ται κληρονομικῶς καὶ ὀφείλεται εἰς ἐνδογενεῖς παράγοντας. Σήμερον οἱ βιολόγοι δέχονται ὅτι ἐντὸς τῶν χρωματοσωματίων εὑρίσκονται οἱ παράγοντες τῆς κληρονομικότητος, οἱ γενηταί, οἵτινες κέκτηνται τὴν ἰδιότητα τοῦ αὐξάνεσθαι καὶ πολλαπλασιάζεσθαι, ὅταν τὸ χρωματοσωμάτιον διαιρῆται.

Τὰ καρωτινοειδῆ δὲν σχηματίζονται ἐντὸς τοῦ πυρῆνος ἀλλ' ἐν τῷ πρωτοπλάσματι ἐντὸς ἐξειδικευμένων σωματίων. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ὤθησεν ἡμᾶς εἰς τὴν παραδοχὴν ὅτι ὁ γεννητὴς ὁ ἐξειδικευμένος πρὸς παραγωγὴν τοῦ καρωτινοειδοῦς, ἐξερχόμενος τοῦ πυρῆνος μεταβάλλεται εἰς καρωτινοπλάστην, ὅστις πολλαπλασιάζεται δι' ἐκφύσεως ἐντὸς τοῦ πρωτοπλάσματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ ΥΠΟ ΤΟΥ Κ. ΣΠ. ΔΟΝΤΑ

Μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνακοίνωσιν τοῦ κ. Ἰ. Πολίτου ὁ κ. Σπ. Δοντᾶς, λαβὼν τὸν λόγον, εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ὁ συνάδελφος κ. Ἰωάνν. Πολίτης εἶναι ἄξιος πολλῶν συγχαρητηρίων διὰ τὴν σημερινὴν πρωτότυπον ἀνακοίνωσίν του, ἡ ὁποία εἶναι ὄχι ἐκ τῶν συνήθων ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν.

Ἡ μεγάλη σημασία τῆς ἐργασίας ταύτης ἔγκειται κυρίως εἰς τὸ ὅτι αὕτη ἀνοίγει νέαν ὁδὸν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν χρωστικῶν οὐσιῶν κατωτάτων ὀργανισμῶν, εὑρισκομένων εἰς τὸ μεταίχμιον μεταξὺ τῶν φυτικῶν καὶ τῶν ζωικῶν κυττάρων.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Ἀλγεβροδακτύλιοι, *ὑπὸ **Παντ. Ρόκου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην εἰσάγομεν μίαν γενικὴν ἀλγεβρικὴν διαρρύθμισιν (structure algébrique), ὀνομάζομεν δὲ τὴν διαρρύθμισιν ταύτην ἀλγεβροδακτύλιον. Εἰς τὴν κλασσικὴν ἀνωτέραν ἄλγεβραν θεωροῦνται δακτύλιοι μὲ δύο πράξεις διμελεῖς. Ἡ κατασκευὴ τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν τοῦ ἀλγεβροδακτυλίου περιλαμβάνει δύο ὁμάδας πράξεων ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι διμελής. Ἐνῷ οἱ δακτύλιοι τῆς κλασσικῆς Ἀλγέβρας ὡς πρὸς τὴν πρώτην πρᾶξιν (πρόσθεσιν) ἀποτελοῦν σύμπλεγμα, οἱ ἀλγεβροδακτύλιοι ὡς πρὸς τὴν πρώτην ὁμάδα τῶν πράξεων ἀποτελοῦν ἡμισύμπλεγμα. Ἐνταῦθα διηυρύναμεν κατὰ τοιοῦτον τρόπον τὴν ἔννοιαν τοῦ δακτυλίου, ὥστε νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τὴν νέαν ἀλγεβρικὴν διαρρύθμισιν τὰς διαρρυθμίσεις τῶν δικτυωτῶν (lattice) καὶ τῶν ἀλγεβρῶν Boole.

---

* **PANT. ROCOS, Algèbre - anneaux.**

Διὰ τῆς παρούσης ἐρεύνης παρουσιάζομεν ὑπὸ ἑνιαίαν ἀλγεβρικὴν ἔκφρασιν τὰ ἰδεώδη εἰς τοὺς ἀλγεβροδακτυλίους καὶ τὰς ὑπολοίπους τάξεις εἰς τὰς ὁποίας χωρίζονται αἱ ἄλγεβραι αὐταὶ ὑπὸ τῶν κανονικῶν ἰσοδυναμιῶν.

Εἰς τὴν παράγραφον 3 δίδομεν τὴν ἀλγεβρικὴν κατασκευὴν τῶν ἰδεωδῶν εἰς τοὺς ἀλγεβροδακτυλίους. Δεικνύομεν περαιτέρω διὰ παραδειγμάτων ὅτι αὕτη περιλαμβάνει καὶ τὰ ἰδεώδη τῶν δικτυωτῶν καὶ ἀλγεβρῶν Boole. Κατόπιν διατυπώνομεν καὶ ἀποδεικνύομεν τρία θεωρήματα ἐκφράζοντα τὰς σχέσεις μεταξὺ ἰδεωδῶν καὶ κανονικῶν ἰσοδυναμιῶν, γενικώτερα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τῶν κλασσικῶν δακτυλίων. Ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα 3.3 διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ταυτότητα AUN = AΔN, διὰ τῆς ταυτότητος τῶν ὑπολοίπων τάξεων εἰς τὸν ἀλγεβροδακτύλιον Δ. Διατυπώνομεν καὶ ἀποδεικνύομεν περαιτέρω εἰς τὴν αὐτὴν παράγραφον τρία θεωρήματα, τὰ 3.4, 3.5 καὶ 3.6 ἐκφράζοντα τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν ἰδεωδῶν καὶ τῶν κανονικῶν ἰσοδυναμιῶν εἰς τοὺς ἀλγεβροδακτυλίους, ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τῶν κλασσικῶν δακτυλίων, ἀλλὰ γενικώτερα τούτων.

