

σκευῆς ἑλλείψεως, τῆς ὁποίας ἡ μὲν σταθερὰ εὐθεῖα  $AB$  εἶναι ἡ παράμετρος  $2/P$ , ἡ δὲ εὐθεῖα  $PO$  εἶναι ὁ μέγας ἡμίαιξων (σχ. 3).

Εἰς τὴν τρίτην ταύτην περίπτωσιν τὸ μέγιστον παραβαλλόμενον παρὰ τὴν εὐθεῖαν  $AB$  παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ  $APOK = (KN)^2$ , ὅτε  $KN$  εἶναι ὁ μικρὸς ἡμίαιξων τῆς ἑλλείψεως. Εἶναι φανερὰ ἡ ἰσχὺς τοῦ θεωρήματος, ὅταν ἡ  $PO$ , μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς  $\frac{AB}{2}$  δὲν εἶναι κάθετος ἐκ τοῦ μέσου τῆς  $AB$ , ἀλλὰ πλαγία.

#### ZUSSAMMENFASSUNG

Nach der von Moritz Cantor gegebenen Erklärung der 27. Satz des VI. Buches der Elemente von *Euklid*, der erste Satz, der in der Geschichte der Mathematik über Maximum vorkommt, als Funktion geschrieben besagen würde:  $X(a - X)$  erhält seinen grössten Wert durch  $X = \frac{a}{2}$ .

*E. Stamatis* teilt mit, dass der Satz gilt allgemein, d. h. wenn die von der Mitte der gegebenen geraden Linie  $a$  gezogene gerade Linie kleiner, gleich oder grösser als  $\frac{a}{2}$  ist.

ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ. — Περί μιᾶς βορρικούχου καθ' αὐτὸ ἀλκαλικῆς θειοπηγῆς παρὰ τὴν Παλαιοβράχην Φθιώτιδος, ὑπὸ Μιχ. Α. Περετέση. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Γεωργ. Ἰωακείμογλου.

Εἰς ἀπόστασιν τριῶν περίπου χιλιομέτρων ΒΔ. τοῦ χωρίου Παλαιοβράχα, ἐντὸς τῆς κοιλάδος τοῦ Σπερχειοῦ, ἀναβλύζει ὑπόθερμος μεταλλικὴ πηγὴ χρησιμοποιομένη ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν ὑπὸ τῶν κατοίκων τῶν πέριξ χωρίων πρὸς λουτροθεραπείαν.

Ἡ ἀνάβλυσις γίνεται νῦν ἐκ τοῦ πυθμένος δεξαμενῆς κοινῶν λουτρῶν, διαστάσεων  $4 \times 6$  μέτρων περίπου. Ἡ κατ' ἐκτίμησιν ὑδροπαροχὴ τῆς πηγῆς ἀνέρχεται εἰς 150 κυβ. μέτρα κατὰ 24ωρον. Τὴν πηγὴν αὐτὴν ἐπεσκεψθῆμεν τὴν 9ην Ἰουλίου τοῦ 1953 πρὸς ἐκτέλεσιν ἐπιτοπιῶν προσδιορισμῶν καὶ μετρήσεων ὡς καὶ διὰ τὴν λήψιν δειγμάτων ὕδατος πρὸς πλήρη χημικὴν ἀνάλυσιν. Διὰ μέσου τοῦ ὕδατος τῆς πηγῆς ἐκλύονται κατὰ πυκνὰ διαστήματα φουσαλλίδες καυσίμων ἀερίων, εἰς τὴν χημικὴν ἀνάλυσιν τῶν ὁποίων θέλομεν προβῆ προσεχῶς.

