ΦΥΣΙΚΗ.— **Μία μὴ γραμμικὴ ὁλοκληροδιαφορικὴ ἐξίσωσις διὰ τὴν συνάρτησιν συσχετίσεως μεταξὺ ἑνὸς ἐπιπροσθέτου σωματίου καὶ ἑνὸς νουκλεονίου τῆς πυρηνικῆς ὕλης** *, *ὑπὸ Μιχαὴλ Ἐλ. Γρυπαίου* **. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φ. Βασιλείου.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θεωροῦμεν τὸ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τῆς συναρτήσεως συσχετίσεως (correlation function) μεταξὺ ἑνὸς ἐπιπροσθέτου σωματίου (ἐπὶ παραδείγματι ἑνὸς ὑπερονίου Λ) καὶ ἑνὸς νουκλεονίου τῆς ὁμοιομόρφου πυρηνικῆς ὕλης, ἡ πυκνότης ϱ τῆς ὁποίας εἶναι ὡς γνωστὸν τὸ ὅριον τοῦ λόγου τοῦ πλήθους N τῶν νουκλεονίων διὰ τοῦ ὄγκου V, τὸν ὁποῖον ταῦτα καταλαμβάνουν, ὅταν τὰ N καὶ V τείνουν εἰς τὸ ἄπειρον:

$$\varrho = \lim_{\substack{N \to \infty \\ V \to \infty}} \frac{N}{V} \tag{1}$$

Ἡ προαναφερθεῖσα συνάρτησις συσχετίσεως $f(r_{\Lambda i})$ εἰσέρχεται εἰς τὴν δοκιμαστικὴν κυματοσυνάρτησιν θεμελιώδους καταστάσεως πολλῶν σωμάτων $\Psi^{tr.}_{N+\Lambda}$ [1]

$$\Psi^{tr.}_{N+\Lambda} = \Psi_N \prod_{i=1}^{N} f(r_{\Lambda i}) \tag{2}$$

ἔνθα Ψ_N εἶναι ἡ κυματοσυνάρτησις θεμελιώδους καταστάσεως τῆς πυρηνικῆς ὕλης.

Ἡ ἀκριβὴς γνῶσις τῆς συναρτήσεως συσχετίσεως εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς (δοκιμαστικῆς) ἐνεργείας διαχωρισμοῦ $B^{tr.}_{\Lambda} \simeq E^{tr.}_{\Lambda}$ τοῦ ἐπιπροσθέτου σωματίου ἐκ τῆς πυρηνικῆς ὕλης. Τὸ σωμάτιον τοῦτο θὰ συμβολίζωμεν εἰς τὸ ἑξῆς διὰ τοῦ Λ.

Ἡ προαναφερθεῖσα ἐνέργεια διαχωρισμοῦ ἀποτελεῖ λίαν ἐνδιαφέρον μέγεθος ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως, ἡ τιμὴ δὲ αὐτοῦ, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σωματίου Λ, εἶναι γνωστὴ πειραματικῶς (περὶ τὰ 30 MeV).

---

* M. E. GRYPEOS, **A non-linear integrodifferential equation for the correlation function between an impurity particle and a nucleon in nuclear Matter.**

** Διεθνὲς Κέντρον Θεωρητικῆς Φυσικῆς Τεργέστης καὶ Κέντρον Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ», Ἁγία Παρασκευὴ Ἀττικῆς.

1. B. W. Downs and M. E. Grypeos, Nuovo Cimento, 44 (1966) 306.

Ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου ὑποδεικνύομεν τὸν καθορισμὸν τῆς συναρτήσεως f, εἶναι ἡ κατάλληλος ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῶν μεταβολῶν (variational principle). Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο δέον νὰ τονισθῇ ὅτι εἶναι ἀπαραίτητος ἡ μετὰ ἰδιαιτέρας προσοχῆς ἐφαρμογὴ τῆς τοιαύτης ἀρχῆς, διότι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις Euler δυνατὸν νὰ μὴ κέκτηται λύσεως, ἥτις νὰ εἶναι δεκτὴ ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως, καὶ συγκεκριμένως νὰ μὴν ἔχῃ τὴν ἐπιθυμητὴν συμπεριφορὰν διὰ μεγάλας σχετικὰς ἀποστάσεις $r_{\Lambda 1}$ μεταξὺ σωματίου Λ καὶ νουκλεονίου.

Τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῆς ἐνταῦθα προτεινομένης μεθόδου εἶναι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς ἑτέρας μεθόδους[1], τὰ ἑξῆς :

1) Ὁ ὁλοκληρωτικὸς περιορισμός (integral constraint) δὲν εἰσάγεται αὐθαιρέτως, ἀλλὰ κατὰ φυσικὸν τρόπον. Οὗτος εἰσάγεται ὑπὸ μορφὴν συνθήκης κανονικοποιήσεως (normalization condition).