Εἰς τὴν τελευταίαν παράγραφον διατυπώνονται καὶ ἀποδεικνύονται γενικώτερα θεωρήματα ὁμομορφισμοῦ καὶ ἰσομορφισμοῦ εἰς τοὺς ἀλγεβροδακτυλίους.

Αἱ παραπομπαὶ κατωτέρω εἰς τὸν ἀριθμὸν 1 ἀναφέρονται εἰς τὴν διατριβήν μου: *Γενικεύσεις θεωρημάτων ὁμομορφισμοῦ καὶ ἰσομορφισμοῦ εἰς γενικὰς ἀλγέβρας καὶ ἀλγεβροδακτυλίους*. Ἀθῆναι 1954.

§ 2. ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωροῦμεν σύνολον $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$. Εἰς τὸ σύνολον αὐτὸ ἔχει ὁρισθῆ μία ἰσότης, δηλαδὴ μία σχέσις πληροῦσα τὰ ἀξιώματα τῆς αὐτοπαθείας, συμμετρίας καὶ μεταβατικότητος.

Τὸ σύνολον αὐτὸ ὑποθέτομεν ἐφωδιασμένον μὲ δύο ὁμάδας πράξεων.

Ἡ μία ὁμὰς τῶν πράξεων εἶναι αἱ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ μὲ 2 μέλη ἑκάστη. Ἡ ἄλλη ὁμὰς τῶν πράξεων εἶναι αἱ $f_1, f_2 \ldots, f_n$ μὲ 2 μέλη ἑκάστη.

Διὰ τοῦ συμβόλου $\alpha \varepsilon \Delta$ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Δ.

Ἐπίσης κατωτέρω χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\rightarrow$, τὸ ὁποῖον σημαίνει τότε, καὶ τὸ $\longleftrightarrow$ σημαῖνον τότε καὶ μόνον.

Τὸ σύνολον Δ ἀποτελεῖ ἡμισύμπλεγμα ὡς πρὸς μίαν πρᾶξιν φ, ὅταν ὡς πρὸς αὐτὴν ἀληθεύουν τὰ ἀξιώματα:

I) τῆς κλειστότητος: ἤτοι

διὰ κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon\Delta \rightarrow \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\ \varepsilon\Delta$.

II) τῆς προσεταιριστικότητος:

ἤτοι διὰ κάθε $\alpha, \beta, \gamma\ \varepsilon\Delta \rightarrow \varphi[\alpha, \varphi(\beta, \gamma)] = \varphi[\varphi(\alpha,\beta),\gamma]$

Τὸ σύνολον Δ, ἐφωδιασμένον μὲ τὴν ἰσότητα καὶ τὰς δύο ὁμάδας τῶν πράξεων τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν, ἀποτελεῖ μίαν ἀλγεβρικὴν διαρρύθμισιν, μίαν Ἄλγεβραν.

Συμβολικῶς γράφομεν τοῦτο ὡς ἕπεται:

$$\Delta = \{\Delta, =, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

Αἱ πράξεις τῆς ἀλγέβρας Δ ὑπόκεινται εἰς τὰ ἀξιώματα:

I) Ἡ ἄλγεβρα Δ εἶναι ὡς πρὸς ὅλας τὰς πράξεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ἡμισύμπλεγμα δι' ἑκάστην. Ὑπάρχει στοιχεῖον e εΔ καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα $\varphi(\alpha, e) = \alpha$, διὰ τὰς πράξεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Ὅλαι αἱ πράξεις φ_ι εἶναι ἀντιμεταθετικαί, ἤτοι $\varphi_\iota(\alpha, \beta) = \varphi_\iota(\beta, \alpha)$ διὰ κάθε α,βεΔ.

II) Ἡ ἄλγεβρα Δ εἶναι ἡμισύμπλεγμα, ἐπίσης καὶ δι' ἑκάστην τῶν πράξεων $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

III) Τέλος αἱ πράξεις f_j εἶναι ἐπιμεριστικαὶ ὡς πρὸς τὰς φ_ι δηλαδὴ διὰ κάθε α, β, γεΔ καὶ διὰ κάθε φ_ι ἔχομεν ὅτι:

$f_j[\varphi_\iota(\alpha, \beta), \gamma] = \varphi_\iota[f(\alpha_j, \gamma), f_j(\beta, \gamma)]$.

Ἡ ἄλγεβρα Δ ἡ ὁποία ὁρίζεται κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον ὀνομάζεται εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἀλγεβροδακτύλιος.

Παραδείγματα: 1) Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἀριθμῶν (μαζὶ) μὲ τὸ μηδὲν ἔχει ὡς πράξεις $\varphi_i(=1,2)$ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν πρᾶξιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς α, β, ἐκ τοῦ συνόλου, ν' ἀντιστοιχῇ ὡς ἐξαγόμενον ὁ ἀριθμὸς Μεγ $\{\alpha, \beta\}$ ἢ $\alpha \vee \beta$*

Πράξεις f_j διὰ $(j=1)$ τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διότι 1) ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν εἶναι ἡμισύμπλεγμα.

2) Ὡς πρὸς τὴν δευτέραν πρᾶξιν ἐπίσης εἶναι ἡμισύμπλεγμα, διότι α) ἔχει τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα. Μεγ$\{\alpha$, Μεγ$(\beta, \gamma)\}$=Μεγ(α, β, γ).

β) Ἔχει τὸ μηδὲν οὐδέτερον στοιχεῖον, Μεγ$\{\alpha, o\} = \alpha$ διὰ κάθε α τοῦ συνόλου.

γ) Εἶναι ἀντιμεταθετικόν, Μεγ$\{\alpha, \beta\}$=Μεγ$\{\beta, \alpha\}$.

II) Ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡμισύμπλεγμα τὸ σύνολόν μας.

III) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὸς πρὸς τὰς δύο προηγουμένας πράξεις· τοῦτο διὰ τὴν πρόσθεσιν εἶναι γνωστόν, διὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν ἔχομεν ὅτι:

$$\text{Μεγ}\{\alpha, \beta\} \times \gamma = \text{Μεγ}\{\alpha \times \gamma, \beta \times \gamma\}.$$

2) Οἱ σύνδεσμοι τοῦ Boole μὲ πράξεις

I) φ_i $(i=1,2)$ τὰς V (cup) καὶ Δ (difference)

II) f_j $(j=1)$ τὴν Λ (cap)

* Τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ὀνομάζομεν μεγαλύτερον.