Ἡ ὅλη περιοχὴ τῆς πηγῆς ἀποτελεῖται ἐκ στρωμάτων φλύσχου, ἧτοι γεωλο-

ρικῶς εἶναι ἢ αὐτὴ μὲ τὰς περιοχὰς ἔνθα ἀναβλύζουσι αἱ ἄλλαι μέχρι τοῦδε γνωσταὶ καθ' αὐτὸ ἀλκαλικαὶ θειοπηγαὶ τοῦ Σμοκόβου καὶ τοῦ Πλατυστόμου. Τὸ ἰδιάζον τῆς πηγῆς Παλαιοβράχας εἶναι ὅτι περιέχει ἐπιπροσθέτως βορικούχους ἐνώσεις, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ ἐν δέκατον περίπου τοῦ συνόλου τῶν διαλελυμένων ἀλάτων καὶ αἵτινες δὲν προέρχονται ἐκ διηθήσεων θαλασσίου ὕδατος.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς χημικῆς ἀναλύσεως καὶ τῆς φυσικοχημικῆς ἐξετάσεως τοῦ ὕδατος τῆς πηγῆς ἔχουν ὡς ἑξῆς :

#### ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ

Βορικούχος καθ' αὐτὸ ἀλκαλικὴ θειοπηγή.

#### ΟΡΓΑΝΟΛΗΠΤΙΚΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΤΟΥ ΥΔΑΤΟΣ

Διαύγεια : Τελεία

᾽Οσμὴ : ᾽Ασθενεστάτη ἀπὸ ὕδροθειοῦ

Γεῦσις : ᾽Ιδιάζουσα

Χρῶμα : Οὐδὲν

#### ΦΥΣΙΚΟΧΗΜΙΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑΙ

Θερμοκρασία 26,5°. Ταῦτόχρονος θερμοκρασία ἀέρος ὑπὸ σκιὰν 28,8°.

Πυκνότης  $15^{\circ}/4^{\circ} = 0,99944$ ,  $15^{\circ}/15^{\circ} = 1,00031$ .

Ραδιενέργεια = 0,40 μονάδες Mache ἢ 0,15 Milli - micro - Curie.

᾽Εκθέτης ὕδρογόνου  $pH = 9,6$  εἰς  $25^{\circ}$  (ἡλεκτρομετρικῶς).

#### ΧΗΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

##### ᾽Αντίδρασις.

Διὰ φαινολοφθαλεΐνης ἰσχυρῶς θετική.

##### ᾽Αλκαλικότης.

Μετρομένη δι' ὕδροχλωρικοῦ ὀξέος N/10 μὲ δείκτην πορτοκαλλόχρουν τοῦ μεθυλίου ἢ ἀλκαλικότης ἑνὸς χιλιογράμμου ὕδατος ἰσοδυναμεῖ πρὸς 25,66 κ. ἑ. N/10 ἀλκάλειος.

##### Στερεὸν ὑπόλειμμα.

᾽Εν χιλιογράμμῳ ὕδατος παρέχει 0,3347 γραμμ. στερεοῦ ὑπολείμματος εἰς  $100^{\circ}$  καὶ 0,3277 γραμμ. στερεοῦ ὑπολείμματος εἰς  $180^{\circ}$ .

**Ίωδιον αναλισκόμενον.**

Τὸ ὕδροθεισὸν ἑνὸς χιλιογράμμου ὕδατος ἀναλίσκει 8,44 κ. ἑ. N/10 διαλύματος ἰωδίου ἧτοι 0,1071 γραμμ. ἰωδίου.

**Μὴ διϊστάμενα ὀξέα.**

Ἐν χιλιογράμμῳ ὕδατος περιέχει 0,0863 γραμμ. μεταπυριτικοῦ ὀξέος ( $H_2SiO_3$ ) καὶ 0,0201 γραμμ. μεταβορικοῦ ὀξέος ( $HBO_2$ ).

Τὸ σύνολον τῶν ἐν τῷ ὕδατι ἐνώσεων τοῦ βορίου, ἐκπεφρασμένον εἰς μεταβορικὸν ὀξύ ἰσοῦται πρὸς 0,0352 γραμμ. ἀνὰ χιλιογράμμῳ ὕδατος.

