ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 12ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1992

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΜΙΧΑΗΛ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

# ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΚΡΑΤΙΚΟΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΡΕΥΝΩΝ: ΤΟ ΜΟΥΣΕΙΟΝ ΤΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΑΣ Ή ΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΙ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΕΥΔΟΞΟΥ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΕΩΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ κ. ΠΕΡΙΚΛΕΟΥΣ ΘΕΟΧΑΡΗ

## 1. Ἱστορικὸν τῆς ἱδρύσεως τοῦ Μουσείου

*Ἡ κυρία δικαιολογία διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης φαίνεται νὰ εἶναι ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ μίαν ἐκ τῶν ἀρχαιοτέρων καὶ τῶν λαμπροτέρων προσπαθειῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Ἐν τούτοις ἡ δικαιολογία αὐτὴ δὲν εἶναι ἱκανὴ νὰ πείσῃ τὰ ἱδρύματα ἐρευνῶν, κρατικὰ καὶ ἰδιωτικά, νὰ ὑποστηρίζουν μέγαν ἀριθμὸν ἐρευνητῶν διὰ μαθηματικοὺς μὲ παχυλοὺς μισθοὺς διὰ νὰ ἐρευνοῦν ὅ,τι ἐπιθυμοῦν. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πανάρχαιον καὶ ἀνάγεται εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἱστορίας. Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ ἀπόκρυφος ἱστορία διὰ τὸν Εὐκλείδην ὡς αὕτη περιγράφεται ἀπὸ τὸν Ἰωάννην Στοβαῖον[1]:*

> *Κάποιος ποὺ ἄρχισε νὰ διδάσκεται γεωμετρίαν μὲ τὸν Εὐκλείδην, ὅταν ἐμελέτησε τὸ πρῶτον θεώρημά του ἐρώτησε τὸν Εὐκλείδην: «Ἀλλὰ τί θὰ κερδίσω, δάσκαλε, ἐκ τῆς μελέτης αὐτῶν τῶν πραγμάτων;» Τότε ὁ Εὐκλείδης ἐκάλεσε ἕνα δοῦλον του καὶ τοῦ εἶπε: «Δός του τρεῖς ὀβολούς, διότι πρέπει νὰ κερδίσῃ κάτι ἀπὸ αὐτὸ ποὺ διδάσκεται».*

*Δεδομένου ὅτι τὸ μαθηματικὸν ὕφος τοῦ Εὐκλείδου δὲν δίδει τὴν εὐκαιρίαν νὰ πιστέψωμεν ὅτι ἐπρόκειτο περὶ χιουμοριστικῆς διαθέσεως καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν* *ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην πρόεδρος τμήματος νεωστὶ ἱδρυθέντος ἱδρύματος ἐρευνῶν ὑπὸ τῆς κυβερνήσεως, δυνάμεθα νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὴν ἀπάντησιν τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἐκτίμησιν τῆς ἀξίας τῆς γνώσεως τοῦ μαθητοῦ. Ἐν τούτοις διατί διέθετε τρεῖς ὀβολοὺς ἀφοῦ καὶ ἕνας ἀκόμη θὰ ἦτο ἱκανοποιητικός; Πιθανὸν νὰ διέθετε προϋπολογισμὸν ἐρευνῶν 30 δραχμῶν καὶ ὄντας ὑποχρεωμένος νὰ δημιουργήσῃ βασικὴν ἐργασίαν ἀναφορῶν μεγάλης ἐκτάσεως εἰς τὴν περιοχὴν τῶν μαθηματικῶν ὑπελόγισε, μὲ τὴν σύμφωνον γνώμην τῆς διαχειριστικῆς ἐπιτροπῆς, ὅτι 1000 προτάσεις ἔπρεπε νὰ καλυφθοῦν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων ἑπομένως ἀντιστοιχοῦσαν τρεῖς ὀβολοί. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔκαμε χρῆσιν μεγάλης μάζης εὐθηνῆς ἐργασίας ἐρευνητῶν σπουδαστῶν, ἀντὶ τῆς ἀκριβῆς ἐργασίας ὀλίγων καθηγητῶν. Τὸ περιστατικὸν αὐτὸ εἶναι πιθανῶς ἡ ἀρχὴ τοῦ συγχρόνου κακοῦ φαινομένου τῆς ἀμοιβῆς τῶν ἐπιστημόνων διὰ τὴν πρόοδον τῆς ἐρεύνης.*

*Ἴσως δημιουργεῖται ἡ ἀπορία διατί ἀναφερόμεθα εἰς τὸ διάσημον Μουσεῖον τῆς Ἀλεξανδρείας ὡς ἐρευνητικὸν ἵδρυμα τοῦ κράτους. Στὴν πραγματικότητα τὸ Μουσεῖον ἀπετέλεσε τὸ πρῶτον κρατικὸν ἵδρυμα ἐρευνῶν [2] καὶ εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι διέθετε ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ ἱδρύματος ἐρευνῶν μὲ μονίμους θέσεις ἐρευνητῶν, μὲ ἐξαιρετικὴν βιβλιοθήκην καὶ ἀφθονίαν ἐργατικῶν χειρῶν δούλων. Δύναταί τις νὰ ὑποθέσῃ ὅτι τὸ παρακάτω εἶδος συζητήσεως ἔλαβε κάποτε χώραν.*