Ὁρισμός: 2.2.

Ἕνας ἀλγεβροδακτύλιος Δ λέγεται μηδενοδύναμος ὡς πρὸς μίαν πρᾶξιν φ ἤ f, ὅταν ἔχωμεν ἀντιστοίχως, $\varphi(\alpha, \alpha) = \alpha$ ἤ $f(\alpha, \alpha) = \alpha$, διὰ κάθε $\alpha \varepsilon \Delta$.

Εἰς τὸ παράδειγμα 1 τοῦ προηγουμένου ὁρισμοῦ ὁ Δ εἶναι μηδενοδύναμος ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\text{Μεγ}\{\alpha, \beta\}$· ὄντως διότι $\text{Μεγ}\{\alpha, \alpha\} = \alpha$, διὰ κάθε $\alpha \varepsilon \Delta$.

Ὁ αὐτὸς ἀλγεβροδακτύλιος, ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν δὲν εἶναι, διότι ἐκεῖ $\varphi(\alpha, \alpha) = 2\alpha$.

Ὁρισμός: 2.3.

Ἕνας ἀλγεβροδακτύλιος λέγεται μηδενοδύναμος, ὅταν εἶναι μηδενοδύναμος ὡς πρὸς ὅλας τὰς πράξεις f_j.

Τὸ παράδειγμα 2 τοῦ ὁρισμοῦ 2.1 εἶναι παράδειγμα μηδενοδυνάμου ἀλγεβροδακτυλίου.

Ὁρισμός: 2.4.

Ἕνας ἀλγεβροδακτύλιος λέγεται ἀντιμεταθετικός, ὅταν $f_j(\alpha, \beta) = f_j(\beta, \alpha)$ διὰ κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$.

§ 3. ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΙ, ΙΔΕΩΔΗ

Ὁρισμός: 3.1.

Ἓν ὑποσύνολον J ἑνὸς ἀλγεβροδακτυλίου ὀνομάζεται δεξιόπλευρον ἰδεῶδες, ὅταν πληροῦνται τὰ κάτωθι:

I) Διὰ κάθε $\alpha, \beta \varepsilon J$ συνάγεται $\varphi_i(\alpha, \beta) \varepsilon J$ διὰ κάθε $i = 1, 2, \ldots m$.

II) Διὰ κάθε $\alpha \varepsilon J$ καὶ κάθε $\delta \varepsilon \Delta$ νὰ συνάγεται ὅτι $f_j(\alpha, \delta) \varepsilon J$ διὰ κάθε $j = 1, 2, \ldots n$.

Ὁρισμός: 3.2.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται τὸ ἀριστερόπλευρον ἰδεῶδες.

Ὁρισμός: 3.3.

Ἰδεῶδες J ἑνὸς ἀλγεβροδακτυλίου ὀνομάζεται ἓν ὑποσύνολον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι δεξιόπλευρον καὶ ἀριστερόπλευρον ἰδεῶδες αὐτοῦ*.

II) Ἡ ἔννοια τοῦ ἰδεώδους ἡ δοθεῖσα ἐδῶ συμπίπτει μὲ τὴν συνδεσμοθεωρητικὴν (δηλαδὴ τῆς θεωρίας τῶν Lattice) καὶ ὄχι τὴν ἀλγεβρικήν. Ἡ πρώτη εἶναι γενικωτέρα τῆς δευτέρας.

Παραδείγματα ἰδεωδῶν.

1) Λαμβάνομεν ἀλγεβροδακτύλιον $\Delta = \{0, 2, 4, 6 \ldots\}$ μὲ πράξεις φ_i τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸ μεγαλύτερον, καὶ πράξεις f_j τὸν πολλαπλασιασμόν.

---

* Εἰς τοὺς ἀντιμεταθετικοὺς ἀλγεβροδακτυλίους αἱ δύο ἔννοιαι συμπίπτουν καὶ ὑπάρχουν μόνον ἰδεώδη.

Ἰδεῶδες τότε εἰς τὸν Δ, παραγόμενον ἀπὸ τὸ στοιχεῖον $\alpha\varepsilon\Delta$, θὰ εἶναι τὸ $\alpha.\Delta+N_o\alpha$ (ὅπου N εἶναι τὸ σύνολον τοῦ συνενώματος τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν N καὶ τοῦ στοιχείου O, ἤτοι $N_o=NU\{O\}$· τότε δὲ τὸ $\alpha.\Delta+N_o\alpha=N_o\alpha$.

Τὸ ἰδεῶδες τὸ ὁποῖον π. χ. παράγεται ἀπὸ τὸ στοιχεῖον 6 εἶναι τὸ $(6)=$ $=\{0,6,12,18,24,\dots\}$

2) Ἂν λάβωμεν ὡς ἀλγεβροδακτύλιον τὸ ἴδιον σύνολον τοῦ παραδ. 1 καὶ θεωρήσωμεν πράξεις μόνον τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ἰδεῶδες τὸ παραγόμενον ἀπὸ ἕνα στοιχεῖον α $(J=(\alpha))$, θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $\alpha.\Delta$ καὶ τὸ στοιχεῖον $\text{Μεγ}\{\alpha,\alpha\}=\alpha$, ὅθεν $(\alpha)=\text{Μεγ}\{\alpha.\Delta,\alpha\}=\alpha\Delta U\{\alpha\}$. ἂν π. χ. λάβωμεν ὡς α τὸ 6 θὰ ἔχωμεν: $(6)=\{0,6,12,24,36,\dots\}$

3. Εἰς ἕνα σύνδεσμον Boole τὸ ἰδεῶδες τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $\alpha\Lambda\Delta$ καὶ $\alpha V\alpha=\alpha$· ἄρα τὰ στοιχεῖα $(\alpha\Lambda\Delta)\,V\{\alpha\}$, ἤτοι ὅλα τὰ στοιχεῖα $t\leq\alpha$.