2) Κατὰ τὴν συναρτησιακὴν μεταβολὴν τῆς χρησιμοποιουμένης ἐκφράσεως $E_{\Lambda}^{tr.}(f)$, λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν ἡ «ἔμμεσος ἐξάρτησις» αὐτῆς (implicit dependence) ἐκ τῆς συναρτήσεως συσχετίσεως.

Ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς ἀκολούθου προσεγγιστικῆς ἐκφράσεως διὰ τὴν $E_{\Lambda}^{tr.}$ [2, 3] :

$$\overline{E}_{\Lambda}^{tr.} = \frac{4\pi\varrho \int_0^{\infty} dr_{\Lambda 1}\, r_{\Lambda 1}^2 \,[\, f(r_{\Lambda 1})\, W(r_{\Lambda 1})\, f(r_{\Lambda 1})\,]\, e^{X(r_{\Lambda 1})}}{1 + \frac{4\pi\varrho}{N} \int_0^{\infty} dr_{\Lambda 1}\, r_{\Lambda 1}^2 \left(f^2(r_{\Lambda 1})\, e^{X(r_{\Lambda 1})} - 1\right)} \tag{3}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἀρχὴν τῶν μεταβολῶν, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν

$$4\pi\varrho \int_0^{\infty} dr_{\Lambda 1}\, r_{\Lambda 1}^2 \left(f^2(r_{\Lambda 1})\, e^{X(r_{\Lambda 1})} - 1\right) \equiv D = \text{σταθερὰ} \tag{4}$$

---

1. Ἰδὲ ἐπὶ παραδείγματι :

α) M. E. Grypeos, L. P. Kok and S. Ali, Nuclear Physics B 4 (1968) 335.

β) S. Ali, M. E. Grypeos and L. P. Kok, Physical Society Conference, Harwell (1968).

2. J. W. Clark and G. Mueller, Nuovo Cimento 64 (1969) 217.

3. M. E. Grypeos, Lettere al Nuovo Cimento 4 (1970) 973.

λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν Euler:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\hbar^2}{2\mu_{\Lambda N}}\left[\frac{d^2f}{dr_{\Lambda 1}^2}+\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}+\frac{dX}{dr_{\Lambda 1}}\right)\frac{df}{dr_{\Lambda 1}}\right]+\left[-\frac{\hbar^2}{8M_\Lambda}\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{dX}{dr_{\Lambda 1}}+\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\frac{dX}{dr_{\Lambda 1}}\right)^2+\frac{d^2X}{dr_{\Lambda 1}^2}\right)+v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right]f+\left[\left(\frac{\hbar^2}{2M_N}+\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}\right)\left(\frac{df}{dr_{\Lambda 1}}\right)^2-\right.\\&\left.-\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}f\left(\frac{d^2f}{dr_{\Lambda 1}^2}+\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{df}{dr_{\Lambda 1}}\right)+\Big(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\Big)f^2\right]\frac{X_f}{2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι εἶναι:

$$f(c)=0\,,\qquad f(\infty)=1 \tag{6}$$

ἔνθα c εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ σκληροῦ πυρῆνος (hard core) τοῦ δυναμικοῦ σωματίου Λ - νουκλεονίου.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (5) εἶναι μία (μὴ γραμμικὴ) ὁλοκληροδιαφορικὴ ἐξίσωσις, δεδομένου ὅτι αἱ συναρτήσεις X καὶ X_f ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς f διὰ τῶν ὁλοκληρωτικῶν σχέσεων:

$$\left.\begin{aligned}X(r_{\Lambda 1})&=\varrho\int d\bar r_{\Lambda 2}\Big(f^2(r_{\Lambda 2})-1\Big)\Big(Z_2(|\bar r_{\Lambda 1}-\bar r_{\Lambda 2}|)-1\Big)\\X_f(r_{\Lambda 1})&\equiv\frac{\partial X}{\partial f}=2\varrho\int d\bar r_{\Lambda 2}\,f(r_{\Lambda 2})\Big(Z_2(|\bar r_{\Lambda 1}-\bar r_{\Lambda 2}|)-1\Big)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ἔνθα Z_2 εἶναι ἡ συνήθης συνάρτησις κατανομῆς δύο νουκλεονίων. Ἡ παράμετρος λ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) εἶναι πολλαπλασιαστὴς Lagrange λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ (4).

Δυνάμεθα νὰ «γραμμικοποιήσωμεν» (linearize) τὴν ἐξίσωσιν (5), ἐὰν θέσωμεν:

$$f=f_1+f_2 \tag{8}$$

καὶ παραλείψωμεν ὅρους δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς f_2.