**Κατιόντα καὶ ἀνιόντα.**

Ἐν χιλιογράμμῳ ὕδατος περιέχει:

**Κατιόντα.**

Κάλιον ἰόν ( $K^+$ ) . . . . .	0,0027	γραμμ.
Νάτριον ἰόν ( $Na^+$ ) . . . . .	0,0935	”
Ἀμμώνιον ἰόν ( $NH_4^+$ ) . . . . .	0,0028	”
Ἀσβέστιον ἰόν ( $Ca^{++}$ ) . . . . .	0,00246	”
Μαγνήσιον ἰόν ( $Mg^{++}$ ) . . . . .	0,00025	”
Σίδηρον ἰόν ( $Fe^{++}$ ) . . . . .	0,00011	”
Ἀργίλλιον ἰόν ( $Al^{+++}$ ) . . . . .	0,00031	”

**Ἀνιόντα.**

Νιτρικὸν ἰόν ( $NO_3^-$ ) . . . . .	0,0018	”
Ὑδροθεισὸν ( $HS^-$ ) . . . . .	0,0139	”
Χλώριον ἰόν ( $Cl^-$ ) . . . . .	0,0382	”
Θεικὸν ἰόν ( $SO_4^{--}$ ) . . . . .	0,0182	”
Ὑδροανθρακικὸν ἰόν ( $HCO_3^-$ ) . . . . .	0,0886	”
Ἀνθρακικὸν ἰόν ( $CO_3^{--}$ ) . . . . .	0,0208	”
Ὑδροφωσφορικὸν ἰόν ( $HPO_4^{--}$ ) . . . . .	0,0000076	”
Βορικὸν ἰόν ( $H_2BO_3^-$ ) . . . . .	0,0205	”
Μεταπυριτικὸν ἰόν ( $HSiO_3^-$ ) . . . . .	0,0063	”

**Ποιοτικαὶ ἀνιχνεύσεις καὶ στοιχεῖα εἰς ἴχνη.**

Ἀπουσία λιθίου.

Ἀπουσία τιτανίου.

Ἀπουσία ἀρσενικοῦ.

Ἀπουσία νιτρῶδων ἀλάτων.

## ΧΙΛΙΟΣΤΟΪΟΝΤΑ ΚΑΙ ΧΙΛΙΟΣΤΟΪΣΟΔΥΝΑΜΑ

Ἐν χιλιόγραμμον ὕδατος περιέχει :

Κατιόντων.	Χιλιστοΐοντα	Χιλιστοΐσο- δύναμα
Καλίου ἰόντος (K <sup>+</sup> ) . . . . .	0,069	0,069
Νατρίου ἰόντος (Na <sup>+</sup> ) . . . . .	4,065	4,065
Ἀμμωνίου ἰόντος (NH <sub>4</sub> <sup>+</sup> ) . . . . .	0,155	0,155
Ἀσβεστίου ἰόντος (Ca <sup>++</sup> ) . . . . .	0,0613	0,1226
Μαγνησίου ἰόντος (Mg <sup>++</sup> ) . . . . .	0,0102	0,0204
Σιδήρου ἰόντος (Fe <sup>++</sup> ) . . . . .	0,0020	0,0040
Ἀργιλίου ἰόντος (Al <sup>+++</sup> ) . . . . .	0,0115	0,0345
		<hr/> 4,4705
<b>Ἀνιόντων.</b>		
Νιτρικοῦ ἰόντος (NO <sub>3</sub> <sup>-</sup> ) . . . . .	0,029	0,029
Ὑδροθειοῦ ἰόντος (HS <sup>-</sup> ) . . . . .	0,420	0,420
Χλωρίου ἰόντος (Cl <sup>-</sup> ) . . . . .	1,077	1,077
Θειικοῦ ἰόντος (SO <sub>4</sub> <sup>==</sup> ) . . . . .	0,190	0,380
Ὑδροανθρακικοῦ ἰόντος (HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup> ) . . . . .	1,452	1,452
Ἀνθρακικοῦ ἰόντος (CO <sub>3</sub> <sup>==</sup> ) . . . . .	0,3466	0,693
Ὑδροφωσφορικοῦ ἰόντος (HPO <sub>4</sub> <sup>==</sup> ) . . . . .	0,00007	0,0001
Βορικοῦ ἰόντος (H <sub>2</sub> BO <sub>3</sub> <sup>-</sup> ) . . . . .	0,3377	0,3377
Μεταπυριτικοῦ ἰόντος (HSiO <sub>3</sub> <sup>-</sup> ) . . . . .	0,817	0,817
		<hr/> 4,4705

## ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΟΝΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΑΤΑ

Ἡ σύστασις τοῦ ὕδατος ἀντιστοιχεῖ περίπου πρὸς τὴν σύστασιν διαλύματος περιέχοντος ἐν ἐνὶ χιλιόγραμμῳ :

Χλωριοῦχον ἀμμώνιον (NH <sub>4</sub> Cl) . . . . .	0,00830	γρμμ.
Νιτρικὸν κάλιον (KNO <sub>3</sub> ) . . . . .	0,00293	”
Χλωριοῦχον κάλιον (KCl) . . . . .	0,00298	”
Χλωριοῦχον νάτριον (NaCl) . . . . .	0,05156	”
Θειικὸν νάτριον (Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ) . . . . .	0,02441	”
Ὑδροφωσφορικὸν ἀργίλλιον [Al <sub>2</sub> (HPO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> ] . . . . .	0,000009	”
Θειικὸν ἀργίλλιον [Al <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> ] . . . . .	0,00204	”
Ὑδροανθρακικὸν νάτριον (NaHCO <sub>3</sub> ) . . . . .	0,10979	”
Ὑδροθειοῦχον νάτριον (NaHS) . . . . .	0,02357	”

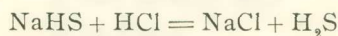
Ἀνθρακικὸν νάτριον ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ) . . . . .	0,03674	γραμμ.
Βορικὸν νάτριον ( $\text{NaH}_2\text{BO}_3$ ). . . . .	0,02825	”
Μεταπυριτικὸν νάτριον ( $\text{NaHSiO}_3$ ) . . . . .	0,00817	”
Ὑδροανθρακικὸν ἀσβέστιον [ $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$ ] . . . . .	0,00995	”
Ὑδροανθρακικὸν μαγνήσιον [ $\text{Mg}(\text{HCO}_3)_2$ ] . . . . .	0,00150	”
Ὑδροανθρακικὸν σίδηρον [ $\text{Fe}(\text{HCO}_3)_2$ ] . . . . .	0,00035	”
Μεταπυριτικὸν ὀξὺ ( $\text{H}_2\text{SiO}_3$ ) . . . . .	0,0799	”
Μεταβορικὸν ὀξὺ ( $\text{HBO}_3$ ) . . . . .	0,0201	”
Ἐξάντλησις ἀπάντων τῶν συστατικῶν	0,4105	γραμμ.

Λόγῳ τοῦ ὑψηλοῦ pH τοῦ ὕδατος τῆς πηγῆς Παλαιοβράχας, ἡ εὔρεσις ὀρι-  
σμένων συστατικῶν του γίνεται δι' ὑπολογισμῶν ἐπὶ τῇ βάσει ἀφ' ἑνὸς γνωστῶν φη-  
σικοχημικῶν σταθερῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀναλυτικῶν δεδομένων.

Οἱ ὑπολογισμοὶ οὗτοι ἀφορῶντες εἰς τὰ ἰόντα  $\text{CO}_3^{''}$ ,  $\text{HCO}_3'$ ,  $\text{HSiO}_3'$ , καὶ  $\text{H}_2\text{BO}_3'$   
ἐγένοντο ὡς ἀκολούθως.

Κατὰ τὸν ἐπιτοπίως γενόμενον προσδιορισμὸν τῶν ὑδροθειούχων ἐνώσεων τοῦ  
ὕδατος εὑρέθη  $\text{HS}' = 0,0139 \text{ } \frac{1}{1000}$ .

Κατὰ τὴν διάσπασιν τῶν ὑδροθειούχων, ὑδροανθρακικῶν καὶ ἀνθρακικῶν ἀλά-  
των ἠναλώθησαν διὰ 150 γραμμ. ὕδατος 3,85 κ. ἐ. N/10 HCl. Ἐκ τούτων διὰ τὴν  
διάσπασιν τῶν εἰς τὰ 150 γραμμ. ὕδατος περιεχομένων ὑδροθειούχων ἠναλώθησαν  
συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν



0,63 κ. ἐ. N/10 HCl. Ἐπομένως διὰ τὴν διάσπασιν τῶν ὑδροανθρακικῶν καὶ ἀνθρα-  
κικῶν ἠναλώθησαν 3,22 κ. ἐ. N/10 HCl, ἀντιστοιχοῦντα εἰς 21,47 κ. ἐ. N/10  
HCl διὰ 1000 γραμμ. ὕδατος.

Δεδομένου ὅτι ἡ σταθερὰ δευτέρας διαστάσεως τοῦ ἀνθρακικοῦ ὀξέος εἶναι  
 $6 \cdot 10^{-11}$  ἴσται:

$$\frac{[\text{H}'] \cdot [\text{CO}_3^{''}]}{[\text{HCO}_3']} = 6 \cdot 10^{-11}$$

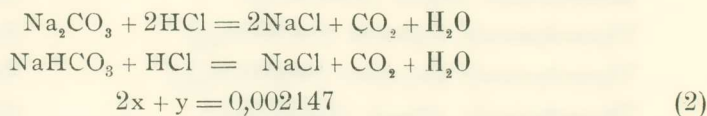
καὶ ὅτι ἡ ἠλεκτρομετρικῶς προσδιορισθεῖσα συγκέντρωσις τῶν ἰόντων ὑδρογόνου τοῦ  
ὑπὸ ἐξέτασιν ὕδατος εἶναι  $[\text{H}'] = 10^{-9,6}$  θὰ ἔχωμεν

$$\frac{10^{-9,6} \cdot [\text{CO}_3^{''}]}{[\text{HCO}_3']} = 6 \cdot 10^{-11}$$

ἐπομένως

$$\frac{[\text{CO}_3^{''}]}{[\text{HCO}_3']} = \frac{6 \cdot 10^{-11}}{10^{-9,6}} = 6 \cdot 10^{-1,4} = 0,2388 \quad (1)$$

θέτοντες ἐξ ἄλλου  $[\text{CO}_3''] = x$  καὶ  $[\text{HCO}_3'] = y$  θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὰ ἀναλυθέντα κ. ἐ. N/10 HCl τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος καὶ τὰς ἐξισώσεις



Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν

$$x = 0,000347 \text{ καὶ } y = 0,001453$$

Συνεπῶς ἔχομεν εἰς τὸ ὕδωρ

$$\text{CO}_3'' = 0,0208 \text{ ‰}$$

καὶ

$$\text{HCO}_3' = 0,0886 \text{ ‰}$$

Προκειμένου περὶ τοῦ πυριτικοῦ ὀξέος, μέρος τούτου εὐρίσκεται ἐν τῷ ὕδατι ὑπὸ μορφήν πυριτικῶν ἰόντων. Ἐκ τῆς σταθεραῆς διαστάσεως τοῦ πυριτικοῦ ὀξέος καὶ τῆς συγκεντρώσεως τῶν ἰόντων ὑδρογόνου τοῦ ὕδατος ἔχομεν

$$\frac{10^{-9,6} \cdot [\text{HSiO}_3']}{[\text{H}_2\text{SiO}_3]} = 2 \cdot 10^{-11}$$

$$\text{ἦτοι} \quad \frac{[\text{HSiO}_3']}{[\text{H}_2\text{SiO}_3]} = \frac{2 \cdot 10^{-11}}{10^{-9,6}} = \frac{2 \cdot 10^{-1,4}}{1} = \frac{0,08}{1}$$

