

μεγέθη. Ἐξ αὐτῶν ὅμως τὰ δύο πρῶτα ὁδηγοῦν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ποσότητος κινήσεως καὶ τῆς κινητικῆς ροπῆς εἰς παραστάσεις τῆς ἰδίας ἀκριβῶς μορφῆς πρὸς τὰς ἰσχυούσας διὰ τὸ πολοδίπολον. Μόνον δὲ τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ ὁδηγεῖ εἰς σωματίον, τὸ ὁποῖον δὲν παρουσιάζει ὁμοιότητά τινα πρὸς τὸ πολοδίπολον.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La structure intérieure des corpuscules à constitution mono-bipolaire*** par *A. Papapétrou*, présentée par C. Maltézos.

1. Pendant ces dernières années on a étudié un corpuscule, dont la structure intérieure n'est pas caractérisée tout simplement par un pôle de masse, mais comprend en outre des grandeurs bipolaires¹. L'intérêt de l'étude de ce corpuscule consiste en ce que celui-ci fournit une image des propriétés de l'électron magnétique jusqu'à des détails très poussés, de sorte qu'il doit être considéré comme le modèle classique de celui-ci². Dans l'étude générale du corpuscule mono-bipolaire on rencontre deux grandeurs indépendantes, le vecteur à 4 dimensions p_α et le tenseur antisymétrique $n_{\alpha\beta}$, tous deux orthogonaux avec la vitesse u_α du corpuscule :

$$p_\alpha u^\alpha = 0, \quad n_{\alpha\beta} u^\alpha = 0. \quad (1)$$

Une discussion détaillée nous montre³, que le vecteur p_α décrit un couple de masses égales et de signe contraire, $+M$, se trouvant à une distance respective très petite: Le corpuscule avec $p_\alpha = 0, n_{\alpha\beta} = 0$ résulte par superposition d'un pôle de masse et d'un couple $+M$. Pour le tenseur $n_{\alpha\beta}$ il n'a pas encore été donné une représentation détaillée analogue; on a remarqué seulement³, que cette grandeur représente en principe un tourbillon de quantité de mouvement. Le présent travail a pour objet l'étude plus détaillée de la signification physique de la grandeur $n_{\alpha\beta}$.

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ, Ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς δομῆς τῶν πολοδιπολικῶν σωματίων.

¹ M. Mathison, Acta Physica Polonica, 6 (1937), p. 167; J. Lubański, Acta Physica Polonica 6 (1937), p. 356; H. Hönl et A. Papapétrou, ZS. f. Phys. 112 (1939), p. 512; 114, (1939), p. 478; 116 (1940), p. 153. Les trois derniers travaux seront cités dans la suite comme I, II, III.

² Voir particulièrement III.

³ II, chap. 1 et 2.

Nous avons déjà montré¹, que la méthode Lubański, bien qu'elle utilise les équations approchées du champ de gravitation, donne en réalité des solutions — sous forme intégrée — des équations dynamiques de la relativité, restreinte, fournissant en plus les potentiels de gravitation approchés des corpuscules correspondants. Pour connaître par conséquent la structure intérieure du corpuscule nous devons partir des équations de la relativité restreinte, et en déterminer une solution qui, pour une même forme de mouvement, possède la même quantité de mouvement P_α et le même moment de quantité de mouvement $J_{\alpha\beta}$ avec le corpuscule. L'identité complète de ces deux corpuscules sera démontrée finalement par le calcul direct des potentiels de gravitation du corpuscule étudié avec les équations de la relativité restreinte. Ces potentiels doivent être identiques à ceux donnés par les formules de Lubański. Cette méthode, utilisée déjà pour la discussion de la grandeur p_α , nous conduira cette fois aussi à la solution du problème posé.

2. Nous allons considérer un corpuscule en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, que nous allons choisir pour axe des z . Il s'agit par conséquent d'un mouvement plan, où toutes les composantes $T_{3\alpha} = T_{\alpha 3}$ du tenseur de matière s'annulent, de sorte que les équations fondamentales de la relativité restreinte

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

se réduisent aux trois suivantes :

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = \frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0. \quad (2')$$

Pour rendre plus expressives ces équations nous introduisons à la place des $T_{\alpha\beta}$ les tensions $p_{xx}, p_{xy} = p_{yx}, p_{yy}$, ainsi que la densité de quantité de mouvement g_x, g_y et d'énergie w :

$$T_{11} = -p_{xx}, \quad T_{12} = -p_{xy}, \quad T_{22} = -p_{yy}; \quad T_{14} = icg_x, \quad T_{24} = icg_y, \quad T_{44} = w. \\ (x_1 = ix, \quad x_2 = iy, \quad x_4 = ct)$$

Les équations (2') deviennent alors :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{c^2 \partial t} = 0. \quad (2_{\alpha, \beta, \gamma})$$

¹ II, chap. 2, § 1.

Considérons maintenant un champ radial de quantité de mouvement, c'est à dire tel que le «vecteur» (g_x, g_y) possède en chaque point la direction de la normale menée par ce point à l'axe de rotation. Supposons en plus sa valeur absolue inversement proportionnelle au rayon polaire r ; c'est à dire, en introduisant les directions \vec{n}_r et \vec{n}_t de la fig. 1:

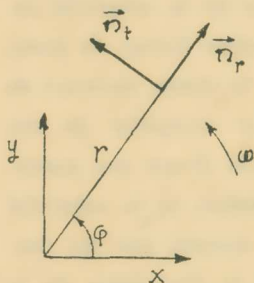


Fig. 1.

$$g_r = \frac{1}{r} f(\varphi - \omega t), \quad g_t = 0. \quad (3)$$

Nous voulons déterminer les grandeurs P_{xx} , P_{xy} , P_{yy} , et w du champ de telle sorte, que les équations fondamentales (2) soient satisfaites. La relation (2 γ) nous conduit de suite à la détermination de la grandeur w . En nous servant des formules de transformation

$$A_x = A_r \cos \varphi - A_t \sin \varphi, \quad A_y = A_r \sin \varphi + A_t \cos \varphi, \quad (4\alpha)$$

ainsi que des identités

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (4\beta)$$

nous tirons de (2 γ) par un calcul élémentaire:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

et comme en général

$$w = w(r, \varphi - \omega t),$$

nous tirons

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0.$$

Et puisque nous nous occupons du cas où le champ est limité dans un petit intervalle $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, et s'annule en dehors de celui-ci, nous concluons:

$$w = 0.$$

Les équations (2 α), (2 β) forment un système pour la détermination des tensions. Nous introduisons les tensions rapportées au système des coordonnées (\vec{n}_r, \vec{n}_t) :

$$P_{rr} = P_{rr}(r, \varphi - \omega t), \quad P_{rt} = P_{rt}(r, \varphi - \omega t), \quad P_{tt} = P_{tt}(r, \varphi - \omega t).$$

Les formules de transformation sont, voir (4 α):

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_{rr} \cos^2 \varphi - 2p_{rt} \cos \varphi \sin \varphi + p_{tt} \sin^2 \varphi, \\ p_{xy} &= (p_{rr} - p_{tt}) \cos \varphi \sin \varphi + p_{rt} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ p_{yy} &= p_{rr} \sin^2 \varphi + 2p_{rt} \cos \varphi \sin \varphi + p_{tt} \cos^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4\gamma)$$

Nous trouvons par un calcul simple à la place des (2α), (2β):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(p_{rr} \cos \varphi - 2p_{rt} \sin \varphi - p_{tt} \cos \varphi + \frac{\partial p_{rt}}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial p_{tt}}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) + \\ \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial p_{rt}}{\partial r} \sin \varphi = - \frac{\partial g_x}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left(p_{rr} \sin \varphi + 2p_{rt} \cos \varphi - p_{tt} \sin \varphi + \frac{\partial p_{rt}}{\partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial p_{tt}}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) + \\ \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial p_{rt}}{\partial r} \cos \varphi = - \frac{\partial g_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dans le cas qui nous occupe on a, voir (3) et (4α):

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} = - \frac{\omega}{r} \frac{df}{d\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial g_y}{\partial t} = - \frac{\omega}{r} \frac{df}{d\varphi} \sin \varphi. \quad (7)$$

Nous utiliserons dans la suite une solution très simple des équations (6) et (7):

$$p_{rt} = \omega f, \quad p_{rr} = p_{tt} = - \int_{\varphi_1}^{\varphi} 2p_{rt} d\varphi = - 2\omega \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi. \quad (8)$$

Il est à remarquer que les dérivées $\frac{\partial p_{rr}}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial p_{tt}}{\partial r}$ se trouvent éliminées dans le système (6). Cela signifie évidemment que des discontinuités peuvent exister pour la tension P_{rr} sur le rayon polaire $\varphi = \text{const}$, comme aussi pour la tension P_{tt} le long d'une circonférence $r = \text{const}$. La dernière partie de cette remarque nous sera utile dans la suite.