Θεώρημα 3.1

Μία ἰσοδυναμία R εἰς ἕνα ἀλγεβροδακτύλιον, κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς πράξεις φ_i καὶ κανονικὴ Δεξιὰ ὡς πρὸς τὰς πράξεις f_j, χωρίζει τὸν Δ εἰς ὑπολοίπους τάξεις τοιαύτας, ὥστε ἡ τάξις N ἡ ὁποία περιέχει τὸ στοιχεῖον e εἶναι ἓν δεξιόπλευρον ἰδεῶδες, αἱ δὲ ἄλλαι τάξεις εἶναι αἱ $\varphi_i\,(N,\alpha)$ διὰ κάθε $\alpha\varepsilon\Delta$.

Ἀπόδειξις: 1) Λαμβάνομεν δύο στοιχεῖα α, β εN, τότε θὰ ἔχωμεν

(I) $\alpha\equiv e\ (R)$ καὶ $\beta\equiv e\ (R)$ καὶ ἐκ τούτων $\varphi_i\,(\alpha,\beta)\equiv\varphi_i\,(e,e)\ (R)$ διὰ κάθε $i=1,2$, ἀφοῦ ἡ R εἶναι κανονικὴ διὰ τὰς πράξεις φ_i.

Ἀλλὰ $\varphi_i\,(e,e)=e$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\varphi_i\,(\alpha,\beta)\equiv e\ (R)$, ὅθεν τὸ στοιχεῖον $\varphi_i\,(\alpha,\beta)\,\varepsilon N$.

II) Ἐὰν τὸ στοιχεῖον $\alpha\varepsilon N$ καὶ τὸ $\delta\varepsilon\Delta$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha\equiv e\ (R) \text{ καὶ } (2)\ f_j\,(\alpha,\delta)\equiv f_j\,(e,\delta)\ (R)\ (\text{I, λῆμ. } 3.1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $f_j\,(e,\delta)=e$ ἡ (2) γίνεται $f_j\,(e,\delta)\equiv e\ (R)$

Ὥστε τὸ N εἶναι δεξιόπλευρον ἰδεῶδες.

Τὸ σύμπλοκον (βλ. I, 3.3) $\varphi_i\,(N,\alpha)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ στοιχεῖα ἰσότιμα τοῦ α (Mod R).

Διότι ἔχομεν $n\equiv e\ (R)$ διὰ κάθε $n\varepsilon N$

ἑπομένως $\varphi_i\,(n,\alpha)\equiv\varphi_i\,(e,\alpha)\ (R)$

ἀλλὰ $\varphi_i\,(e,\alpha)=\alpha$ καὶ ἡ (3) γίνεται

$\varphi_i\,(n,\alpha)\equiv\alpha\ (R)$

---

* Διὰ τοὺς ὁρισμοὺς ἰσοδυναμία, κανονικὴ ἰσοδυναμία δεξιά, κανονικὴ ἰσοδυναμία ἀριστερά, κανονικὴ ἰσοδυναμία, βλέπε μνημονευθεῖσαν προηγουμένως ἐργασίαν.

Κάθε δὲ $\beta \varepsilon \Delta$ καὶ (5) $\beta \equiv \alpha$ (R) θὰ εἶναι στοιχεῖον τῆς τάξεως φ_i (N, α).

Ὄντως, διότι ἐκ τῆς (5) προκύπτει $\varphi_i(n, \beta) \equiv \varphi_i(n, \alpha)$ (R) (6)

Ἐπειδὴ δὲ $n \equiv e$ (R) ἡ (6) γίνεται $\varphi_i(e, \beta) \equiv \varphi_i(n, \alpha)$ (7)

Ἐκ τῆς (7) ἕπεται, ἀφοῦ $\varphi_i(e, \beta) = \beta$, ὅτι $\beta \equiv \varphi_i(n, \alpha)$ (R)

Θεώρημα 3.2.

Μία ἰσοδυναμία R εἰς ἕνα ἀλγεβροδακτύλιον Δ, κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς πράξεις φ_i καὶ κανονικὴ ἀριστερὰ ὡς πρὸς τὰς πράξεις f_j, χωρίζει τὸν Δ εἰς ὑπολοίπους τάξεις, τοιαύτας, ὥστε ἡ τάξις N ἡ ὁποία περιέχει τὸ e εἶναι ἓν ἀριστερόπλευρον ἰδεῶδες, αἱ δὲ ἄλλαι τάξεις εἶναι αἱ $\varphi_i(\alpha, N)$ διὰ κάθε $\alpha \varepsilon \Delta$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι ἀνάλογος μὲ τὴν προηγουμένην, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι αἱ πράξεις γίνονται πρὸς τὰ ἀριστερά.

Θεώρημα 3.3.

Κάθε ἰσοδυναμία R, κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς τάξεις φ_i καὶ f_j, εἰς ἕναν ἀλγεβροδακτύλιον Δ χωρίζει αὐτὸν εἰς ὑπολοίπους τάξεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἐκείνη ἡ ὁποία περιέχει τὸ e εἶναι ἓν ἰδεῶδες, αἱ δὲ ἄλλαι ὑπόλοιποι τάξεις εἶναι σύμπλοκα:

$$\varphi_i(\alpha, N) = \varphi_i(N, \alpha) \qquad \text{Διὰ κάθε } \alpha \varepsilon \Delta.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰς κάθε κανονικὴν ἰσοδυναμίαν ἑνὸς ἀλγεβροδακτυλίου ἀντιστοιχεῖ ἓν ἰδεῶδες.

Ἐφαρμογαί.

1) Θεωροῦμεν ὅλα τὰ κατὰ Borel μετρήσιμα σύνολα ἑνὸς χώρου R, καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν καλοῦμεν B. Τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι ἕνας ἀλγεβροδακτύλιος μὲ πράξεις φ_i $(i=1,2)$ τάς: φ_1 = συνένωμα, φ_2 = συμμετρικὴ διαφορὰ καὶ μία πρᾶξιν f_1 = τομή.

Εἰς τὸν ἀλγεβροδακτύλιον B ὁρίζομεν μίαν σχέσιν σ τοιαύτην ὥστε:

$$A\sigma B \longleftrightarrow \mu(A) = \mu(B)$$

α) ἡ σχέσις αὕτη σ εἶναι μία ἰσοδυναμία.

Πράγματι I) $A\sigma A$ διὰ κάθε $A\varepsilon B$, διότι $\mu(A) = \mu(A)$

II) ἐκ τοῦ $A\sigma B \rightarrow B\sigma A$, διότι ἐκ τῆς

$A\sigma B \rightarrow \mu(A) = \mu(B)$ καὶ ἐκ τούτου $B\sigma A$.

III) ἐκ τῶν $A\sigma B$, $B\sigma\Gamma \rightarrow A\sigma\Gamma, \ldots$, διότι ἐκ τῆς

$A\sigma B \rightarrow \mu(A) = \mu(B)$, ἐκ τῆς $B\sigma\Gamma \rightarrow \mu(B) = \mu(\Gamma)$, ὅθεν $\mu(A) = \mu(\Gamma) \rightarrow A\sigma\Gamma$.

β) Ἡ ἰσοδυναμία σ εἶναι κανονικὴ καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πράξεις εἰς τὸν B.

Διότι εὐκόλως συνάγεται ἐκ τῆς σχέσεως: $A \equiv B$ (σ) διὰ κάθε $X\varepsilon E$ ὅτι:

1) $AUX \equiv BUX$ (σ)

2) $A\Lambda X \equiv B\Lambda X$ (σ)

3) $A\Delta X \equiv B\Delta X$ (σ)*

* Δ εἶναι σημεῖον πράξεως.

Ἡ κανονικὴ ἰσοδυναμία σ εἰς τὸν ἀλγεβροδακτύλιον B κατὰ τὸ Θεώρημα 3.3 χωρίζει αὐτὸν εἰς ὑπολοίπους τάξεις, ἐκείνη δὲ ἡ ὁποία περιέχει τὸ e εἶναι ἓν ἰδεῶδες, εἶναι δὲ εἰς τὸ παράδειγμά μας τὸ σύνολον N τῶν μετρησίμων κατὰ Borel συνόλων τοῦ χώρου R, καὶ τῶν ὁποίων τὸ μέτρον εἶναι μηδέν. Αἱ ἄλλαι ὑπόλοιποι τάξεις εἶναι αἱ $A \cup N = A \Delta N$ διὰ κάθε $A \varepsilon B$ (δηλαδὴ κάθε A μετρήσιμον κατὰ Borel). Τοιουτοτρόπως ἐφαρμόζοντες τὴν θεωρίαν τῶν ἀλγεβροδακτυλίων ἀποδεικνύομεν τὴν δι' ἄλλου τρόπου ἀποδεικνυομένην ἰσότητα εἰς τὸ βιβλίον Measure theory τοῦ P. Halmos, second Prinding 1950, page 55).

2) Θεωροῦμεν τὸν ἀλγεβροδακτύλιον $\Delta = \{0,2,4,6,\ldots\}$ μὲ πράξεις φ_1 = πρόσθεσις καὶ f_1 πολλαπλασιασμός. Ὁρίζομεν εἰς τὸν Δ μίαν σχέσιν σ τοιουτοτρόπως:

$\alpha \sigma \beta \longleftrightarrow \alpha = \beta + h \cdot \mu$ ἢ $\beta = \alpha + h\mu$ (ὅπου μ εἶναι ὡρισμένος ἀριθμὸς ἐκ τοῦ Δ καὶ h ἕνας κατάλληλος ἀριθμὸς τοῦ Δ).

α) Ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία.

Πράγματι: I) $\alpha \sigma \alpha$, διότι τότε $h = 0$

II) ἐκ τῆς $\alpha \sigma \beta \rightarrow \beta \sigma \alpha$ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σ.

III) ἐκ τῶν σχέσεων $\alpha \sigma \beta$, $\beta \sigma \gamma \longleftrightarrow \alpha \sigma \gamma$.

β) Ἡ ἰσοδυναμία σ εἶναι κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς πράξεις τοῦ Δ, διότι ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha \equiv \beta$ (σ) ἕπεται ἀμέσως ὅτι $\alpha + \chi \equiv \beta + \chi$ (σ) καὶ $\alpha\chi = \beta\chi$ (σ).

Εἰς αὐτὸν τὸν ἀλγεβροδακτύλιον τὸ ἰδεῶδες N εἶναι τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ στοιχείου μ.

Ἤτοι τὸ $\mu.\Delta + \mu N_o = \mu.N_o$, ἤτοι τὸ ἰδεῶδες

$$O\,N = \{0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots\}.$$

Αἱ ἄλλαι ὑπόλοιποι τάξεις εἶναι:

$\gamma + \{0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots\}$. Διὰ κάθε $\gamma \varepsilon \Delta$.

Ἂν π. χ. $\mu = 6$. τότε

$$N = \{0,6,12,18,\ldots\}$$
$$2 + N = \{2,8,14,20,26,\ldots\}$$
$$4 + N = \{4,10,16,22,\ldots\}.$$

Ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα:

Εἰς κάθε ἰδεῶδες τοῦ ἀλγεβροδακτυλίου Δ ἀντιστοιχεῖ μία κανονικὴ ἰσοδυναμία;

Διὰ τοῦ ἀκολούθου παραδείγματος θὰ καταφανῇ ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει, ὅταν, φυσικά, θέλωμεν οἱ ὑπόλοιποι τάξεις νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν συνήθως ἔχουν.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν ἀλγεβροδακτύλιον

$$\Delta = \{0,2,4,6,8,\ldots\}$$

μὲ πράξεις, ὡς φ_1 τὴν πρᾶξιν τοῦ μεγαλυτέρου καὶ f_1 τὴν πρᾶξιν τοῦ συνήθους πολλαπλασιασμοῦ.

Ἂς ζητήσωμεν ἤδη ποῖον εἶναι τὸ ἰδεῶδες τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὸ στοιχεῖον $\alpha\varepsilon\Delta$.

Ἔστω J τὸ ἰδεῶδες αὐτό. Τότε ἀφοῦ περιέχει τὸ στοιχεῖον α, θὰ περιέχῃ καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συμπλόκου $\alpha.\Delta$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἰδεώδους. Ἐπίσης μαζὶ μὲ τὸ α θὰ περιέχῃ καὶ τὸ στοιχεῖον μέγαλ.$\{\alpha,\alpha\}=\alpha$, ἄρα καὶ τὰ στοιχεῖα μέγαλ. $\{\alpha,\alpha\Delta\}$, ἄρα θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα $\{\alpha \cup \alpha.\Delta\}$.

Ἀντιστρόφως κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου $\{\alpha \cup \alpha.\Delta\}$ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ J, διότι ἀφοῦ τὸ $\alpha\varepsilon J$ καὶ τὸ $\alpha\Delta\varepsilon J$ καὶ τὸ μέγαλ.$\{\alpha,\alpha\Delta\}$ εJ τὸ ὁποῖον εἶναι $\{\alpha \cup \alpha.\Delta\}$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω $J=(\alpha)=\{0,\alpha,2\alpha,4\alpha,\ldots\}$

Ἂν $\alpha=6$, τότε θὰ ἔχωμεν $(6)=\{0,6,12,24,\ldots\}$ αἱ ὑπόλοιποι τάξεις θὰ εἶναι:

Μεγαλ. $\{2,J\}=\{2,6,12,24,\ldots\}$

Μεγαλ. $\{4,J\}=\{4,6,12,24,\ldots\}$

Ἄρα βλέπομεν ὅτι αἱ ὑπόλοιποι τάξεις δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ στοιχεῖα ξένα πρὸς ἄλληλα.

Ποῖαι συνθῆκαι ἀπαιτοῦνται εἰσέτι, ἐὰν θέλωμεν εἰς κάθε ἰδεῶδες ν᾽ ἀντιστοιχῇ μία κανονικὴ ἰσοδυναμία;

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο τὸ ἰδεῶδες N νὰ πληροῖ τὰς συνθήκας· 1) τὸ N νὰ περιέχῃ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον e κοινὸν εἰς ὅλας τὰς ἀντιμεταθετικὰς πράξεις φ καὶ 2) μαζὶ μὲ κάθε στοιχεῖον $\nu\varepsilon N$ νὰ ὑπάρχῃ ἓν στοιχεῖον $\nu'\varepsilon N$ τοιοῦτον, ὥστε $\varphi_i(\nu,\nu')=e$ διὰ κάθε πρᾶξιν φ_i.

Ὑπ᾽ αὐτὰς τὰ προϋποθέσεις ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις.

Θεώρημα 3.4.

Εἰς ἕνα ἀλγεβροδακτύλιον Δ, διὰ κάθε δεξιόπλευρον ἰδεῶδες N (πληροῦν τὰς προϋποθέσεις 1 καὶ 2) ἀντιστοιχεῖ μία ἰσοδυναμία R κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς πράξεις φ_i καὶ κανονικὴ δεξιὰ ὡς πρὸς τὰς πράξεις f_j.

Ἀπόδειξις.

Ὁρίζομεν εἰς τὸν ἀλγεβροδακτύλιον Δ μίαν σχέσιν R τοιαύτην, ὥστε $\alpha R\beta \longleftrightarrow \alpha=\varphi_i(\beta,\nu)$ (διὰ κάθε πρᾶξιν φ_i ὑπάρχει ἓν $\nu\varepsilon N$, ὥστε ἡ ἰσότης $\alpha=\varphi_i(B,\nu)$ νὰ ἰσχύῃ).

α) Ἡ σχέσις R εἶναι ἰσοδυναμία διότι:

I) $\alpha R\alpha$ διὰ κάθε $\alpha\varepsilon\Delta$ ἀφοῦ $\alpha=\varphi_i(\alpha,e)$.

II) ἂν $\alpha R\beta \rightarrow \beta R\alpha$, διότι ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι $\alpha=\varphi_i(\beta,\nu)$ (1) διὰ κάθε πρᾶξιν φ_i ἐκ τῆς ὑποθέσεως (2) ἕπεται ὅτι διὰ κάθε $\nu \varepsilon N$ ὑπάρχει ἓν $\nu' \varepsilon N$ καὶ διὰ κάθε πρᾶξιν φ_i, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\varphi_i(\alpha,\nu') = \varphi_i[\varphi_i'(\beta,\nu),\nu'] \quad (2)$$

Ἀλλὰ $\varphi_i[\varphi_i(\beta,\nu),\nu'] = \varphi_i[\beta,\varphi_i(\nu,\nu')]$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ν' ἔχει ληφθῆ, ὥστε

$\varphi_i(\nu,\nu') = e$ ἔχομεν ὅτι $\varphi_i(\alpha,\nu') = \beta$, ὅθεν $\beta R \alpha$.

III) Ἂν ἔχωμεν $\alpha R \beta$ καὶ $\beta R \gamma \rightarrow \alpha R \gamma$

Πράγματι διότι ἐκ τῶν ὑποθέσεων ἔχομεν

$$\alpha = \varphi_i(\beta,\nu_1)$$

$$\beta = \varphi_i(\gamma,\nu_2)$$

Ἐκ τῶν (1) ἔχομεν:

$$\alpha = \varphi_i[\varphi_i(\gamma,\nu_2),\nu_1] = \varphi_i[\gamma,\varphi_2(\nu_2,\nu_1)]. \quad (2)$$

Ἐφ' ὅσον ὅμως $\varphi_2(\nu_2,\nu_1) = \nu \varepsilon N$ ἡ (2) γίνεται $\alpha = \varphi_i(\gamma,\nu)$ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει τὸν ἰσχυρισμόν.

β) Ἡ R εἶναι κανονικὴ ἰσοδυναμία ὡς πρὸς τὰς πράξεις φ_i.