Εἰς τὴν σχέσιν (8), f_1 εἶναι μία δεδομένη πρώτη προσέγγισις τῆς f. Ὡς τοιαύτην δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν μίαν συνάρτησιν συσχετίσεως, ὡρισμένης ἀναλυτικῆς μορφῆς, εἰς ἣν ὑπάρχουν παράμετροι τινές, προσδιορισθεῖσαι διὰ γνωστῶν μεθόδων (βλ. σελ. 32, σημ. 1).

Μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς γραμμικήν, μὴ ὁμογενῆ, ὁλοκληροδιαφορικὴν ἐξίσωσιν διὰ τὴν συνάρτησιν f_2:

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\left[\frac{\hbar^2}{2\mu_{\Lambda N}}+\frac{\hbar^2}{8M_\Lambda}f_1X_f^{(1)}\right]\frac{d^2f_2}{dr_{\Lambda 1}^2}-\left[\frac{\hbar^2}{2\mu_{\Lambda N}}\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}+\frac{dX^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}}\right)+\right.\\
&+\left(\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}\frac{f_1}{r_{\Lambda 1}}-\left(\frac{\hbar^2}{2M_N}+\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}\right)\frac{df_1}{dr_{\Lambda 1}}\right)\cdot X_f^{(1)}\Big]\frac{df_2}{dr_{\Lambda 1}}+\\
&+\Big[\left(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right)\left(1+f_1X_f^{(1)}\right)-\frac{\hbar^2}{8M_\Lambda}\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{dX^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}}+\left(\frac{dX^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}}\right)^2+\right.\\
&+\left.\left(\frac{d^2X^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}^2}\right)+X_f^{(1)}\frac{d^2f_1}{dr_{\Lambda 1}^2}+\frac{2}{r_{\Lambda 1}}X_f^{(1)}\cdot\frac{df_1}{dr_{\Lambda 1}}\right)\Big]f_2=\frac{\hbar^2}{2\mu_{\Lambda N}}\left[\frac{d^2f_1}{dr_{\Lambda 1}^2}+\right.\\
&+\left.\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}+\frac{d\left(X^{(1)}+X^{(2)}\right)}{dr_{\Lambda 1}}\right)\frac{df_1}{dr_{\Lambda 1}}\right]+\Big[-\left(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right)+\\
&+\frac{\hbar^2}{8M_\Lambda}\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{d\left(X^{(1)}+X^{(2)}\right)}{dr_{\Lambda 1}}+\left(\frac{dX^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}}\right)^2+2\left(\frac{dX^{(1)}}{dr_{\Lambda 1}}\right)\left(\frac{dX^{(2)}}{dr_{\Lambda 1}}\right)+\right.\\
&+\left.\frac{d^2\left(X^{(1)}+X^{(2)}\right)}{dr_{\Lambda 1}^2}\right)\Big]f_1-\Big[\left(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right)f_1^2+\left(\frac{\hbar^2}{2M_N}+\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}\right)\left(\frac{df_1}{dr_{\Lambda 1}}\right)^2-\\
&-\frac{\hbar^2}{4M_\Lambda}f_1\left(\frac{d^2f_1}{dr_{\Lambda 1}^2}+\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{df_1}{dr_{\Lambda 1}}\right)\Big]\frac{\left(X_f^{(1)}+X_f^{(2)}\right)}{2}.
\end{aligned}
\right\}\qquad(9)
$$

Αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι τῆς f_2 εἶναι :

$$f_2(c)=0\,,\qquad f_2(\infty)=0\,. \qquad (10)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (9), ἥτις δύναται μετασχηματιζομένη νὰ ἐπιλυθῇ, τοὐλάχιστον προσεγγιστικῶς, δι' ἐφαρμογῆς μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, αἱ συναρτήσεις $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X_f^{(1)}$ καὶ $X_f^{(2)}$ δίδονται ὑπὸ γνωστῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐκφράσεων τῶν f_1, f_2 καὶ Z_2.

Τέλος διὰ προσεκτικῆς ἐξετάσεως τῶν διαφόρων συναρτήσεων, ἀποδεικνύομεν, θέτοντες ἐν προκειμένῳ $f=1+f_2$, ὅτι διὰ μεγάλας ἀποστάσεις $r_{\Lambda 1}$ δύναται νὰ ὁρισθῇ μία ἐνεργὸς μᾶζα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (5) λαμβάνει ἐν γένει τὴν μορφήν :

