dv^2, \tag{6.9}$$

wobei die Funktionen $e(u,v)$, $g(u,v)$ aus der Differenzierbarkeitsklasse C^2 im Gebiet D sind und den Bedingungen

$$e(u,v) > 0, \quad g(u,v) > 0, \quad e_v(u,v) \neq 0, \quad \left(\log\frac{g}{e}\right)_{uv} = 0$$

fur jedes $(u,v) \in D$ genügen. Die Bestimmung aller Flächen, die die Sechseckgewebeeigenschaft haben und deren sphärisches Bild der Krümmungslinien das isotherme Netz $u = const.$, $v = const.$ ist, führt auf die Ermittlung zweier Funktionen $V(v)$ und $h(v)$, für welche die Bedingung (6.8) für jedes $(u,v) \in D$ erfüllt ist.

Bemerkung. Wir haben vorausgesetzt $e_v(u,v) \neq 0$ $\forall (u,v) \in D$. Gilt für jedes $(u,v) \in D$ $e_v(u,v) = 0$ und $g_u(u,v) \neq 0$, so verfahren wir analog. Der Fall

$e_v = 0$ und $g_u = 0$ $\forall (u,v) \in D$ ist ausgeschlossen, weil das Krümmungsmass der Metrik (6.9) gleich 1 ist.

Anwendung 1. Es sei

$$d\sigma^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}. \tag{6.10}$$

Es ist

$$e(u,v) = g(u,v) = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}. \tag{6.11}$$

Das Krümmungsmass der Metrik (6.10) ist gleich 1. Das orthogonale Netz $u = const.$, $v = const.$ auf der Einheitskugel ist isotherm. Deutet man u und v als kartesische Koordinaten in der Ebene und betrachtet eine stereographische Projektion der Ebene auf die Einheitskugel, so ist das isotherme Netz Bild von achsenparallelen Geradenstücken.

Unter Beachtung von (6.11) folgt aus (6.7)

$$\frac{1}{U^2} = \frac{(u^2 + v^2 + 1)^2 h(v)}{16 v^2} + \frac{1}{V^2} + \frac{(u^2 + v^2 + 1) V'}{v V^3}. \tag{6.12}$$

Die Bedingung (6.8) lautet

$$\frac{1}{16}(u^2 + v^2 + 1)\left(\frac{h}{v^2}\right)' = -\frac{h}{4v} - \left(\frac{V'}{vV^3}\right)'. \tag{6.13}$$

Da die rechte Seite von (6.13) eine Funktion von v allein ist, haben wir die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2 + v^2 + 1)\left(\frac{h}{v^2}\right)'\right] = 0, \tag{6.14}$$

woraus folgt

$$u\left(\frac{h}{v^2}\right)' = 0. \tag{6.15}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzten, daß für jedes $(u,v) \in D$ $u \neq 0$ ist. Aus (6.15) erhalten wir

$$h = c_1 v^2, \quad c_1 = const. \tag{6.16}$$

Somit folgt aus (6.13)

$$\frac{V'}{vV^3} = \frac{c_1 v^2}{8} + c_2, \quad c_2 = const. \tag{6.17}$$

und folglich

$$\frac{1}{V^2} = \frac{c_1 v^4}{16} - c_2 v^2 - 2c_3, \quad c_3 = const. \tag{6.18}$$

Unter Beachtung von (6.15) und (6.18) folgt aus (6.12) die Beziehung

$$\frac{1}{U^2} = c_1^* u^4 + c_2^* u^2 + c_3^*, \tag{6.19}$$

wobei

$$c_1^* = \frac{c_1}{16}, \; c_2^* = \frac{c_1 + 8c_2}{8}, \; c_3^* = \frac{c_1 + 16c_2 - 32c_3}{16} \tag{6.20}$$

gesetzt wurde. Aus (6.20) folgt

$$c_1 = 16c_1^*, \; c_2 = c_2^* - 2c_1^*, \; c_3 = \frac{-c_1^* + c_2^* - c_3^*}{2}, \tag{6.21}$$

und somit ist

$$\frac{1}{V^2} = c_1^* v^4 + (2c_1^* - c_2^*)v^2 + c_1^* - c_2^* + c_3^*. \tag{6.22}$$

Die gesuchten Funktionen U(u), V(v) sind also

$$U = \pm\, (c_1^* u^4 + c_2^* u^2 + c_3^*)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.23}$$

$$V = \pm\, [c_1^* v^4 + (2c_1^* - c_2^*)v^2 + c_1^* - c_2^* + c_3^*]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.24}$$

wobei die willkürlichen Konstanten c_1^*, c_2^*, c_3^* so zu wählen sind, daß die rechten Seiten von (6.23) und (6.24) reell sind. Ferner werden die Vorzeichen derart kombiniert, daß die Nebenbedingung

$$U(u)V(v) < 0 \tag{6.25}$$

gilt. Die Vertauschung der Vorzeichen der Funktionen U und V beeinträchtigt das System (4.7), (4.8) nicht. Daher entspricht den Lösungen (6.23), 6.24) nur eine Fläche der gesuchten Art.

Der speziellen Wahl

$$c_1^* = c_2^* = 0, \; c_3^* > 0, \tag{6.26}$$

entsprechen die Lösungen

$$U = \frac{1}{\sqrt{c_3^*}}, \quad V = -\frac{1}{\sqrt{c_3^*}}, \tag{6.27}$$

$$U = -\frac{1}{\sqrt{c_3^*}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{c_3^*}}. \tag{6.28}$$

In beiden Fällen gilt $U + V = 0$, also $R_1 + R_2 = 0$, d.h. die gesuchte Fläche ist eine Minimalfläche.

Anwendung 2. Bekanntlich ist jede Rotationsfläche eine Liouvillesche Fläche. Daher existieren auf der Einheitskugel Liouvillesche Netze.

Die Metrik der Einheitskugel sei in der Form

$$d\sigma^2 = [\varphi(u) + \psi(v)]\,(du^2 + dv^2), \; \varphi'(u) \neq 0, \;\; \psi'(v) \neq 0 \tag{6.29}$$

gegeben, wobei $\varphi, \psi \in C^2$ und $\varphi(u) + \psi(v) > 0 \;\; \forall (u,v) \in D$ ist.
In diesem Fall ist

$$e(u,v) = g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v), \tag{6.30}$$

$$\frac{1}{U^2} = \frac{(\varphi+\psi)^2}{\psi'^2}\left[h(v) + \frac{2\psi'}{V}\int \frac{\varphi'}{\varphi+\psi}\left(\frac{1}{(\varphi+\psi)V}\right)_v du\right], \tag{6.31}$$

wobei der Strich die Ableitung nach der entsprechenden Variablen bedeutet. Aus (6.31) folgt, nach einer etwas längeren Rechnung

$$\frac{1}{U^2} = (\varphi+\psi)^2\left(\frac{h}{\psi'^2}\right) + \frac{1}{V^2} + 2(\varphi+\psi)\left(\frac{V'}{\psi' V^3}\right). \tag{6.32}$$

Die Bedingung (6.9) wird

$$(\varphi + \psi)\left(\frac{h}{\psi'^2}\right)' = -\frac{2h}{\psi} - \left(\frac{V'}{\psi' V^3}\right)'. \tag{6.33}$$

Die rechte Seite von (6.33) ist eine Funktion von v allein, folglich haben wir die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(\varphi + \psi)\left(\frac{h}{\psi'^2}\right)'\right] = 0, \tag{6.34}$$

woraus folgt

$$\left(\frac{h}{\psi'^2}\right)' \varphi' = 0. \tag{6.35}$$

Nach Voraussetzung gilt $\varphi' \neq 0$, und somit ist

$$\left(\frac{h}{\psi'^2}\right)' = 0, \tag{6.36}$$

also

$$h(v) = c_1\psi'^2(v), \; c_1 = const. \tag{6.37}$$

Wir ersetzen in (6.33) die Funktion h durch die rechte Seite von (6.37) und finden

$$\frac{V'}{\psi' V^3} = - c_1\psi + c_2, \quad c_2 = const. \tag{6.38}$$

Es folgt also

$$\frac{1}{V^2} = c_1\psi^2 - 2c_2\psi - 2c_3, \quad c_3 = const. \tag{6.39}$$

Unter Verwendung von (6.37), (6.38) und (6.39), erhalten wir aus (6.32)

$$\frac{1}{U^2} = c_1\varphi^2 + 2c_2\varphi - 2c_3. \tag{6.40}$$

Die gesuchten Funktionen $U(u)$, $V(v)$ sind also

$$U = \pm[c_1\varphi^2(u) + 2c_2\varphi(u) - 2c_3]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.41}$$

$$V = \pm[c_1\psi^2(v) - 2c_2\psi(v) - 2c_3]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.42}$$

wobei die Konstanten c_1, c_2, c_3 so zu wählen sind, daß die rechten Seiten von (6.41) und (6.42) reell sind. Die Vorzeichen werden derart kombiniert, daß die Nebenbedingung (6.25) gilt. Der speziellen Wahl

$$c_1 = c_2 = 0, \; c_3 < 0, \tag{6.43}$$

entsprechen die Lösungen

$$U = \frac{1}{\sqrt{-2c_3}}, \quad V = - \frac{1}{\sqrt{-2c_3}}, \tag{6.44}$$

$$U = - \frac{1}{\sqrt{-2c_3}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{-2c_3}} \tag{6.45}$$

In beiden Fällen gilt $U + V = 0$, somit ist $R_1 + R_2 = 0$, d.h. die gesuchte Fläche ist eine Minimalfläche.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ἑξαγωνικὰ πλέγματα καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση τοῦ Abel πρώτου εἴδους.

Ἔστω D ἁπλῶς συναφὴς τόπος τοῦ ἐπιπέδου. Ὑποθέτουμε, ὅτι στὸν τόπο D δίνονται τρεῖς μονοπαραμετρικὲς οἰκογένειες καμπυλῶν C_1, C_2, C_3 μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἀπὸ κάθε σημεῖο $P \in D$ διέρχονται ἀκριβῶς τρεῖς καμπύλες $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, οἱ ὁποῖες ἀνήκουν στὶς οἰκογένειες C_1, C_2, C_3 ἀντιστοίχως καὶ ἀνὰ δύο ἔχουν στὸ σημεῖο P διαφορετικὲς ἐφαπτόμενες. Τότε οἱ οἰκογένειες C_1, C_2, C_3 ἀποτελοῦν ἕνα πλέγμα καμπυλῶν. Ἔστω $A \neq P$ τυχὸν σημεῖο τῆς καμπύλης Γ_1 (Σχῆμα 1). Ἡ καμπύλη τῆς οἰκογένειας C_3, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ A, τέμνει τὴν καμπύλη Γ_2 σὲ ἕνα σημεῖο B. Ἡ καμπύλη τῆς οἰκογένειας C_1, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ B, τέμνει τὴ Γ_3 σὲ ἕνα σημεῖο Γ. Συνεχίζουμε ἀνάλογα τὴ διαδικασία αὐτὴ καὶ βρίσκουμε τὸ σημεῖο $H \in \Gamma_1$, τὸ ὁποῖο ἐν γένει εἶναι διάφορο ἀπὸ τὸ A. Ὥστε ἡ καμπύλη $AB\Gamma\Delta EZH$, ἐν γένει, δὲν εἶναι κλειστή. Εἶναι ὅμως δυνατόν, γιὰ κάθε ἐκλογὴ τῶν σημείων $P, A \in D$ ἡ ἀντίστοιχη καμπύλη $AB\Gamma\Delta EZH$ νὰ εἶναι κλειστή, δηλαδὴ νὰ συμπίπτουν τὰ σημεῖα A καὶ H. Τότε τὸ πλέγμα ὀνομάζεται ἑξαγωνικό.

Στὸν τριδιάστατο εὐκλείδειο χῶρο θεωροῦμε μία ἐπιφάνεια ἀρνητικῆς καμπυλότητας, ὁρισμένη στὸν ἁπλῶς συναφὴ τόπο D τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ τοπολογικὴ εἰκόνα κάθε πλέγματος τοῦ τόπου D εἶναι ἕνα πλέγμα ἐπάνω στὸ φορέα τῆς ἐπιφάνειας. Θὰ λέμε, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἔχει τὴν ἑξαγωνικὴ ἰδιότητα, ὅταν οἱ δύο οἰκογένειες τῶν γραμμῶν καμπυλότητας τῆς ἐπιφάνειας καὶ μία οἰκογένεια τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν αὐτῆς ἀποτελοῦν ἑξαγωνικὸ πλέγμα.

Στὴν ἐργασία αὐτὴ ἀναφέρονται κατ' ἀρχὰς μερικὲς βασικὲς ἔννοιες τῆς Θεωρίας Πλεγμάτων καθὼς καὶ προγενέστερα συμπεράσματα τοῦ συγγραφέως. Ἀκολούθως ἐξετάζεται τὸ ἑξῆς ἐρώτημα: Ἐπὶ τῆς μοναδιαίας σφαίρας δίνεται ὀρθογώνιο δίκτυο. Ζητοῦνται οἱ ἐπιφάνειες ἀρνητικῆς καμπυλότητας τοῦ τριδιάστατου εὐκλείδειου χώρου, οἱ ὁποῖες ἔχουν τὴν ἑξαγωνικὴ ἰδιότητα καὶ τῶν ὁποίων ἡ σφαιρικὴ εἰκόνα τῶν γραμμῶν καμπυλότητας ταυτίζεται μὲ τὸ δοθὲν ὀρθογώνιο δίκτυο. Ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἐρώτημα ἀνάγεται στὴν εὕρεση τῶν λύσεων μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Abel πρώτου εἴδους, οἱ ὁποῖες πληροῦν ὁρισμένες πρόσθετες συνθῆκες. Στὴν περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία τὸ δοθὲν ὀρθογώνιο δίκτυο εἶναι ἰσόθερμο, προκύπτει ἐξίσωση τοῦ Bernoulli, ἡ ὁποία εἶναι ὁλοκληρώσιμη. Τέλος ἀναφέρονται δύο ἐφαρμογὲς στὶς ὁποῖες τὰ δοθέντα ὀρθογώνια δίκτυα εἶναι ἰσόθερμα. Τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ προκύπτει μὲ χρήση τῆς στερεογραφικῆς προβολῆς τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τῆς μοναδιαίας σφαίρας, ἐνῶ τὸ ἄλλο εἶναι δίκτυο τοῦ Liouville.

LITERATUR

[1] Blaschke, W., Einführung in die Geometrie der Waben. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955.

[2] Blaschke, W. und G. Bol, Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differentialgeometrie. Springer, Berlin 1938.

[3] Haack, W., Differentialgeometrie. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955.

[4] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1956.

[5] Koch, R., Diagonale Netze aus Schmieg - und Krümmungslinien I, II. Journal of Geometry Vol. 7, 125-155 (1976), Vol. 9, 163-194 (1977).

[6] Koch, R., Diagonale Netze aus Schmieg - und Krümmungslinien in windschiefen Flächen. Archiv der Mathematik Bd. 29, 435-443 (1977).

[7] Mayrhofer, K., Sechseckgewebe aus Geodätischen. Mh. Math. Phys. Bd. 38, 401-404 (1931).

[8] Stephanidis, N. K., Sechseckgewebe auf Flächen negativer Krümmung. Mh. Math. Bd. 70, 261-269 (1966).

[9] Stephanidis, N. K., Über Sechseckgewebe auf Flächen. Journal of Geometry Vol. 2, 29-34 (1972).

[10] Stephanidis, N. K., Bestimmung von Flächen mit Sechseckgewebeeigenschaft. Journal of Geometry Vol. 18, 155-160 (1982).

[11] Thomsen, G., Un teorema topologico sulle schiere di curve... Boll. Un. Mat. Ital. Vol. 6, 80-85 (1927).