Διότι ἂν (3) $\alpha \equiv \beta$ (R) θὰ ἔχωμεν

$$(4)\ \varphi_i(\alpha,\nu) \equiv \varphi_i(\beta,\nu) \quad (R)$$

Πράγματι ἐκ τῆς (3) ἕπεται ὅτι:

$\alpha = \varphi_i(\beta,\nu)$ διὰ $\nu \varepsilon N$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν ὅτι:

$$(5)\ \varphi_i(\alpha,\chi) = \varphi_i[\varphi_i(\beta,\nu),\chi] \text{ διὰ κάθε } \chi \varepsilon \Delta.$$

Ἀλλὰ $\varphi_i[\varphi_i(\beta,\nu),\chi)] = \varphi_i[\beta,\varphi_i(\nu,\chi)]$ καὶ ἐπειδὴ $\varphi_i(\nu,\chi) = \varphi_i(\chi,\nu)$, (ἐξ ὑποθέσεως φ_i ἀντιμεταθετικαί).

ἡ (5) γίνεται $\varphi_i(\alpha,\chi) = \varphi_i[\beta,\varphi_i(\chi,\nu)]$ καὶ ἀκόμη

$$\varphi_i(\alpha,\chi) = \varphi_i[\varphi_i(\beta,\chi),\nu)] \text{ ὥστε:}$$

$$\varphi_i(\alpha,\chi) \equiv \varphi_i(\beta,\chi) \quad (R).$$

III) Ἡ R εἶναι κανονικὴ δεξιὰ ὡς πρὸς τὰς πράξεις f_j δηλαδὴ ἐκ τῆς (6) $\alpha \equiv \beta$ (R) $\rightarrow f_j(\alpha,\chi) \equiv f_j(\beta,\chi)$ (R) διότι ἐκ τῆς (6) ἔχομεν:

$$(7)\ \alpha = \varphi_i(\beta,\nu) \text{ διὰ } \nu \varepsilon N$$

Ἐκ τῆς (7) προκύπτει $f_j(\alpha,\chi) = f_j[\varphi_i(\beta,\nu),\chi]$ (8) ἀλλὰ τὸ β' μέλος τῆς (8) γράφεται: $f_j[\varphi_i(\beta,\nu),\chi] = \varphi_i[f_j(\beta,\chi), f_j(\nu,\chi)]$ καὶ ἐπειδὴ $f_j(\nu,\chi) = \nu'$, ἀφοῦ τὸ N εἶναι δεξιόπλευρον ἰδεῶδες ἔχομεν ὅτι: $f_j[\varphi_i(\beta,\nu),\chi)] = \varphi_i[f_j(\beta,\chi),\nu']$, ὅθεν

$$f_j(\alpha,\chi) = \varphi_i[f_j(\beta,\chi),\nu'] \text{ ἄρα } f_j(\beta,\chi) \equiv f_j(\beta,\chi) \quad (R).$$

Ὁρισμὸς 3.4.

Ἕνας ἀλγεβροδακτύλιος Δ ὀνομάζεται προσθετικὰ συμπληρωμένος, ὅταν διὰ κάθε $\alpha \varepsilon J$ καὶ κάθε φ_i ὑπάρχῃ ἓν τοὐλάχιστον $\alpha' \varepsilon \Delta$, ὥστε

$$\varphi_i(\alpha,\alpha') = \varphi_i(\alpha',\alpha) = e.$$

Διατυποῦμεν ἤδη τ' ἀκόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 3.5.

Εἰς ἕνα ἀλγεβροδακτύλιον Δ, προσθετικὰ συμπληρωμένον, εἰς κάθε ἀριστερόπλευρον ἰδεῶδες N ἀντιστοιχεῖ μία ἰσοδυναμία κανονικὴ ὡς πρὸς τὰς πράξεις φ_i καὶ κανονικὴ ἀριστερὰ ὡς πρὸς τὰς πράξεις f_j.

Θεώρημα 3.6.

Εἰς ἕνα ἀλγεβροδακτύλιον Δ, προσθετικὰ συμπληρωμένον, εἰς κάθε ἰδεῶδες N ἀντιστοιχεῖ μία ἰσοδυναμία, κανονικὴ ὡς πρὸς ὅλας τὰς πράξεις αὐτοῦ.

§ 4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΗΜΙΑΛΓΕΒΡΟΔΑΚΤΥΛΙΟΥΣ

Θεώρημα 4.1.

Εἰς κάθε ὁμόμορφον ἀπεικόνισιν $\overline{\Delta}$ ἑνὸς ἀλγεβροδακτυλίου, ἀντιστοιχεῖ μία ἰσοδυναμία R, κανονικὴ ὡς πρὸς ὅλας τὰς πράξεις αὐτοῦ, ἰσοδυναμία ὁμομορφισμοῦ. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Δ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς εἰκόνα εἰς τὸν Δ τὸ μοναδιαῖον στοιχεῖον αὐτοῦ, ἀποτελοῦν ἓν ἰδεῶδες N· ὁ δὲ δακτύλιος τῶν ὑπολοίπων τάξεων τοῦ Δ ὡς πρὸς τὴν ἰσοδυναμίαν R εἶναι ἰσόμορφος πρὸς τὸν $\overline{\Delta}$, ἤτοι $\Delta/R = \Delta/N = \overline{\Delta}$.

Ἀπόδειξις:

Ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R εἰς τὸν Δ τοιαύτην, ὥστε $\alpha R \beta$ διὰ

$$\alpha, \beta \varepsilon \Delta \longleftrightarrow \overline{\alpha} = \overline{\beta}.$$

Προφανῶς ἡ σχέσις R εἶναι ἰσοδυναμία.

Ἡ R εἶναι κανονικὴ ὡς πρὸς ὅλας τὰς πράξεις τοῦ Δ.