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2\mu_{\Lambda N}^*}\left[\frac{d^2f_2}{dr_{\Lambda 1}^2}+\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{df_2}{dr_{\Lambda 1}}\right]-\left(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right)f_2=\\
&=\frac{\hbar^2}{8M_\Lambda}\left(\frac{2}{r_{\Lambda 1}}\frac{dX}{dr_{\Lambda 1}}+\frac{d^2X}{dr_{\Lambda 1}^2}\right)-\left(v(r_{\Lambda 1})+\lambda\right)\frac{X_f^{(2)}}{2}
\end{aligned}
\right\}\qquad(11)
$$

ἔνθα $\mu_{\Lambda N}^*$ εἶναι ἡ (ἀνηγμένη) ἐνεργὸς μᾶζα (reduced effective mass) τοῦ ζεύγους (σωμάτιον Λ - νουκλεόνιον), διδομένη, συναρτήσει τῆς συνήθους ἀνηγμένης μάζης καὶ τῆς μάζης τοῦ σωματίου Λ, ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\frac{1}{\mu^*_{\Lambda N}} = \frac{1}{\mu_{\Lambda N}} - \frac{1}{2M_\Lambda} \tag{12}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (11) καὶ τῆς ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς τῶν συναρτήσεων X καὶ $X_f^{(2)}$, δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις, ἡ f_2 τείνει ἀρκούντως ταχέως εἰς τὸ 0 διὰ $r_{\Lambda 1} \to \infty$.

Ἐν κατακλεῖδι δέον νὰ ἀναφερθῇ ὅτι διὰ πρώτην φορὰν ὑποδεικνύεται ὁ καθορισμὸς τῆς συναρτήσεως f διὰ μεθόδων τοῦ λογισμοῦ μεταβολῶν, ἄνευ τῆς χρήσεως αὐθαιρέτου περιορισμοῦ.

SUMMARY

The problem of the determination of the correlation function between an impurity particle (for example a Λ-hyperon) and one of the particles of an infinite host medium of identical particles (taken to be the nuclear matter) is investigated in the framework of the variational approach. An approximate expression is used for the trial ground-state energy of the Λ-particle and the variational principle is applied in a proper way, without any use of «ad hoc» integral constraints. The new result obtained with such an approach is a non-linear integrodifferential equation for the correlation function f. A linearization procedure is subsequently applied and a linear integrodifferential equation is obtained. It is finally shown that for large Λ-nucleon separations an effective (reduced) mass $\mu^*_{\Lambda N}$ for the Λ-nucleon pair can be defined.

*

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φ. Βασιλείου** κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας εἶπε τὰ κάτωθι:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἐργασίαν τοῦ κ. Μιχαὴλ Γρυπαίου ἔχουσαν τὸν μὴ συντετμημένον τίτλον «Περὶ μιᾶς μὴ γραμμικῆς ὁλοκληροδιαφορικῆς ἐξισώσεως διὰ τὴν συνάρτησιν συσχετίσεως μεταξὺ ἑνὸς ἐπιπροσθέτου σωματίου καὶ ἑνὸς νουκλεονίου τῆς πυρηνικῆς ὕλης».

Ὁ κ. Γρυπαῖος ἐργάζεται εἰς τὸ Κέντρον Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν «Δημόκριτος», εἶναι διδάκτωρ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ὀξφόρδης, τελευταίως δὲ ἐξελέγη καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Θεσσαλονίκης.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν ἐρευνᾶται τὸ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τῆς καλουμένης «συναρτήσεως συσχετίσεως» διὰ καταλλήλου ἐφαρμογῆς μεθόδων τοῦ Λογισμοῦ Μεταβολῶν. Ἡ βάσει τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης προκύπτουσα ἐξίσωσις Euler εἶναι μία μὴ γραμμικὴ ὁλοκληροδιαφορικὴ ἐξίσωσις, τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς καθιστᾷ γραμμικὴν διὰ καταλλήλου παραλείψεως ὅρων ἀνωτέρας τάξεως ὡς πρὸς τὸν ἕνα τῶν δύο ὅρων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύει προσθετικῶς τὴν ὑπ᾽ ὄψιν συνάρτησιν συσχετίσεως καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἕτερος ὅρος εἶναι μία πρώτη προσέγγισις τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ὡς τοιαύτην πρώτην προσέγγισιν ἐκλέγει ὁ συγγραφεὺς συνάρτησιν συσχετίσεως ὡρισμένης ἀναλυτικῆς μορφῆς, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν παράμετροι τινὲς προσδιοριζόμεναι διὰ γνωστῶν μεθόδων.

Ἡ οὕτω λαμβανομένη γραμμική, μὴ ὁμογενής, ὁλοκληροδιαφορικὴ ἐξίσωσις δύναται μετασχηματιζομένη νὰ ἐπιλυθῇ, τοὐλάχιστον προσεγγιστικῶς, δι᾽ ἐφαρμογῆς μεθόδων τῆς Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως.