ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser untersuchte die Sesamölreaktion nach Soltsien auf Olivenöle und *fand* dass 19 Proben griechischer Olivenöle verschiedener Herkunft, obwohl sie garantiert rein waren, die Färbung nach obiger Reaktion deutlich zeigten. Daraus schliesst Verf. dass die Reaktion nach Soltsien, wenigstens für griech. Olivenöle, nicht einwandfrei wäre und er schlägt folgende Änderung der Methode vor, mit der es ihm gelungen ist diese Unregelmässigkeit zu überwinden.

Eine Mischung von 20 ccm Öl und 10 ccm Petroläther (70°-80°) wird im Scheidetrichter mit 30 ccm Salzsäure (1.152) 5 minutenlang kräftig geschüttelt. Man lässt sie stehen, bis die Schichten vollständig abgetrennt sind, entfernt die Säure, und schüttelt die Petrolätherische Lösung nochmals mit 30 ccm Salzsäure (1.152) 5 minutenlang. Man lässt sie nochmals stehen bis die Schichten vollständig abgetrennt sind, und dann führt man die Soltsienische Reaktion wie üblich aus und zwar auf einen kleinen Anteil der Petrolätherlösung. Nach dieser Behandlung verläuft die Reaktion negativ. Blinde Versuche zeigten dass Olivenöl mit 1% Sesamölzusatz nach der erwähnten Weise behandelt, die charakteristische Färbung der Reaktion nach Soltsien gegeben hat.

Eine Tabelle, die Verf. daneben stellt, zeigt die vergleichenden Reaktionen von Soltsien, Villavechia-Fabris und Kreis, sowie die physikalischen und chemischen Konstanten.

ΑΛΓΕΒΡΑ – **Über einen Satz von Gleichungen mit ganzen algebraischen Koeffizienten***, *von H. Ph. Vassiliou*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Man verdankt Kronecker den Satz[1]: « *Wenn eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Koeffizient der höchsten Potenz des Unbekannten gleich Eins ist, lauter Nullstellen vom Modul Eins hat, so sind sie Einheitswurzeln*». Es handelt sich hier eine notwendige und hinreichende Bedingung aufzufinden, nach welcher eine beliebige Gleichung mit *reellen* Koeffizienten durchweg Einheitswurzeln als Nullstellen besitzt.

Herr G. Rados[2] hat im Falle der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \omega_1 x + \omega_2 = 0 \tag{1}$$

* Φ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ.— Ἐπὶ ἑνὸς θεωρήματος ἐξισώσεων μὲ ἀκεραίους ἀλγεβρικοὺς συντελεστάς.

[1] L. KRONECKER, Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53, 1857, p. 173-175.

[2] Sur la théorie des racines de l'unité, *Rendiconti der Circolo Matematico di Palermo*, 36, 2° semestre 1913.

folgende Bedingung aufgestellt: «*Damit die Nullstellen der Gleichung* (1) *Einheitswurzeln seien ist notwendig und hinreichend, dass* ω_1 *eine ganze algebraische, zwischen* -2 *und* $+2$ *enthaltende Zahl darstellt, deren Konjugierte alle reell sind und dass* ω_2 *gleich Eins ist*». Die einzige Ausnahme macht die Gleichung $x^2-1=0$.

2. Es sei die Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten

$$a_0 z^m - a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} - \ldots \pm a_m = 0 \tag{2}$$

gegeben, deren Koeffizient der höchsten Potenz von z gleich Eins vorausgesetzt werden kann. Befreit man diese Gleichung durch Division mit $(z \pm 1)^v$ von der möglicherweise vorhandenen Wurzel ∓ 1 und nimmt man an, sie habe lauter Einheitswurzeln, so ist, wegen der Realität der Koeffizienten, mit jeder Wurzel auch ihre Reziproke vorhanden und zwar im selben Vielfachheitsgrade. Die vorgelegte Gleichung ist also reziprok vom geraden Grade $= 2n$, mit letztem Koeffizienten Eins, und sie reduziert sich, durch die Substitution $x = z + \frac{1}{z}$ in die Form

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0. \tag{3}$$

Die hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (2) sämtlich durch Einheitswurzeln befriedigt wird, ist nun folgende: «*Die Koeffizienten von* (3) *müssen ganze algebraische Zahlen mit reellen Konjugierten* $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \ldots, b_2^{(1)}, \ldots$ *sein, so dass die Wurzeln jeder der Gleichungen* $x^n + b_1^{(i_1)} x^{n-1} + \ldots + b_n^{(in)} = 0$ *alle reel sind und in den Grenzen* -2 *und* $+2$ *liegen.*» In dem von H. Rados untersuchten Falle $m=2$, lautet die Gleichung (3): $x + \omega_1 = 0$ und die obigen Bedingungen fallen mit denen des § 1 zusammen. Zum Beweise stützen wir uns auf folgenden Satz von Kronecker (l. c) «*Wenn eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren erste gleich Eins ist, lauter reelle Wurzeln hat, die in den Grenzen* -2 *und* $+2$ *liegen, die also durch* $2 \cos \alpha$, $2 \cos \beta \ldots$ *dargestellt werden können, so stehen die Winkel* $\alpha, \beta, \ldots$ *sämtlich in commensurablem Verhältniss in einem Rechten.*» Betrachten wir nämlich die Gleichung:

$$\prod_{i_1, \ldots i_n} \left(x^n + b_1^{(i_1)} x^{n-1} + \ldots + b_n^{(in)} \right) = 0 \quad \langle i_j = 1, 2, \ldots n_i \text{ für } j = 1, 2, \ldots n \rangle,$$

welche durch die Wurzeln der Gleichung (3) befriedigt wird, so sind ihre Koeffizienten ganzzahlige symmetrische Funktionen der b_h, folglich sind sie ganze rationale Zahlen, deren erste gleich Eins ist; sie erfüllt also alle Bedingungen des vorigen Satzes. Die Wurzeln der Gleichung (3) x_h, $(h = 1, 2, \ldots n)$, sind also von der Form $2\cos\frac{2k\pi}{n}$, d. h. ganze algebraische Zahlen mit reellen Konjugierten und diejenigen der Gleichung (2), die sich durch die Auflösung der quadratischen Gleichungen $z^2 - x_h z + 1 = 0$ $(h = 1, 2, \ldots n)$ ergeben, sind nach dem Satze von H. Rados, wie es sich beweisen sollte, Einheitswurzeln.

3. Die oben aufgestellte Bedingung ist auch notwendig. Denn die Koeffizienten von (2) müssen ganze algebraische Zahlen sein, welche, wie leicht zu ersehen ist, eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und reellen Wurzeln erfüllen. Die Konjugierten dieser Koeffizienten werden deswegen auch reell sein. Es genügt zu bemerken, dass die Koeffizienten von (2) von der Form sind:

$$a_1 = \cos\frac{2k_1\pi}{n_1} + \cos\frac{2k_2\pi}{n_2} + \ldots + \cos\frac{2k_m\pi}{n_m},\quad a_2 = \cos\left(2\pi\frac{n_2k_1 + n_1k_2}{n_1n_2}\right) + \ldots, \ldots$$

und dass jeder der Summanden in den rechten Gliedern eine Gleichung mit reellen Wurzeln und ganzzahligen Koeffizienten befriedigt. Konstruiert man alsdann die Gleichung, deren Wurzeln sind: $a_1^{(i)} = \cos\frac{2k_1^{(i)}\pi}{n_1} + \ldots, \ldots$ wo $k_1^{(i)}, \ldots$ unabhängig voneinander die Werte $1, \ldots n_1$, $1, \ldots n_2, \ldots$ durchlaufen, so hat man die gesuchte Gleichung. Die Koeffizienten von (3) sind ganze ganzzahlige Polynome derjenigen von (2), sie sind also auch sämtlich ihren Konjugierten reell. Dass, endlich, die Wurzeln von (3) reell und zwischen den Grenzen -2 und $+2$ liegen, ist unmittelbar klar.

4. Als Beispiel nehmen wir die Gleichung: $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$. Die zugehörige Gleichung der Form (3) lautet: $x^2 + ax + (b - 2) = 0$ und ihre Wurzeln sind alle reell mit einem Modul < 2, wenn man hat: $|a| < 4$, $0 \leq |2a| < b + 2$, $\left|\frac{a}{2}\right|^2 \leq b - 2$. Diese Relationen sollen erfüllt werden durch die Koeffizienten a, b und ihren Konjugierten, die alle reell sein müssen, solange die Wurzeln der vorgelegten Gleichung Einheitswurzeln sind. Beschränken wir uns im Körper der Rationalzahlen R, so ist es leicht, alle möglichen Fälle von Gleichungen 4 Grades mit verschiedenen Wurzeln ∓ 1 aufzufinden. Diese sind: $x^4 + 1 = 0$, $x^4 \pm x^2 + 1 = 0$, $x^4 + x^3 + x^2 \pm x + 1 = 0$, $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$, $x^4 \pm 3x^2 + 4x^2 \pm 3x^2 + 1 = 0$. Die Gleichung $x^4 + (5^{\frac{1}{2}} - 3)x^3 + 2x^2 + (5^{\frac{1}{2}} - 3)x + 1 = 0$

hat ganze Zahlen als Koeffizienten, welche die obigen Relationen befriedigen. Weil aber die Konjugierte der Zahl $5^{\frac{1}{2}}-3$ d.i. $-(5^{\frac{1}{2}}+3)$ dieselben Relationen nicht befriedigt, so sind alle Wurzeln dieser Gleichung nicht Einheitswurzeln, sie hat nämlich die Wurzeln der Gl. $x^2+(5^{\frac{1}{2}}-3)x+1=0$, welche, obwohl beide den Modul Eins besitzen, keine Einheitswurzeln sind (s. G. Rados l.c. s. 303-304).

5. Nehmen wir jetzt an, die Koeffizienten von (2) seien irgendwelche Zahlen eines endlichen Galoisschen Zahlkörpers K, ϱ^{ten}. Grades. Wir werden eine obere Schranke der Anzahl der Gleichungen mit reellen, aus dem Körper K genommenen Koeffizienten aufsuchen, indem wir die von H. Rados gegebene obere Schranke herabsetzen. Es ist $a_i = \pm a_{m-i}$ und wie bekannt (4) $|a_i| \leqq \binom{m}{i}$. Nehmen wir $a_i^{(h)}$ für $h=1, 2 \ldots \varrho$ die Konjugierten ebenfalls reelle Zahlen von a_i im Körper K, so wird die Relation (4) für alle $a_i^{(h)}$ gelten, denn jede mit den Koeffizenten $a_i^{(h)}$ gebildete Gleichung von der Form (2) hat alle ihre Wurzeln Einheitswurzeln.

Die Anzahl der Zahlen a_i übertrifft aber nicht die Zahl $\prod_{j=1}^{\varrho}\left\{2\binom{\varrho}{j}\binom{m}{i}^j+1\right\}$ ⟨s. G. Rados l.c. s. 303⟩; also die Anzahl der gesuchten Gleichungen übertrifft nicht die Zahl $2\prod_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\prod_{j=1}^{\varrho}\left\{2\binom{\varrho}{j}\binom{m}{i}^j+1\right\}$, wo unter $\left[\frac{m}{2}\right]$ die grösste ganze in $\frac{m}{2}$ enthaltende Zahl gemeint ist. Die Wurzeln ± 1 werden auch bei dieser Abschätzung mit in Rücksicht genommen.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὸν Kronecker ὀφείλομεν τὸ θεώρημα, ὅτι *«Ἐὰν μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, τῶν ὁποίων ὁ τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου εἶναι ἡ μονάς, ἔχῃ ὅλας αὐτῆς τὰς ρίζας φανταστικὰς μὲ μέτρον 1, τότε αἱ ρίζαι αὗται εἶναι ρίζαι τῆς μονάδος»*.

Ἐνταῦθα εὑρίσκομεν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα τυχοῦσα ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχῃ ρίζας αὐτῆς ρίζας τῆς μονάδος. Ἡ περίπτωσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξητάσθη ὑπὸ τοῦ κ. G. Rados. Ἐπίσης δίδομεν ἀνώτερον ὅριον τοῦ πλήθους τῶν ἐξισώσεων μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, λαμβανομένους ἐκ δοθέντος πεπερασμένου κανονικοῦ σώματος, τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι εἶναι ρίζαι τῆς μονάδος.