3. Nous cherchons maintenant à déterminer les limites du champ potentiel ci-dessus. Nous posons à cet effet à la place de la première des équations (3):

$$g_r = \frac{r_0 + s_0 - r}{rs_0} f(\varphi - \omega t), \quad (9\alpha)$$

de sorte que le champ s'annule graduellement dans la région $r_0 < r < r_0 + s_0$. La seconde équation du système (3) ne peut rester invariable, car alors les conditions de continuité nécessaires ne sont plus remplies sur le cercle $r = r_0$. Pour satisfaire à ces conditions, il faut, ainsi qu'il sera montré dans la suite,

admettre une répartition de masse ϱ_0 dans l'intervalle $r_0 < r < r_0 + s_0$ (ϱ_0 densité de masse dans le système de coordonnées par rapport auquel le corpuscule est au repos), de sorte que, à la place de la seconde équation (3), nous devons poser :

$$g_t = \varrho_0 \omega r u_0^2, \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega r}{\beta}\right)^2}}. \quad (9\beta)$$

On tire des (9α), (9β), en utilisant (2γ), d'abord la grandeur w . Il vient par des calculs simples, en utilisant (4α), (4β) :

$$-\frac{\partial w}{c^2 \partial t} = + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \omega u_0^2 \frac{\partial \varrho_0}{\partial \varphi} - \frac{f}{rs_0}. \quad (10\alpha)$$

Et après intégration :

$$w = \varrho_0 c^2 u_0^2 - \frac{c^2}{\omega r s_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi. \quad (10)$$

Les tensions p_{rr} , p_{rt} , p_{tt} seront déterminées à l'aide des équations (6), en remarquant que à la place des (7) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial t} &= -\omega \frac{df}{d\varphi} \frac{r_0 + s_0 - r}{rs_0} \cos\varphi + \omega^2 r u_0^2 \frac{\partial \varrho_0}{\partial \varphi} \sin\varphi, \\ \frac{\partial g_y}{\partial t} &= -\omega \frac{df}{d\varphi} \frac{r_0 + s_0 - r}{rs_0} \sin\varphi - \omega^2 r u_0^2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant ces valeurs de $\frac{\partial g_x}{\partial t}$ et $\frac{\partial g_y}{\partial t}$ nous tirons de (6), où nous égalons séparément les termes en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, les deux équations :

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} - p_{tt} + \frac{\partial p_{rt}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} &= \omega \frac{df}{d\varphi} \frac{r_0 + s_0 - r}{s_0}, \\ 2p_{rt} + \frac{\partial p_{tt}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial p_{rt}}{\partial r} &= \omega^2 r^2 u_0^2 \frac{\partial \varrho_0}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Par analogie avec la première des (8) nous admettons pour p_{rt} la forme :

$$p_{rt} = \omega f \cdot \frac{r_0 + s_0 - r}{s_0}; \quad (12)$$

la seconde des (11) donne alors :

$$p_{tt} = \varrho_0 \omega^2 r^2 u_0^2 + \omega \frac{3r - 2r_0 - 2s_0}{s_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi; \quad (13)$$

et en portant dans la première:

$$p_{rr} = \frac{\omega^2 u_o^2}{r} \int r^2 \rho_o dr + \frac{\omega}{s_o} \left(\frac{3}{2} r - 2r_o - 2s_o \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi . \quad (14)$$

Cette dernière relation, combinée avec la remarque que la tension p_{rr} doit être continue sur la circonférence $r = r_o$, conduit à la détermination de la densité ρ_o . Nous trouvons en effet en comparant la seconde des (8) avec (14):

$$\rho_o \omega^2 r^2 u_o^2 = \frac{\omega r}{s_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi . \quad (15)$$

Portons cette valeur de ρ_o dans les équations (10), (12) et (14); celles-ci deviennent:

$$w = 0 , \quad p_{tt} = \omega \frac{4r - 2r_o - 2s_o}{s_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi , \quad p_{rr} = 2\omega \frac{r - r_o - s_o}{s_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi . \quad (16)$$

La dernière des relations (16) nous montre que la tension p_{rr} s'annule sur la circonférence $r = r_o + s_o$, de même que les grandeurs g_r et p_{tt} , voir (9a) et (12): Nous pouvons donc admettre, sans mettre en défaut les conditions de continuité, que le champ s'annule en dehors du cercle $r = r_o + s_o$. (La discontinuité de p_{tt} sur les circonférences $r = r_o$ et $r = r_o + s_o$ est permise, ainsi que nous l'avons vu précédemment, la même remarque étant évidemment valable pour la grandeur g_t ou ρ_o : voir équation (10a), où entre la dérivée $\frac{\partial \rho_o}{\partial \varphi}$, mais non celle $\frac{\partial \rho_o}{\partial r}$). Nous remarquons en plus que les formules précédentes définissent la délimitation extérieure du champ (c'est à dire vers les r croissants), puisque nous avons admis $s_o > 0$. Pour délimiter le champ intérieurement il faut remplacer dans ces formules s_o par $-s_o$:

$$g_r = \frac{r_o - s_o - r}{-r s_o} \cdot f , \quad (9'a)$$

$$p_{tt} = \omega \frac{r_o - s_o - r}{-s_o} f , \quad (12')$$

$$\rho_o \omega^2 r^2 u_o^2 = \frac{\omega r}{-s_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi , \quad (15')$$

$$\left. \begin{aligned} p_{tt} &= \omega \frac{4r - 2r_0 - 2s_0}{-s_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi, \\ p_{rr} &= 2\omega \frac{r - r_0 - s_0}{-s_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi} f d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

4. Les résultats acquis jusqu'ici permettent de donner de suite la description de la structure intérieure d'un corpuscule mono-bipolaire, pour lequel nous aurons à déterminer ensuite le corpuscule correspondant de la méthode Lubanski. Dans les formules précédentes s'introduit la fonction f , qui détermine la loi de variation de la quantité g_r en fonction de l'angle φ ; nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse sur la forme de cette fonction f . Nous nous laissons conduire par l'image du tourbillon de quantité de mouvement et nous introduisons la fonction f ci-après (fig. 2):

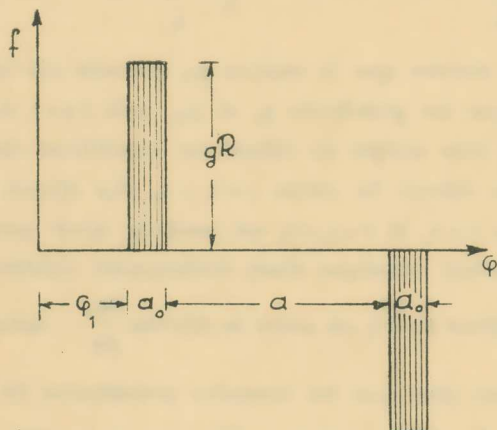


Fig. 2.

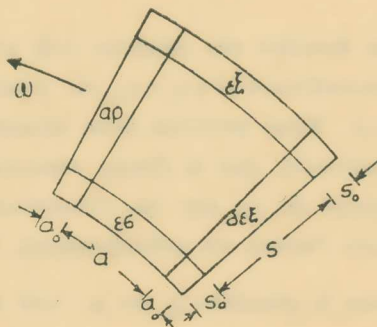


Fig. 3.

$$\left. \begin{aligned} f &= gR \quad \text{pour} \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_1 + \alpha_0, \\ f &= -gR \quad \text{»} \quad \varphi_1 + \alpha_0 + \alpha < \varphi < \varphi_1 + 2\alpha_0 + \alpha, \\ f &= 0 \quad \text{»} \quad \text{les autres valeurs de } \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ici g est une constante avec les dimensions d'une densité de quantité de mouvement et R le rayon de la trajectoire moyenne du corpuscule. D'après cela le corpuscule est délimité latéralement par les secteurs $\varphi_1 < \varphi < \varphi_1 + \alpha_0$ et $\varphi_1 + \alpha_0 + \alpha < \varphi < \varphi_1 + 2\alpha_0 + \alpha$, que nous désignerons dans la suite avec $\delta\epsilon\xi$ et $\alpha\varphi$ (voir fig. 3). Dans le sens du rayon nous admettrons que le corpuscule est

délimité extérieurement par la région $R + \frac{s}{2} < r < R + \frac{s}{2} + s_0$, $\varepsilon\xi$, et intérieurement par la région $R - \frac{s}{2} - s_0 < r < R - \frac{s}{2}$, $\varepsilon\sigma$. Il faut également admettre, puisque nous devons en dernier lieu arriver à un corpuscule «ponctuel», que les dimensions linéaires du système sont très petites par rapport au rayon de la trajectoire;

$$\frac{s}{R} \ll 1, \quad \alpha \ll 1. \quad (18)$$

Enfin nous admettons, pour simplifier les calculs, que la largeur des régions de délimitation est très petite par rapport aux dimensions du corpuscule:

$$\frac{s_0}{s} \ll 1, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha} \ll 1. \quad (18a)$$