Πράγματι, διότι ἂν $\alpha \equiv \beta\ (R)$ (1)

Θὰ ἔχωμεν $\varphi_i(\alpha, \chi) \equiv \varphi_i(\beta, \chi)\ (R)$ διὰ κάθε $\chi \varepsilon \Delta$ (2)* καὶ $f_j(\alpha, \chi) \equiv f_j(\beta, \chi)\ (R)$

Πράγματι λόγῳ ὁμομορφισμοῦ ἔχομεν $\overline{\varphi_i(\alpha, \chi)} = \varphi_i(\overline{\alpha}, \overline{\chi}) = \varphi_i(\overline{\beta}, \overline{\chi}) = \overline{\varphi_i(\beta, \chi)}$

Ὁμοίως $\overline{f_j(\alpha, \chi)} = f_j(\overline{\alpha}, \overline{\chi}) = f_j(\overline{\beta}, \overline{\chi}) = \overline{f_j(\beta, \chi)}$.

Ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Δ τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς εἰκόνα τὸ $\overline{e}$ (κοινὸν δι' ὅλας τὰς πράξεις φ_i τοῦ Δ, μοναδιαῖον στοιχεῖον) ἀποτελοῦν ἰδεῶδες.

Διότι: ἂν $\alpha \varepsilon N$ καὶ $\beta \varepsilon N$, τότε ἔχομεν $\overline{\alpha} = \overline{e}$ καὶ $\overline{\beta} = \overline{e}$ ὅθεν

$$\overline{\varphi_i(\alpha, \beta)} = \varphi_i(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \varphi_i(\overline{e}, \overline{e}) = \overline{e}, \text{ ἄρα } \varphi_i(\alpha, \beta)\ \varepsilon N.$$

ἂν δὲ $\delta \varepsilon \Delta$, τότε ἔχομεν $\overline{f_j(\alpha, \delta)} = f_j(\overline{\alpha}, \overline{\delta}) = f_j(\overline{e}, \overline{\delta}) = \overline{e}$, ὥστε καὶ $f_j(\alpha, \delta) \varepsilon N$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει εὐκόλως τὸ θεώρημα.

RÉSUMÉ

Dans le présent travail nous introduisons une structure algébrique, appelée algèbre-anneau. Cette structure, se compose d'un ensemble fourni avec une égalité, et de deux groupes d'opérations de 2-membres chacune.

Les algèbre-anneaux sont construits de telle façon qu'ils contiennent les structures de treillis et des algèbres de Boole.

Dans les algèbre-anneaux la construction des ideaux et des classes residuelles est faite de la même façon; et de la même forme sont fait les idéaux et les classes résiduelles dans les treillis. Nous considérons ensuite les liaisons qui existent entre les équivalences régulières et les ideaux, dans les algèbre-anneaux, et nous exprimons et demontrons six théorèmes pour constituer ces liaisons.

A la fin du travail nous examinons les homomorphismes et isomorphismes dans ces structures algébriques, et nous exprimons et démontrons le théorème général d'Homomorphisme.

ΒΟΤΑΝΙΚΗ.—Συμβολὴ εἰς τὴν μελέτην τῶν διατόμων τῶν νήσων Πόρου, Ὕδρας καὶ Σπετσῶν, *ὑπὸ* ***Χρ. Φούφα.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μαξ. Μητσοπούλου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ χλωρὶς τῆς Ἑλλάδος ἐξητάσθη ὑπὸ πολυαρίθμων ἐρευνητῶν, αἱ ἔρευναι ὅμως αὗται ἀφορῶσι κυρίως εἰς τὰ σπερματόφυτα. Τὸ ἱστορικὸν τῶν περὶ τὴν συλλογὴν καὶ σπουδὴν τῶν φυκῶν τῆς Ἑλλάδος ἀσχοληθέντων φυσιοδιφῶν ἔχει οὕτως: τὸ 1878 ὁ Schmitz ἠσχολήθη περὶ τὴν διάγνωσιν μικροῦ ἀριθμοῦ φυκῶν τῆς Ἀττικῆς, βραδύτερον ὁ G. B. deToni (1901) ἐδημοσίευσεν ἐν τῷ περιοδικῷ La nuova Notarisia κατάλογον τῶν ὑπὸ τοῦ A. Forti ἐν Σουνίῳ συλλεγέντων φυκῶν, περιλαμβάνοντα 43 εἴδη. Ἐπὶ πλέον περὶ τὴν διάγνωσιν καὶ βιολογίαν τῶν φυκῶν τῆς Ἑλλάδος ἠσχολήθησαν καὶ οἱ Bory de Saint Vincent (Πελοπόννησος), Grunow (Ἰόνιοι νῆσοι), μεταξὺ δὲ τῶν Ἑλλήνων οἱ Μηλιαράκης (Σκίαθος), Κανταρτζῆς (Λέρος), Διαννελίδης (Παγασητικὸς κόλπος), Κατσικόπουλος (Ἀλεξανδρούπολις), Στεφανίδης (Κέρκυρα).

Ἡ συστηματικὴ ὅμως μελέτη τῶν φυκῶν τῶν Ἑλληνικῶν θαλασσῶν προωθήθη κυρίως ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ Ι. Πολίτου διὰ τῶν ἐργασιῶν του ἐπὶ τῶν φυκῶν τῆς χερσονήσου τοῦ Ἄθω, τῆς Κρήτης, τῶν Κυκλάδων κλπ. Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀφορᾷ εἰς τὴν μελέτην τῶν διατόμων τῶν νήσων Πόρου, Ὕδρας καὶ Σπετσῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἔρευνα δὲν εἶχε γίνει μέχρι τοῦδε. Τὸ πρὸς ἐξέτασιν ὑλικὸν συνελέγη ἐκ τοῦ πεπτικοῦ σωλῆνος τῶν ὁλοθουρίων, ἐκ διαφόρων φυκῶν καὶ ἐκ τῶν ὀστράκων τῆς Πίννης τῆς εὐγενοῦς (Pinna nobilis).

Ὁ ἀριθμὸς τῶν σημειωθέντων εἰδῶν ἀνέρχεται εἰς ἑκατὸν ἓν (101). Ἐκ τῶν εἰδῶν τούτων τινὰ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὴν περὶ θαλασσίας χλωρίδος τῆς Ἀττικῆς ἐργασίαν τοῦ Καθηγητοῦ Ι. Πολίτου, τινὰ δὲ ἀπαντῶσι σπανίως.