ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Περὶ ἑνὸς θεωρήματος ὑπάρξεως δρόμου ἀπομακρυνομένου ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον τῶν πλειονοτίμων συναρτήσεων αὐξάνεται ἀπεριορίστως,** *ὑπὸ κ.* ***Θεοδώρου Βαροπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

---

1. Θεωροῦμεν μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν f(x) καὶ m(r) τὸ μέγιστον αὐτῆς μέτρον διὰ $|x|=r$, καὶ C τὴν καμπύλην (courbe maximum) ἐφ' ἧς $|f(x)|=m(r)$. Ὁ OTTO BLUMENTHAL[1] ἐμελέτησε τὰς ἰδιότητας τῆς καμπύλης C καὶ ἔφθασεν εἰς ἐξαγόμενα ἅτινα συνεπληρώθησαν διὰ τῶν ἐρευνῶν τοῦ IVERSEN[2] ἀποδείξαντος ὅτι *ὑπάρχει δρόμος Δ ἀπομακρυνόμενος εἰς τὸ ἄπειρον ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ* $|f(x)|$ *τείνει εἰς τὸ ἄπειρον·* τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ m(r) διὰ μίαν ἀκολουθίαν τιμῶν τοῦ r αἵτινες αὐξάνουν ἀπεριορίστως.

2. Ὁ P. MONTEL ἔθεσε τὸ ζήτημα: *Τί γίνεται τὸ θεώρημα τοῦ* IVERSEN *ὅταν ἡ συνάρτησις f(x) δὲν εἶναι μονότιμος;* Ζητεῖται δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ ἂν τὸ θεώρημα τοῦ IVERSEN ἰσχύει καὶ διὰ τὰς πλειονοτίμους συναρτήσεις.

Προτίθεμαι ν' ἀνακοινώσω προτάσεις σχετικὰς μὲ τὸ θέμα τοῦτο ἐξ ὧν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι καταφατική.

I. Παρατηρῶ πρῶτον ὅτι δύναται εὐκόλως ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἑξῆς πρότασις:

Θεώρημα: *Ἐὰν μία ἀκεραία συνάρτησις f(x) ἔχει μίαν τιμὴν* α *ἐξαιρετικήν, ὑπάρχει δρόμος ἀπομακρυνόμενος εἰς τὸ ἄπειρον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις ἔχει ὅριον τὸ* α.

Δύναμαι νὰ ὑποθέσω πάντοτε ὅτι ἡ α εἶναι ἐξαιρετικὴ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ EM. PICARD.

II. Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν f(x) ἔχουσαν ν κλάδους καὶ δεχομένην K ἐξαιρετικὰς τιμὰς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$ $\quad K \leq 2\nu-1$

ἡ f(x) ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$u^\nu + f_1(x)u^{\nu-1} + f_2(x)u^{\nu-2} + \ldots + f_\nu(x) = 0$$

Διὰ τὰς συναρτήσεις ταύτας ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

Θεώρημα: *Ὑπάρχει δρόμος (Δ) ἀπομακρυνόμενος εἰς τὸ ἄπειρον ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον τῆς f(x) τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.*

---

[1] OTTO BLUMENTHAL: *Veber ganze trausceudante functionen* (Deutsche Math. Ver. t XVI, 1907 p.p. 97-109) voir aussi la note de G. VALIRON: *les progrès de la theorie des fonctions entières depuis 1900* (Leçons snr les fonctions entières par Mr BOREL; deuxième edition, 1921; GAUTIER VILLARS, Paris).

[2] F. IVERSEN: *Recherches snr les fonctions inverses des fonctions meromorphes* (Thèse, Helsingfors, 1914).

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν

$$v = \frac{1}{u - a_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, K$$

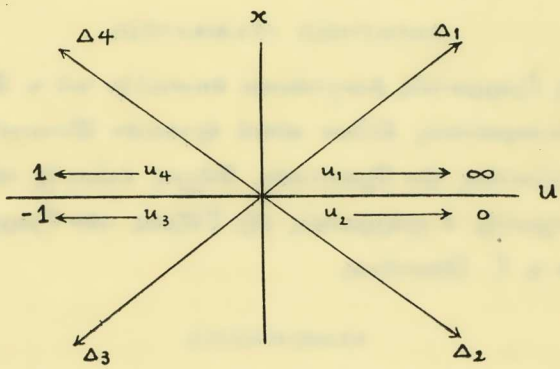
ἀγόμεθα εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Θεώρημα: *Ἐὰν μία πλειονότιμος συνάρτησις* f(x) *δέχηται τιμὰς* K *ἐξαιρετικάς:*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$ ὑπάρχουν K δρόμοι
$(\Delta_1), (\Delta_2), \ldots, (\Delta_K)$

ἀπομακρυνόμενοι ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις f(x) *ἔχει ἀντιστοίχως ὡς ὅριον τὰς τιμὰς* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$

Π.χ. ἡ συνάρτησις ἣν ὁρίζει ἡ $u^2 - 2e^x u - 1 = 0$



δέχεται τὰς τιμὰς $u = 0$, $u = 1$, $u = -1$, $u = \infty$ ὡς ἐξαιρετικάς· ἐὰν θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{2u}{u^2 - 1} = e^{-x}$$

βλέπομεν ὅτι ἐπὶ τῶν δρόμων (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4), τοῦ σχήματος ἡ συνάρτησις ἔχει ἀντιστοίχως ὡς ὅριον τὰς τιμὰς ∞, 0, −1, 1.