Συνεπῶς ἐπὶ ὀλίγης συγκεντρώσεως  $[\text{H}_2\text{SiO}_3]$  καὶ  $[\text{HSiO}_3'] = 1,08$  εἶναι  $[\text{HSiO}_3'] = 0,08$ , ἐπομένως

$$1,08 : 0,08 = 100 : x$$

$$\text{ἦτοι} \quad x = 7,41 \%$$

Δεδομένου ὅτι τὸ ἀναλυθὲν ὕδωρ περιέχει ὀλίγον  $\text{SiO}_2 = 0,0664 \text{ ‰}$ , ἀντιστοιχοῦν εἰς  $\text{H}_2\text{SiO}_3 = 0,0863 \text{ ‰}$  θὰ ἔχωμεν

$$\text{HSiO}_3' = 0,0863 \times 0,0741 \times \frac{77,06}{78,06} = 0,0063 \text{ ‰}$$

$$\text{καὶ} \quad \text{H}_2\text{SiO}_3 = 0,0863 - 0,0741 \cdot 0,0863 = 0,0799 \text{ ‰}$$

Προκειμένου περὶ τοῦ βορικοῦ ὀξέος, μέρος τούτου εὐρίσκεται εἰς τὸ ὕδωρ ὑπὸ μορφήν βορικῶν ἀλάτων. Τὸ ποσὸν τοῦ ἐν τῷ ὕδατι βορικοῦ ἰόντος ( $\text{H}_2\text{BO}_3'$ ) ὑπελογίσθη ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν χιλιοστοῦσθονάμων τῶν κατιόντων καὶ ἀνιόντων καὶ εὐρέθη  $\text{H}_2\text{BO}_3' = 0,0205 \text{ ‰}$ .

Ἐὰν τὸ βορικὸν ἰὸν ἦθελεν ὑπολογισθῆ ἐκ τοῦ pH τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ συντελεστοῦ διαστάσεως τοῦ βορικοῦ ὀξέος θὰ εὐρίσκετο

$$\frac{10^{-9,6} \cdot [\text{H}_2\text{BO}_3']}{[\text{H}_3\text{BO}_3]} = 6,6 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{ἦτοι} \quad \frac{[\text{H}_2\text{BO}'_3]}{[\text{H}_3\text{BO}_3]} = \frac{6,6 \cdot 10^{-10}}{10^{-9,6}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-0,4}}{1} = \frac{2,62}{1}$$

Συνεπῶς ἐπὶ ὀλικῆς συγκεντρώσεως  $[\text{H}_3\text{BO}_3]$  καὶ  $[\text{H}_2\text{BO}'_3]=3,62$  εἶναι  $[\text{H}_2\text{BO}'_3]=2,62$ , ἐπομένως

$$3,62 : 2,62 = 100 : x$$

$$\text{ἦτοι} \quad x = 72,3 \%$$

Ἐκ τοῦ εἰς τὸ ὕδωρ προσδιορισθέντος ὀλικοῦ βορικοῦ ὀξέος, τὸ ὁποῖον εἶναι  $\text{H}_3\text{BO}_3 = 0,0496 \%$  εὐρίσκομεν συνεπῶς

$$\text{H}_2\text{BO}'_3 = 0,0496 \cdot 0,723 \cdot \frac{60,82}{61,82} = 0,0352 \%$$

Τὰ ἐκ τῶν δύο τούτων μεθόδων ὑπολογισμοῦ προκύπτοντα ποσὰ βορικοῦ ἰόντος δὲν ἀφίστανται πολὺ μεταξύ των.

Ἐὰν μάλιστα ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐπὶ τοῦ κατὰ τὴν πρώτην μέθοδον ὑπολογισμένου βορικοῦ ἰόντος ἐπιπίπτουν τὰ ἐνδεχόμενα σφάλματα προσδιορισμῶν ὕλων τῶν κατιόντων καὶ ἀνιόντων, τὰ εὐρισκόμενα ἀποτελέσματα θέον νὰ θεωρηθῶν λίαν ἱκανοποιητικά.