La structure intérieure du corpuscule est déjà décrite précisément par les formules (3), (5), (8) etc, où l'on doit introduire la forme (17) de la fonction f . Il convient pourtant d'utiliser à la place des densités g_r , g_t , w etc. leurs intégrales étendues au volume des régions de délimitation:

$$G_r^{\delta\varepsilon\xi} = \int_{\delta\varepsilon\xi} g_r dv, \quad G_t^{\delta\varepsilon\xi} = \int_{\delta\varepsilon\xi} g_t dv, \quad \text{etc}, \quad (19)$$

car en partant de celles-ci nous pourrions calculer de suite la quantité de mouvement total P_α , ainsi que le moment de la quantité de mouvement $J_{\alpha\beta}$ du corpuscule. Soit $\delta \ll R$ l'épaisseur du système dans le sens de l'axe de rotation Oz (c'est à dire normalement au plan xy); posons encore:

$$g R \alpha_0 s \delta \cdot \alpha = G. \quad (20)$$

Le calcul des grandeurs G_r , G_t etc est élémentaire et conduit au tableau ci-après:

| | G_r | G_t | W | P_{rr} | P_{rt} | P_{tt} |
|--------------------------|---------------------|---|-----|---------------|------------------------------|---|
| $\delta\varepsilon\xi$: | $+\frac{G}{\alpha}$ | — | — | — | $+\frac{G}{\alpha} \omega R$ | — |
| $\alpha\sigma$: | $-\frac{G}{\alpha}$ | — | — | $-\omega R G$ | $+\frac{G}{\alpha} \omega R$ | $-2\omega R G$ |
| $\varepsilon\xi$: | — | $+\frac{G}{s} \left(R + \frac{s}{2}\right)$ | — | — | — | $+\frac{2G}{s} \omega \left(R + \frac{s}{2}\right)^2$ |
| $\varepsilon\sigma$: | — | $-\frac{G}{s} \left(R - \frac{s}{2}\right)$ | — | — | — | $-\frac{2G}{s} \omega \left(R - \frac{s}{2}\right)^2$ |

(21)

Dans ce tableau nous distinguons d'une part les grandeurs bipolaires, c'est à dire des couples des valeurs égales et de signe contraire avec au dénominateur a ou s , d'autre part les grandeurs monopolaires simples dans les quelles n'entrent ni a ni s . Les grandeurs qui contiennent comme facteurs a , s , $\frac{s_0}{s}$ ou $\frac{\alpha_0}{\alpha}$ ont été omises à cause des (18), (18 α). Les valeurs P_{rr} et P_{tt} inscrites entre les lignes $\delta\epsilon\xi$ et $\alpha\varrho$ proviennent par intégration dans le volume entier du corpuscule et non seulement sur les régions de délimitation: Dans les deux dernières formules (8) s'introduit la quantité $\int_{\varphi_1}^{\varphi} fd\varphi$, qui ne s'annule pas dans l'intérieur du corpuscule, mais prend la valeur constante $gR\alpha_0$.

5. Dans le tableau (21) les éléments de la première ligne correspondent aux directions \vec{n}_r, \vec{n}_t d'un point quelconque de la région $\delta\epsilon\xi$, tandis que la deuxième ligne correspond aux directions de la région $\alpha\varrho$, qui forment un angle α_0 avec les précédentes. Au contraire les deux dernières lignes du tableau (21) correspondent aux directions des milieux des régions $\epsilon\xi$ et $\epsilon\sigma$, qui ne sont autres que les directions \vec{n}_r^0 et \vec{n}_t^0 du «centre» du corpuscule. Il convient de transformer les deux premières lignes de ce tableau et les rapporter aux directions \vec{n}_r^0 et \vec{n}_t^0 , car alors nous pourrions obtenir la quantité de mouvement totale par simple addition algébrique. La transformation s'obtient directement en utilisant les formules (4 α) pour les grandeurs G_r et G_t , et celles (4 γ) pour les grandeurs P_{rr} , P_{rt} , P_{tt} , et conduit au nouveau tableau ci-après:

| | G_r^0 | G_t^0 | W | P_{rr}^0 | P_{rt}^0 | P_{tt}^0 | |
|-----------------------|---------------------|-------------------------------|-----|-------------------------------|-----------------------------|---|----------|
| $\delta\epsilon\xi$: | $+\frac{G}{\alpha}$ | $+\frac{G}{2}$ | — | $+\omega RG$ $-2\omega RG$ | $+\frac{\omega RG}{\alpha}$ | $-\omega RG$ $-2\omega RG$ | } (21 α) |
| $\alpha\varrho$: | $-\frac{G}{\alpha}$ | $-\frac{G}{2}$ | — | $+\omega RG$ | $\frac{\omega RG}{\alpha}$ | $-\omega RG$ | |
| $\epsilon\xi$: | — | $+\frac{RG}{s} + \frac{G}{2}$ | — | — | — | $+\frac{2\omega R^2 G}{s} + 2\omega RG$ | |
| $\epsilon\sigma$: | — | $-\frac{RG}{s} + \frac{G}{2}$ | — | — | — | $-\frac{2\omega R^2 G}{s} + 2\omega RG$ | |

Il est à remarquer dans ce tableau que les grandeurs monopolaires (qui, au point de vue de l'action gravitationnelle, que le corpuscule exerce sur des points éloignés, n'ont pas besoin d'être rapportées à une région détermi-

née du corpuscule, et peuvent au contraire être considérées réparties sur le volume entier de celui-ci) se détruisent mutuellement, de sorte qu'il ne reste finalement qu'un couple de valeurs bipolaire des grandeurs G_r^0 , G_t^0 , P_{rt}^0 et P_{tt}^0 .

Les deux premières colonnes du tableau (21 α) montrent de suite que la quantité de mouvement totale du corpuscule est égale à zéro :

$$\vec{P} = 0, \quad (22\alpha)$$

comme il fallait s'y attendre, puisqu'il s'agit de corpuscule en repos macroscopique. La troisième colonne nous montre que la masse du corpuscule est nulle :

$$\mu = \frac{E}{c^2} = 0. \quad (22\beta)$$

Il résulte enfin pour le moment de la quantité de mouvement du corpuscule la valeur :

$$J = J_z = \frac{G}{\alpha} \cdot \alpha R + \frac{RG}{s} \cdot s = 2RG. \quad (22\gamma)$$

6. Les relations (22 β) et (22 γ) nous permettent de répondre de suite à la question : à quel corpuscule de la théorie de Lubański correspond le système défini par le tableau (21 α). En effet nous aurons en général une superposition d'un vecteur p_α et d'un tenseur $n_{\alpha\beta}$; plus particulièrement—puisque le moment de la quantité de mouvement est normal au plan de la trajectoire—le vecteur p_α sera de la forme donnée dans I, chap. 2, § 1, et le tenseur $n_{\alpha\beta}$ sera conforme à II, chap. 3, § 2. Les relations II, (55) et (56) :

$$\mu = \frac{pu_0}{R} + \frac{2n_{12}\beta}{R}, \quad J = J_z = -\mu v R - \frac{2cn_{12}}{u_0^2} \quad (23)$$

restent par conséquent valables. En comparant ces relations avec (22 β), (22 γ) nous trouvons que le système (21) correspond aux valeurs :

$$n_{12} = -\frac{u_0^2 RG}{c}, \quad p = -\frac{2\beta n_{12}}{u_0} = \frac{2u_0 \omega R^2 G}{c^2}. \quad (24)$$

Pour démontrer définitivement l'équivalence du système (21 α) et du corpuscule (24) il faudrait encore calculer les potentiels de gravitation du système (21 α), qui devraient coïncider avec ceux du corpuscule (24). Mais nous devons faire remarquer ici que la coïncidence de ces deux potentiels ne constitue pas une condition indépendante nouvelle. Il suffit en effet de remarquer que, ainsi qu'on peut démontrer en partant des formules I (40),

I (38), I (43) et II (53), les potentiels de gravitation d'un corpuscule mono-bipolaire peuvent être exprimés en fonction des grandeurs u_α , P_α et $S_{\alpha\beta}$:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{u_\alpha P_\beta + P_\alpha u_\beta}{n} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{S_{\lambda\alpha} u_\beta + S_{\lambda\beta} u_\alpha}{n} \right), \quad (25)$$

où $S_{\alpha\beta}$ désigne le moment de la quantité de mouvement interne, qui pour un corpuscule au repos macroscopique, coïncide avec le moment total. Il en résulte que le système (21 α), se déplaçant sur la même trajectoire que le corpuscule (24), et possédant les mêmes valeurs de $P_{\alpha\beta}$ et $J_{\alpha\beta}$, admettra aussi nécessairement les mêmes potentiels de gravitation. Le calcul direct de ces potentiels au moyen des éléments du tableau (21 α) et leur comparaison aux potentiels du corpuscule (24) constitue une simple vérification, surtout des trois dernières colonnes du tableau (21 α). Pour être bref nous ne donnerons pas ici cette vérification.

7. Revenant aux formules (9 β), (15) et (15'), nous remarquons que le corpuscule (21) contient dans les régions $\varepsilon\xi$ et $\varepsilon\sigma$ deux masses égales et de signe contraire :

$$M_{\varepsilon\xi}^{\varepsilon\xi} = \int \rho_0 dv_0 = \int \rho_0 u_0 dv_0 = \pm \frac{G}{\omega u_0 s},$$

qui constituent un couple $\pm M$, de moment

$$p_0 = M_{\varepsilon\sigma} s = - \frac{G}{\omega u_0} = \frac{n_{12}}{\beta u_0^3}. \quad (26)$$

Ce moment est différent de celui p de la formule (24). Par conséquent le corpuscule défini par la méthode Lubański avec seulement $n_{\alpha\beta} \neq 0$ et $p_\alpha = 0$, qui résultera de (21) par superposition du moment bipolaire $-p$, contiendra en réalité un moment bipolaire $p_0 - p \neq 0$, et ne se réduira pas à un simple tourbillon de quantité de mouvement. Nous désignerons dans la suite par *tourbillon de quantité de mouvement* le corpuscule auquel sera réduit (21), si nous enlevons de celui-ci le moment bipolaire p_0 qu'il contient, et qui est par conséquent défini dans la méthode Lubański par superposition des grandeurs :

$$n_{12} = - \frac{u_0^2 R G}{c}, \quad P_{\text{total}} = P - P_0 = - \frac{n_{12}}{\beta u_0} \left(1 + \beta^2 \right). \quad (27)$$

Or la deuxième de ces équations est équivalente aux II, (57) et (57'), qui constituent la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de la quantité de mouvement du corpuscule soit donné par la formule :

$$J = J_z = + \mu \nu R. \quad (28)$$

Nous sommes ainsi arrivés au résultat remarquable ci-après: Il existe deux corpuscules distincts à structure mono-bipolaire, le *mono-bipolaire*, défini par $p_\alpha \neq 0$ et $n_{\alpha\beta} = 0$, et le tourbillon de quantité de mouvement. Ces corpuscules diffèrent entre eux au point de vue macroscopique en ce que le signe du moment de la quantité de mouvement est - pour le premier et + pour le second.

La structure intérieure du corpuscule mono-bipolaire résulte des développements de II, chap. I, tandis que celle du corpuscule tourbillon résultera par superposition du tableau (21) et d'un mono-bipolaire avec moment bipolaire $-p_0$. Les résultats définitifs conduisent au tableau ci-après:

| | G_r^0 | G_t^0 | W | P_{rr}^0 | P_{rt}^0 | P_{tt}^0 |
|------------------------|---------|----------------------------------|--|------------|--------------------------------|------------|
| <i>Monobipolaire :</i> | | | | | | |
| $\varepsilon \xi$: | — | $-\mu\omega R \cdot \frac{R}{s}$ | $-\mu c^2 \frac{R}{s}$ | — | $+\mu\omega^2 R^2 \frac{R}{s}$ | } (29) |
| $\varepsilon \sigma$: | — | $+\mu\omega R \cdot \frac{R}{s}$ | $+\mu c^2 \frac{R}{s} + \mu\omega^2 R^2$ | — | $-\mu\omega^2 R^2 \frac{R}{s}$ | |

Tourbillon de quantité de mouvement :

| | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------|---|--|---|-------------------------------------|--------|
| $\delta \varepsilon \xi$: | $+\mu\omega R \frac{1}{\alpha}$ | — | — | — | $+\mu\omega^2 R^2 \frac{1}{\alpha}$ | } (30) |
| $\alpha \varrho$: | $-\mu\omega R \frac{1}{\alpha}$ | — | — | — | $-\mu\omega^2 R^2 \frac{1}{\alpha}$ | |
| $\varepsilon \xi$: | — | — | $-\mu c^2 \frac{R}{s}$ | — | $+\mu\omega^2 R^2 \frac{R}{s}$ | |
| $\varepsilon \sigma$: | — | — | $+\mu c^2 \frac{R}{s} + \mu\omega^2 R^2$ | — | $-\mu\omega^2 R^2 \frac{R}{s}$ | |

Il est évident que la structure (30) conduit au moment de quantité de mouvement (28), tandis que (29) donne le second membre de (28) changé de signe.

Le fait que la théorie classique des corpuscules mono-bipolaires conduit à deux corpuscules différents est digne d'un intérêt particulier. Ce résultat correspond probablement au fait expérimental que dans la nature il existe deux sortes de corpuscules élémentaires avec moment de quantité de mouvement interne, c'est à dire les corpuscules avec charge électrique positive et ceux à charge électrique négative. Cette remarque constitue un argument

d'une nature générale en faveur de l'opinion que l'électrodynamique doit résulter comme un chapitre spécial de la théorie quantique de la gravitation, plus exactement comme le chapitre traitant le champ de gravitation des corpuscules mono - bipolaires.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς δομῆς τῶν πολοδιπολικῶν σωματίων.

Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἐμελετήθη ἐν σωματίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ δομὴ δὲν χαρακτηρίζεται ἀπλῶς διὰ πόλου μάζης, ἀλλὰ περιλαμβάνει καὶ διπορικὰ μεγέθη. Τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ σωματίου αὐτοῦ ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τοῦτο ἀποδίδει τὰς ιδιότητας τοῦ μαγνητικοῦ ἡλεκτρονίου μὲ τόσας λεπτομερείας, ὥστε νὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κλασσικὸν αὐτοῦ πρότυπον. Εἰς τὴν γενικὴν μελέτην τοῦ σωματίου αὐτοῦ ἐμφανίζονται δύο ἀνεξάρτητα ἀλλήλων μεγέθη: Ἐν (4-διάστατον) διάνυσμα P_α , ἡ σημασία τοῦ ὁποίου περιεγράφη ἤδη εἰς προηγουμένην ἐργασίαν τοῦ ἀνακοινούντος καὶ εἰς ἀντισυμμετρικὸς τανυστὴς $\pi_{\alpha\beta}$. Ἡ διερεύνησις τῆς σημασίας τοῦ μεγέθους $\pi_{\alpha\beta}$ ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς παρούσης ἐργασίας, τὰ δὲ τελικὰ ἀποτελέσματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

Ὑπάρχουν δύο διάφορα ἀλλήλων σωματῖα μὲ πολοδιπολικὴν ὕφην, ὁ πόλος-δίπολον καὶ ὁ στρόβιλος ποσότητος κινήσεως. Μακροσκοπικῶς τὰ δύο αὐτὰ σωματῖα διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον τῆς κινητικῆς ροπῆς: Διὰ τὴν αὐτὴν συνολικὴν ἐνέργειαν mc^2 καὶ κίνησιν ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς ἀκτίνος R μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα v καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, τὸ μὲν πρῶτον ἔχει κινητικὴν ροπήν $-\mu v R$, τὸ δὲ δεύτερον $+\mu v R$.

Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι ἡ κλασσικὴ θεωρία τῶν πολοδιπολικῶν σωματίων ὀδηγεῖ εἰς δύο τύπους σωματίων. Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ ἀνταποκρίνεται πιθανῶς εἰς τὸ πειραματικὸν γεγονός ὅτι ὑπάρχουν εἰς τὴν φύσιν δύο εἶδη στοιχειωδῶν σωματίων μὲ ἐσωτερικὴν κινητικὴν ῥοπήν, ἥτοι τὰ σωματῖα μὲ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν ἡλεκτρικὸν φορτίον. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ ἀποτελεῖ ἐν γενικὸν ἐπιχείρημα ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως, καθ' ἣν ἡ ἡλεκτροδυναμικὴ θὰ πρέπει νὰ προκύψῃ ὡς ἰδιαίτερον κεφάλαιον τῆς κβαντικῆς θεωρίας τῆς βαρύτητος, ἀκριβέστερον ὡς τὸ κεφάλαιον τὸ πραγματευόμενον τὰς δράσεις βαρύτητος μεταξὺ πολοδιπολικῶν σωματίων.

Ν. Βέη: Τὰ πραγματικὰ ὀνόματα, ἡ Πατρὶς καὶ ἄλλα προσωπικὰ καὶ συγγραφικὰ τοῦ Χριστοφόρου Περραιβοῦ*.

* Ὡς δημοσιευθῇ προσεχῶς.