> *Μίαν ἡμέραν ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ὡς νέος σπουδαστὴς ἐρωτᾷ τὸν διδάσκαλόν του λέγοντας: «Δάσκαλε, ἔχω ἕνα πρόβλημα». Ὁ Ἀριστοτέλης ἀπαντᾷ: «Ναί;». Ὁ Ἀλέξανδρος συνεχίζει: «Στὰ σχέδιά μου διὰ τὴν κατάκτησιν τοῦ κόσμου εἶναι προφανὲς ὅτι χρειάζομαι νὰ ὀργανώσω ἕνα καλῶς ὀργανωμένον στρατόν. Ἀλλὰ καθὼς θὰ καταλαμβάνω κάθε χώραν καὶ θὰ προχωρῶ εἰς τὴν ἑπομένην κατάκτησιν, διερωτῶμαι πῶς θὰ ἐλέγχω τὶς κατακτηθεῖσες χῶρες;»*
>
> *Ὁ Ἀριστοτέλης, μετὰ ἀπὸ μακρὰν σιγήν, καὶ στρέφοντας τὸ βλέμμα του πρὸς τὸ ἄπειρον ἀναφωνεῖ: «Βεβαιότατα. Νομίζω ὅτι ἔχω τὴν λύσιν. Ἐπιθυμεῖτε δηλαδὴ νὰ δημιουργήσετε ἕνα κρατικὸν ἵδρυμα ἐρευνῶν. Μπορεῖτε κάλλιστα νὰ τὸ ὀνομάσετε μὲ τὸ ὄνομά σας. Εἰς τὸ ἵδρυμα αὐτὸ τὸ τμῆμα κοινωνιολογίας δύναται νὰ παράγῃ καταλλήλους θρησκείας συνδεομένας στενῶς μὲ τὰς τοπικὰς ἑκάστοτε δοξασίας, αἱ ὁποῖαι θὰ κρατοῦν τοὺς ἰθαγενεῖς εὐτυχεῖς καὶ ἡσύχους».*
>
> *Ἐν τούτοις ὅμως, ἀλλάζοντας ἐμφανῶς τὸν τόνον τῆς φωνῆς του, ὁ Ἀριστοτέλης προσθέτει ἀδιαφόρως: «Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἔχω ἕνα πολὺ καλὸν μαθητήν, ὁ ὁποῖος θὰ δύναται νὰ δομήσῃ ὅ,τι χρειάζεται καὶ εἶναι ἕνας ἐξαιρετικὸς ἀρχιτέκτων (πρόκειται περὶ τοῦ Δεινοκράτους) κατάλληλος διὰ μαρμά-*

ρινα κτίρια καὶ ἕνα προχωρημένον μαθητήν (πρόκειται περὶ τοῦ Δημητρίου τοῦ Φαληρέως) ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ γίνῃ ἕνας θαυμάσιος πρῶτος διευθυντὴς τοῦ ἱδρύματος».

Ἐν συνεχείᾳ ἡ φωνὴ τοῦ Ἀριστοτέλους ἐπανῆλθεν εἰς τὴν κανονικήν της χροιὰν λέγοντας: «Φαντάζομαι ὅτι θὰ ἔχετε ἀνάγκην καὶ ἐπιστήμονος τῶν γραμμάτων γιὰ νὰ ἀναλάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς βιβλιοθήκης, καί (μὲ μικρὰν διακοπήν) ὑπάρχει ἕνας ἡλικιωμένος σοφὸς περὶ τὸν Ὅμηρον, ὁ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ εἶναι κατάλληλος. Ἐξ ἄλλου, αὐτὸς ἔχει καὶ τὸ πλεονέκτημα ὅτι πλησιάζει τὴν ἡλικίαν τῆς συνταξιοδοτήσεως, ὥστε εὐθὺς ὡς αὐτὸς ἀναλάβει τὴν ἀγγαρείαν νὰ ἐγκαταστήσῃ τὴν καταλογογράφησιν τῆς βιβλιοθήκης, μᾶλλον θὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἐργασίαν, ὁπότε θὰ ἐπιλέξωμεν τὸν κατάλληλον ἐπιστήμονα».

Ἡ φωνὴ τοῦ Ἀριστοτέλους ξαναγίνεται ἀδιάφορος. Προσθέτει: «Καὶ ἐν πάσῃ περιπτώσει τυγχάνει νὰ ἔχω τὸν κατάλληλον ἄνθρωπον διὰ τὴν θέσιν, ἕνα μαθητήν μου ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνας λαμπρὸς πολυτάλαντος νέος, ὁ ὁποῖος ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἀστρονομίαν, τὴν γεωγραφίαν, τὴν φιλολογίαν καὶ διὰ τὸ θέμα μας, ἀλλὰ τοῦ χρειάζονται μερικὰ ἀκόμη χρόνια ἐρεύνης προτοῦ νὰ μπορῇ νὰ ἀναλάβῃ διευθυντικὰ καθήκοντα». (Τὰ πρότυπα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ὁ Ἀριστοτέλης εἶναι ὁ Ζηνόδοτος, ἕτοιμος πρὸς συνταξιοδότησιν, καὶ ὁ Ἐρατοσθένης, ὁ νέος ὁ πολλὰ ὑποσχόμενος).

Μετὰ ἀπὸ μακρὰν παῦσιν ὁ Ἀριστοτέλης προσθέτει: «Ἄ, βέβαια, ἔχω καὶ ἕνα ἄλλον νέον σπουδαστὴν ὁ ὁποῖος εἶναι ὀλίγον ἰδιόρρυθμος καὶ στριμμένος, ἀλλὰ εἶναι σπουδαῖος στὶς κατασκευὲς μὲ τὰ χέρια του (πρόκειται διὰ τὸν Σώστρατον). Ἡ φιλοδοξία του εἶναι νὰ χτίσῃ ἕνα γιγαντιαῖον φάρον, ἀλλὰ δὲν ἔχει τὰ μέσα. Ἀλλὰ σὲ ἕνα κρατικὸν ἵδρυμα ἐρευνῶν εἶναι εὔκολον καὶ ἐνδιαφέρον νὰ χρηματοδοτηθῇ μιὰ τέτοια προσπάθεια, ἔστω καὶ μόνον διὰ τὸ γόητρον τοῦ ἱδρύματος, ἂν καὶ νομίζω ὅτι θὰ ἀποτελέσῃ καὶ ἕνα ἐνδιαφέρον μέρος τοῦ ἐξοπλισμοῦ τοῦ ἱδρύματος.

Ὑποθέτω ἐξ ἄλλου ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ ἕνα τμῆμα φιλοσοφίας, ἂν καὶ γιὰ νὰ πῶ τὴν ἀλήθεια τὸ θέμα ἔχει παραγίνει ἀπὸ τὸν Πλάτωνα καὶ ἀπὸ ἐμέ, ἀλλὰ καὶ οἱ πλεῖστοι ἀπὸ τοὺς μαθητάς μου εἶναι ὅλοι δευτέρας κατηγορίας [2]. Ἐξ ἄλλου, ἡ βιολογία, ἡ ψυχολογία καὶ ἡ ἰατρικὴ εὑρίσκονται σὲ συνεχῆ ἐξέλιξιν καὶ ὅλο καὶ νέα θέματα ἐξετάζονται καί, ἐπὶ πλέον, ἔχω καὶ ἕνα θαυμάσιον νεαρὸν μαθητήν (πρόκειται περὶ τοῦ Ἐρασιστράτου) ὁ ὁποῖος ἔκανε μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἔρευναν εἰς τὴν ψυχολογίαν τῶν σεξουαλικῶν *καὶ νευρικῶν καταθλίψεων, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ἰδανικὸς ὡς ἐπικεφαλῆς τοῦ ἐρευνητικοῦ κέντρου.*

*Ἐξ ἄλλου φαντάζομαι ὅτι χρειαζόμεθα βεβαίως ἕνα μαθηματικὸν καὶ ἂν καὶ δὲν ἔχω κανένα κατάλληλον μαθητὴν διαθέσιμον αὐτὴν τὴν στιγμήν, νομίζω ὅτι ὑπάρχει ἕνας νέος ἐρευνητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος (πρόκειται περὶ τοῦ Εὐκλείδου). Ὄχι πὼς εἶναι πολὺ καλὸς εἰς τὴν ἔρευναν, πράγματι ἀμφιβάλλω ἐὰν θὰ μπορέση ποτὲ νὰ πάρῃ τὸ διδακτορικόν του δίπλωμα, ἀλλὰ εἶναι καλὸς δάσκαλος καὶ πολὺ καλὸς ἐκδότης βιβλίων. Ἂν καὶ στερεῖται ἀπὸ χιοῦμορ, θὰ ἀποτελέση ἐξαιρετικὸν διοικητικὸν στέλεχος καὶ κατὰ συνέπειαν συνιστῶ νὰ τὸν διορίσωμεν νὰ ἀναλάβη νὰ ὀργανώση τὸ τμῆμα τῶν μαθηματικῶν.*

*Τέλος, θέλω νὰ παρατηρήσω ὅτι, ἐὰν ἐγὼ ἤμουν στὴν θέσιν σας, θὰ διάλεγα κάπου σὲ κάποια ἀκτὴ τῆς Μεσογείου ἕνα μέρος μὲ καλὸ κλίμα καὶ μὲ μία ἀμμώδη παραλία μὲ καλὲς ἐγκαταστάσεις λουτρῶν καὶ ὄχι πολὺ μακριὰ ἀπὸ τὶς κύριες θαλάσσιες συγκοινωνιακὲς γραμμές. Πράγματι, εἶχα κάμει τελευταίως διακοπὲς σὲ μία ἀκτὴ ποὺ λέγεται Kas-el-Tin [2]. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ προσελκύετε ὄχι μόνον ἀξιολόγους ἐπιστήμονας διὰ τὸ προσωπικὸν τοῦ ἱδρύματος, ἀλλὰ καὶ ἐπισκέπτας κάθε θέρος, οἱ ὁποῖοι θὰ κρατοῦν τὸ ἵδρυμα ἀκαδημαϊκῶς ζωντανό. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐλπίζω τὸ ἵδρυμα νὰ διαρκέση μερικοὺς αἰῶνες».*

*Καὶ πράγματι αὐτὸ ἦτο τὸ ὁποῖον ἔπραξε καὶ ὁ Ἀλέξανδρος, ἐν πάσῃ λεπτομερείᾳ, ὅταν ἦτο εἰς ἡλικίαν 23 ἐτῶν.*

*Πρὶν ἀπὸ τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὑπῆρχαν μόνον ἰδιωτικαὶ ἀκαδημίαι αἱ ὁποῖαι ἐστεροῦντο μακροβιότητος, διότι ἐξηρτῶντο ἀποκλειστικῶς ἀπὸ προσωπικότητας καὶ ἔτειναν νὰ διαλυθοῦν εὐθὺς ὡς αἱ προσωπικότητες αὐταὶ εἴτε ἐγκατέλειπον τὰ ἱδρύματα εἴτε ἀπέθνησκον. Ἐξαίρεσιν ἀπετέλεσε μόνον ἡ Ἀκαδημία τοῦ Πλάτωνος. Ὁ Πλάτων πρέπει νὰ ἦτο εἷς ἐκ τῶν καλυτέρων, ἀλλὰ καὶ ἀδυνάτων ἐποπτῶν ἐρεύνης εἰς τὰ μαθηματικά. Κατὰ τὸν Τζέτζην [3], καίτοι εἰς τὴν εἴσοδον τῆς Ἀκαδημίας ἀνεγράφετο τὸ ρητόν: «Μ η δ ε ὶ ς   ἀ γ ε ω μ έ τ ρ η τ ο ς   ε ἰ σ ί τ ω», ἐὰν κανεὶς ἀναλογισθῇ ποία ἦτο ἡ γνώμη τοῦ Πλάτωνος διὰ τὴν γεωμετρίαν, θὰ ἀντιληφθῇ ὅτι ἐπρόκειτο περὶ μιᾶς σχολαστικῆς ἐπιμονῆς ἐπιλύσεως γεωμετρικῶν προβλημάτων διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Ἡ τοιαύτη ἀντιμετώπισις ἦτο πραγματικῶς μᾶλλον λυπηρά, καθ' ὅσον ἠνάγκαζε μεγάλους φιλοσόφους καὶ μύστας τῆς ἐπιστήμης νὰ ἀσχολοῦνται μόνον μὲ μίαν περιωρισμένην ἄποψιν καὶ πλευρὰν μιᾶς εὐρυτάτης ἐπιστήμης, ἡ ὁποία θὰ ἠδύνατο νὰ συμβάλη σημαντικῶς εἰς τὴν* *ἀνάπτυξιν νέων ἰδεῶν εἰς ὅλας τὰς ἀπόψεις τοῦ ἐπιστητοῦ. Ἡ ἰσχυρὰ προσωπικότης τοῦ Πλάτωνος εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα νὰ περιορίση σημαντικῶς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν κατὰ τὴν ἐποχήν του καὶ μετέπειτα.*

*Εὐτυχῶς διὰ τὴν Ἑλληνικὴν ἐπιστήμην ὁ Πλάτων εἶχε ἕνα ἐρευνητὴν μαθητὴν ὁ ὁποῖος ἦτο ἀντάξιός του καὶ ὁ ὁποῖος κατὰ τὴν γνώμην μας ὑπῆρξεν ὁ μεγαλύτερος τῶν Ἑλλήνων Μαθηματικῶν, τὸν Εὔδοξον. Ὁ Εὔδοξος ἐγεννήθη εἰς τὴν Κνίδον τῆς Μικρᾶς Ἀσίας πλησίον τῆς Ρόδου κατὰ τὸ ἔτος 408 π.Χ. περίπου, ὁπόταν ὁ Πλάτων ἦτο ἤδη 20 ἐτῶν. Ὁ Εὔδοξος προσῆλθεν εἰς τὴν σχολὴν τοῦ Πλάτωνος ὅταν ἦτο 23 ἐτῶν, ὁπότε ὁ Πλάτων ἦτο περίπου 45 ἐτῶν καὶ εἰς τὸν κολοφῶνα τῶν δυνάμεών του. Μπορεῖ κανεὶς νὰ φαντασθῇ τὸν ἑξῆς διάλογον μεταξὺ τοῦ ὡρίμου διδασκάλου καὶ τοῦ νεοεισαχθέντος ἐκ Κνίδου μαθητοῦ. Ὁ Πλάτων ἠρώτησε τὸν Εὔδοξον: «Ἔχω τέσσερα προβλήματα τὰ ὁποῖα θὰ ἐπεθύμουν νὰ ἐπιχειρήσης νὰ λύσης, τὰ ὁποῖα ἔχουν παραμείνει ἄλυτα ἀπὸ τὸν παλαιόν μου μαθητὴν Ζήνωνα».*

*Μπορεῖ κανεὶς νὰ συμπεράνη ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος ὅτι ὁ φιλόσοφος πάντοτε ἀπευθύνετο κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν καρδιὰν τοῦ θέματος ἀνεξαρτήτως μὲ ποιὸν συνεδιελέγετο, πρᾶγμα ποὺ εἶναι μεγάλο προτέρημα διὰ τὸν ἐπόπτην ἐρευνῶν. Ἀλλὰ πρέπει νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἀπορίαν τοῦ Πλάτωνος, ὅταν ὁ Εὔδοξος ἐπιστρέφει μετ' ὀλίγον μὲ φύλλον παπύρου ἰσχυριζόμενος ὅτι εἶχε λύσει τὰ προβλήματα. Ἀλλὰ ἡ δευτέρα ἀρετὴ τοῦ Πλάτωνος, ὡς ἐπόπτου ἐρευνῶν, συνίστατο εἰς τὴν ἐπιμονήν του διὰ τὴν σαφήνειαν τῶν ἐκθέσεων.*

*Ἀγαπητέ μου νέε, ἀπαντᾶ ἐπιστρέφων τὸ φύλλον τοῦ παπύρου εἰς τὸν ταπεινωμένον Εὔδοξον, πρέπει νὰ μοῦ ἐξηγήσετε τὴν λύσιν μὲ βραχεῖες φράσεις ὅπως ἀκριβῶς σᾶς παρουσίασα ἐγὼ τὸ πρόβλημα. Ἐμεῖς οἱ φιλόσοφοι πιστεύομεν εἰς τὴν ἀξίαν τῆς συζητήσεως· ὁπότε ὁ Εὔδοξος ἀντελήφθη ὅλας τὰς δυσκολίας νὰ κάμη μαθηματικὰς ἐρεύνας εἰς Ἀκαδημίαν Φιλοσοφίας.*

*Πράγματι, ὤφειλε νὰ περιορίζη τὴν ἀπόδειξιν οἱασδήποτε προτάσεως εἰς τόσον περιωρισμένον χρόνον ὅσον οἱ συζητηταὶ αὐτοὶ φιλόσοφοι θὰ τοῦ ἐπέτρεπαν νὰ ἔχη τὸν λόγον. Δεδομένου ὅτι ἦτο ἴσως ὁ μεγαλύτερος μαθηματικὸς τῆς ἀρχαιότητος, κατώρθωνε πάντοτε νὰ ἐπιτυγχάνη τοῦ σκοποῦ του. Τοιουτοτρόπως κατώρθωσε νὰ περιορίση τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ὁρισμοῦ ὑπ' ἀριθμ. 5 εἰς τὸ βιβλίον V τοῦ Εὐκλείδου εἰς μίαν μόνον γραμμήν [4]. Τὸ πρόβλημα ἀφεώρα τὸν καθορισμὸν τοῦ λόγου μεταξὺ ἀρρήτων μεγεθῶν καθ' ἣν στιγμὴν δὲν ὑπῆρχε ὁρισμὸς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οὔτε οἱοσδήποτε ὁρισμὸς τοῦ τρόπου προσθέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀρρήτων ἀριθμῶν. Ἡ λύσις του συνίστατο εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς ὀρθῆς ἰσοδυνάμου σχέσεως μεταξὺ ζευγῶν ὡς κατωτέρω.*

**2. Ὁ κατὰ Εὔδοξον ὁρισμὸς τῆς Ἰσοδυναμίας**

*Ἐὰν ὁρίσωμεν μὲ N τοὺς θετικοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς, ἡ πρότασις τοῦ Εὐδόξου ἔχει ὡς ἀκολούθως:*

$$(\alpha,\beta) \sim (\alpha', \beta') \text{ ἐὰν διὰ πάντα } m, n \in N, m\alpha \gtreqless n\beta \text{ ὡς } m\alpha' \gtreqless n\beta'. \qquad (1)$$

*Ἡ τάξις ἰσοδυνάμου τοῦ ζεύγους (α,β) ἐκλήθη λ ό γ ο ς καὶ παρεστάθη ὡς α:β, οὕτω:*

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' \qquad (1\alpha)$$

*Ἤδη ἡ ὡραιότης τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ περιέχεται εἰς τὴν γενικότητά του, καθόσον α, β, α', β' δύνανται νὰ εἶναι οἱαδήποτε εἴδη μεγεθῶν, διαστήματα χώρου, περίοδοι χρόνου, ἐπιφάνειαι, ὄγκοι, μουσικοὶ φθόγγοι, ἀκέραιοι ἀριθμοί, ρητοί, ἄρρητοι κ.λπ., δηλαδὴ τὰ στοιχεῖα ὁποιουδήποτε διευθετημένου συνόλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς N ἐπενεργεῖ.*

*Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ὅπου πρόκειται περὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἔννοια ὡρίσθη πολὺ ἀργότερον ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ ἔχομεν:*

$$\frac{\alpha}{\beta} \gtreqless \frac{n}{m} \quad \text{ὅπως} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} \gtreqless \frac{n}{m} \qquad (2)$$

*Κατὰ συνέπειαν $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$ καθόσον προσδιορίζουν τὴν αὐτὴν τομὴν κατὰ Dedekind τῶν ρητῶν ἀριθμῶν [5]. Κατὰ συνέπειαν ἰσχύει ἡ ταυτότης $\alpha : \beta = \alpha/\beta$. Ἀλλὰ ὁ ὁρισμὸς τοῦ Εὐδόξου εἶναι γενικώτερος ἀπὸ τὴν ἁπλῆν ἀναφορὰν εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.*

*Ἡ πρότασις αὐτὴ καὶ ὁ τρόπος διατυπώσεώς της ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου ἀποτελεῖ τὴν ἀ π α ρ χ ὴ ν τ ῆ ς ἀ φ η ρ η μ έ ν η ς ἀ λ γ έ β ρ α ς. Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδειχθῆ ἐξ ἄλλου ὅτι ὁ Εὔδοξος ἦτο ὁ κατ' ἐξοχὴν ἀλγεβριστὴς τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος καὶ κατ' ἐξοχὴν ὁ μέγιστος ἀναλυτικὸς τῆς ἀρχαιότητος, ἐνῶ ἐξ ἄλλου κατατάσσεται μεταξὺ τῶν κορυφαίων της ὡς γεωμέτρης καὶ ἀστρονόμος.*

*Εἶναι σημαντικὸν νὰ ἀναφερθῆ παρεμπιπτόντως ὅτι δύναταί τις νὰ συνδέση ἀπ' εὐθείας τὸν Εὔδοξον μὲ τὴν ἀνακάλυψιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς σειρᾶς Εὔδοξος - Εὐκλείδης - Bolzano - Weierstrass - Dedekind. Εἰς τὴν διαδοχὴν αὐτὴν ὁ σύνδεσμος - κλειδὶ εἶναι ὁ Bolzano. Ὁ Bolzano εἰς τὴν αὐτοβιογραφίαν του ἐξομολογεῖται ὅτι ἡ μόνη ἐργασία ἡ ὁποία τὸν ἔστρεψε πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν ἦτο ἡ ὡραιότης τοῦ βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὸν Bolzano ὀφείλεται ἡ* *πρώτη εἰσαγωγὴ τῆς τεχνικῆς ε-δ καὶ ἡ αὐστηρὰ διατύπωσις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συνεχείας. Δεδομένου ὅτι ὁ Bolzano οὐδέποτε ἐχρησιμοποίησε ἀπειροστὰ μεγέθη, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνη παραδεκτὸν ὅτι οὗτος ἐνεπνεύσθη διὰ τὴν τεχνικήν του κατ' εὐθεῖαν ἀπὸ τὸ βιβλίον V τοῦ Εὐκλείδου.*

*'Αλλὰ κατὰ τὸν Πρόκλον [3,4] τὸ βιβλίον V τοῦ Εὐκλείδου ἀνακεφαλαιώνει τὴν θεωρίαν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου, ἡ ὁποία ἀνεγνωρίζετο ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας ὡς ἡ κορωνὶς τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν. Ἡ ὡραιότης τοῦ βιβλίου αὐτοῦ εἶναι ἀξιοθαύμαστος καθὼς καὶ ἡ αὐστηρότης τῶν διατυπώσεων. 'Αναγνωρίζεται δὲ ὡς τὸ πλέον πρώιμον ἐπιζῶν βιβλίον ἐπὶ τῆς συγχρόνου ἀφηρημένης ἀλγέβρας. 'Εν τούτοις ὅμως γεννᾶται ἡ ὑποψία ὅτι ὁ Εὐκλείδης κατέστρεψε τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, κατ' ἀρχὴν παραγνωρίζοντάς την, καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀναφέροντας μόνον ἕνα ἀπόσπασμά της, καὶ κατὰ ἐσφαλμένην σειράν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐπέτυχε νὰ ἀποτρέψη ὁλοσχερῶς τὴν ἔγκαιρον ἀνακάλυψίν της ἐκ νέου, δεδομένου ὅτι δὲν διεσώθησαν μέχρις ἡμῶν αἱ πρωτότυποι ἐκφράσεις τοῦ Εὐδόξου.*

**3. Διαφοραὶ Εὐδόξου καὶ Εὐκλείδου**

*Πιθανὴ ἐξήγησις διατί ὁ Εὐκλείδης ἔκαμε χρῆσιν μέρους μόνον τῆς θεωρίας τοῦ Εὐδόξου, τὴν ὁποίαν καὶ ἀναφέρει, εἶναι ἡ ἑξῆς: Πρὸ τοῦ Εὐδόξου οἱ Ἕλληνες δὲν ἠδύναντο νὰ ὁρίσουν αὐστηρῶς οἱονδήποτε θεώρημα ὁμοιότητος. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἰσότης τῶν λόγων τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν δύο ὁμοίων τριγώνων* $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$ *δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ δύο μόνον τρόπους, εἴτε ἐὰν διαθέτη κανεὶς τὴν θεωρίαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ κάμη χρῆσιν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως, γεγονότα τὰ ὁποῖα ἠγνόουν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, εἴτε διὰ χρήσεως τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λόγου τοῦ εἰσαχθέντος ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἦτο ὁ λόγος, διατί ὁ Εὐκλείδης ἔπρεπε νὰ ἀναβάλη οἱονδήποτε θεώρημα ὁμοιότητος διὰ τὸ βιβλίον VI, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ βιβλίον V.*

*Ἕτερον παράδειγμα ἀποτελεῖ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, τοῦ ὁποίου τὴν ἀπόδειξιν δίδει ὁ Εὐκλείδης ὡς τὴν 47ην πρότασιν τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν του.*

*Πέραν ὅμως τῆς γνωστῆς ταύτης λύσεως τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος ὑπάρχει καὶ ἡ λύσις διὰ τῆς καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τυγχάνει νὰ εἶναι κομψοτέρα τῆς ἀρχικῆς. 'Εν τούτοις ὅμως, λόγῳ τῆς τρομερᾶς ἐπιδράσεως τῆς σχολαστικότητος τοῦ Εὐκλείδου ἐφ' ὅλων τῶν διδασκόντων τὰ μαθηματικὰ διὰ τὰ 2000 ἔτη ποὺ ἀκολούθησαν, ἡ ἐνδιαφέρουσα αὐτὴ λύσις εἶχεν ἐπισήμως καταπνιγῆ, διότι λόγῳ τῆς κακῶς ἐννοουμένης αὐστηρότητος* *ὤφειλε νὰ ἀναβληθῇ καταλλήλως μέχρις εἴτε τῆς ἀποδείξεως ὑπάρξεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἴτε μέχρι γνώσεως τοῦ βιβλίου V, θέματα τὰ ὁποῖα, ἀμφότερα, δὲν ἦσαν προσιτὰ εἰς τὴν τότε μαθηματικὴν σχολήν.*

*Τὰ ἀνωτέρω εἶχον ὡς ἀποτέλεσμα οἱ μαθηταὶ τῶν σχολείων νὰ στεροῦνται τοῦ πλεονεκτήματος τῆς διαισθήσεως ὑπάρξεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπιέζοντο νὰ ἀφομοιώνουν τὰς 47 προτάσεις τοῦ βιβλίου I τοῦ Εὐκλείδου διὰ νὰ δυνηθοῦν νὰ ἀντιμετωπίσουν τὴν ἐφευρετικὴν καὶ ἔξυπνον λύσιν τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ ἡ ὁποία ἦτο ὅμως ταυτοχρόνως καὶ δύσπεπτος, ἀνεξαρτήτως τῆς ὑπάρξεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἑπομένως ὅ,τι ἐκέρδιζαν οἱ σπουδάζοντες εἰς συστηματικὴν μόρφωσιν καὶ γενίκευσιν, ἔχαναν εἰς ἐνδιαφέρον, δεδομένου ὅτι ὤφειλαν προηγουμένως νὰ ἀφομοιώσουν ὁλόκληρον τὸ σύστημα τῶν ἀξιωμάτων τοῦ βιβλίου I τοῦ Εὐκλείδου.*

*Παρόμοιον παράδειγμα ἔχομεν σήμερον, ἴσως καὶ χειρότερον. Διὰ λόγους αὐστηρότητος διατυπώσεων καὶ χάρις εἰς τὸ σύγχρονον ἀντίστοιχον τοῦ Εὐκλείδου, δηλαδὴ τὸ συγκρότημα Bourbaki, οἱ γάλλοι μαθηταὶ τοῦ γυμνασίου ἀναγκάζονται νὰ ἀφομοιώνουν τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν παρὰ τὴν θέλησίν των.*

*Ἑτέρα σημαντικὴ περιοχή, ὅπου ὁ Εὐκλείδης ἠναγκάσθη νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Εὐδόξου διὰ τὸν λόγον, εἶναι τὸ βιβλίον XII. Ἐδῶ $\alpha:\beta$ εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο κώνων τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ $\alpha' : \beta'$ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν βάσεών των. Αὐτὴν τὴν φορὰν ἡ ἀπόδειξις $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$ χωρὶς τὴν γνῶσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ χωρὶς τὴν γνῶσιν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, εἶναι κατόρθωμα τὸ ὁποῖον ὀφείλεται πάλιν εἰς τὸν Εὔδοξον. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ὁ Εὔδοξος ἀνεκάλυψε τὴν θεωρίαν τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ τῆς μεθόδου δὲ αὐτῆς συνήγαγεν ὅτι:*

**ὁ ὄγκος τοῦ κώνου = 1)3 βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος** *(3)*

*Ἔκτοτε δὲν ὑπῆρχε καμμία ἄλλη αὐστηρὰ λύσις τῆς ἁπλῆς αὐτῆς προτάσεως μέχρις ὅτου ὁ Dedekind ἀνεκάλυψε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ 1854, καὶ εἰσήγαγε τὴν χρῆσιν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ [5].*

*Τέλος ἀξίζει νὰ ἀναφερθῇ ὅτι κατὰ τὴν λύσιν ὑπὸ τοῦ Dehn, τὸ 1900, τοῦ τρίτου προβλήματος τοῦ Hilbert [6, 7] ἀπεδείχθη ὅτι, ἄνευ τῆς θεωρίας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, μόνον ἡ λύσις τοῦ Εὐδόξου ἠδύνατο νὰ ἀποδείξῃ τὴν παραπάνω πρότασιν. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν τῆς ἱκανότητος τοῦ Εὐδόξου ὡς ἀ ν α λ υ τ ι κ ο ῦ ἐ π ι σ τ ή μ ο ν ο ς, καὶ αὐτὸ δὲν εἶναι τὸ μόνον, διότι οὗτος* *π.χ. ἀνεκάλυψεν ἐπίσης τὴν ἱπποπέδην διὰ τὴν περιγραφὴν τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν [8].*

*Ἀλλὰ ὁ Εὔδοξος ἦτο καὶ μέγας ἀλγεβριστὴς καὶ ἂς ἀναφέρωμεν ἐδῶ μεγάλα παραπτώματα τοῦ Εὐκλείδου, παραπτώματα παραλείψεων καὶ ὄχι διατυπώσεων προτάσεων. Ὁ Εὐκλείδης εἶναι κλασσικὸν παράδειγμα τῶν κινδύνων τῶν προερχομένων ἐκ τῆς ἀναθέσεως εἰς ἕνα μεγάλον σοφὸν τῆς διευθύνσεως ἑνὸς Πανεπιστημίου ἢ ἑνὸς Ἱδρύματος ἐρευνῶν, ἢ ἑνὸς νεοεισαγομένου νόμου σπουδῶν, ἀντὶ ἑνὸς ἐρευνητοῦ. Τοῦτο δέ, διότι οἱ σοφοὶ ἔχουν τὴν τάσιν νὰ διαχωρίζουν τὸ ἐπιστητὸν εἰς τμήματα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, ἐνῶ οἱ ἐρευνηταὶ ἔχουν τὴν τάσιν νὰ συνθέτουν δραστηριότητας. Τοιουτοτρόπως ὁ Εὐκλείδης ἔθεσε τὰ καθαρὰ λεγόμενα μαθηματικὰ εἰς τὸ τμῆμα τῶν μαθηματικῶν καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα καλούμενα μαθηματικὰ εἰς τὸ τμῆμα τῶν ἐφηρμοσμένων ἐπιστημῶν, δηλαδὴ εἰς τὰ τμήματα ἀστρονομίας, γεωγραφίας κ.λπ. τοῦ κέντρου ἐρευνῶν τῆς Ἀλεξανδρείας, ἐπιμένων εἰς τὴν τήρησιν αὐτοῦ τοῦ διαχωρισμοῦ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ βιβλίον του V κατέπνιξε τὴν θαυμασίαν ἔμπνευσιν μεγαλοφυΐας τοῦ Εὐδόξου ἡ ὁποία ἦτο ὅτι:* **ὁ ὁρισμός του τῆς ἰσοδυναμίας ἀρκεῖ διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ταχύτητος τῶν κινουμένων σωμάτων.**

## 4. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ταχύτητος

*Δύναταί τις νὰ φαντασθῇ τὸν στεγνὸν σοφὸν Εὐκλείδην νὰ ἀναγγέλλῃ: «Ἡ ταχύτης μελετᾶται εἰς τὸ τμῆμα ἀστρονομίας». Ἐξ ἄλλου, ἱστορικῶς, εἶναι δύσκολον νὰ εὑρεθῇ βέβαιον τεκμήριον ὑπὲρ ἢ κατὰ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ Εὔδοξος ἐπέλυσε τὰ προβλήματα τοῦ Ζήνωνος [3]. Ἐὰν ὅμως ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καθ' ἑαυτό, ἐσωτερικῶς ἐκ τοῦ περιεχομένου τῶν μαθηματικῶν του, συγκρινόμενον μὲ τὰς ἐξωτερικὰς ἐνδείξεις ἐκ τῶν παρατηρήσεων ἑνὸς φιλοσόφου ὅπως ὁ Πρόκλος, ὁ ὁποῖος συνέγραψεν ἑπτὰ αἰῶνας μετὰ τὰ γεγονότα, συνάγεται ὅτι ἡ μαρτυρία του καθίσταται καταλυτική. Διότι κατὰ τὸν καιρὸν τοῦ Εὐδόξου, ἀντιμετωπίζοντος τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος, τὸ πρόβλημα καθορισμοῦ τῆς ταχύτητος, δι' ὁρισμοῦ ἱκανοποιοῦντος τοὺς φιλοσόφους, καθίστατο δυσκολωτάτη προσπάθεια, δεδομένου ὅτι ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἐβασίζετο εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων καὶ δεδομένου ὅτι ὁ Εὔδοξος ἦτο ὑποχρεωμένος, ὡς ἐρευνητὴς σπουδαστὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, νὰ δίδῃ ἐξηγήσεις τῶν μελετῶν του εἰς φιλοσόφους καὶ ὄχι μαθηματικούς.*

*«Ἀφοῦ δὲν δύνασθε νὰ μᾶς ἀποδείξετε πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρέσωμεν ἀρρήτους ἀριθμούς, διηρωτῶντο χαμογελῶντες πονηρὰ καὶ συγκαταβατικὰ οἱ*

*φιλόσοφοι, καθίσταται παράλογον νὰ εἰσηγῆσθε ὅτι δύνασθε νὰ διαιρέσετε τὸ διάστημα διὰ τοῦ χρόνου».*

*Χωρὶς τὴν ὕπαρξιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ γνωρίζοντας τὴν ἀντιπάθειαν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων διὰ τὰς μονάδας, οἱ Ἀρχαῖοι θὰ ἦσαν πολὺ διστακτικοὶ νὰ βασίσουν ἕνα τοιοῦτον βασικὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος ἐπὶ τῆς αὐθαιρεσίας ἐκλογῆς τῶν μονάδων, ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἐφαίνετο ἄλυτον διὰ τὰς δυνατότητάς των.*

## 5. Τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος

*Ἀσφαλῶς αὐτὸς θὰ εἶναι καὶ ὁ λόγος ὑπάρξεως τοῦ τρίτου παραδόξου τοῦ Ζήνωνος, δηλαδὴ τοῦ τόξου [3, 9]. Τὸ παράδοξον αὐτὸ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:*

*«Τόξον κινούμενον εἰς ἑκάστην στιγμὴν εὑρίσκεται εἴτε εἰς στάσιν εἴτε εἰς μὴ στάσιν, δηλαδὴ κινεῖται. Ἐὰν ἡ στιγμὴ εἶναι ἀδιαίρετος, τὸ τόξον δὲν δύναται νὰ κινεῖται, διότι, ἐὰν ἐκινεῖτο, ἡ στιγμὴ αὐτὴ θὰ ἠδύνατο νὰ διαιρεθῇ. Ἀλλὰ ὁ χρόνος συνίσταται ἀπὸ στιγμάς. Καθὼς τὸ τόξον δὲν δύναται νὰ κινεῖται εἰς οἱανδήποτε στιγμήν, δὲν δύναται νὰ κινεῖται καθ' ὅλον τὸν χρόνον. Ἄρα παραμένει πάντοτε ἐν στάσει».*

*Τὸ πρῶτον βῆμα δι' ἐπίλυσιν τοῦ παράδοξου εἶναι νὰ παρουσιάσωμεν ἱκανοποιητικῶς αὐστηρὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος, οὕτως ὥστε δι' οἱουδήποτε τρόπου νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν λέξιν κ ι ν ε ῖ τ α ι εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης φράσεως διὰ τῆς φράσεως ἔ χ ε ι  τ α χ ύ τ η τ α. Ὁ Εὔδοξος ἠδύνατο εὐκόλως νὰ παράσχῃ τὸν ἀπαιτούμενον ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος διὰ μικρᾶς τροποποιήσεως τοῦ περιβοήτου ὁρισμοῦ του τῆς ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς. Ὁπότε δεχόμενοι ὅτι $\alpha, \beta$ εἶναι μήκη καὶ $\alpha', \beta'$ εἶναι χρονικὰ διαστήματα, ὁρίζομεν ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐφαρμόζοντες τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας, ὅτι:*

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta' \Leftrightarrow \alpha : \beta = \alpha' : \beta' \qquad (4)$$

*Καὶ πάλιν ὑπάρχει ἱκανοποιητικὴ μαρτυρία ὅτι ὁ Εὔδοξος ἐχρησιμοποίει τὴν σχέσιν αὐτὴν εἰς καταστάσεις ὅπου δύο μεγέθη ἀνῆκον εἰς ἓν εἶδος καὶ τὰ ἄλλα δύο εἰς ἕτερον εἶδος. Τοιαύτη ἀπόδειξις ὑπάρχει εἰς τὸ βιβλίον XII τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου $\alpha$, $\beta$ εἶναι ὄγκοι καὶ $\alpha'$, $\beta'$ εἶναι ἐπιφάνειαι. Πράγματι εἰς τὸν περίφημον ὁρισμόν του παραλείπει σαφῶς τὴν λέξιν ὁ μ ο γ ε ν ῶ ν, τὴν ὁποίαν δὲν θὰ ἐχρησιμοποίει ἐὰν ὅλα τὰ μεγέθη δὲν ἦσαν τοῦ αὐτοῦ εἴδους.*

*Οὕτω δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ Εὔδοξος θὰ ἠδύνατο νὰ δώσῃ τὸν αὐστηρὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος, ἂν καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν αὐτὸ τὸ* *συμπέρασμα, δεδομένου ὅτι δὲν διετηρήθησαν μέχρις ἡμῶν γραπτὰ τοῦ Εὐδόξου. Τὸ μόνον ποὺ διαθέτομεν εἶναι τὰ ὡραῖα ἀποσπάσματα ἀπὸ τὰ βιβλία V, X καὶ XII τοῦ Εὐκλείδου. 'Αλλὰ δύναταί τις νὰ σκεφθῇ ὡς ἑξῆς: Δεδομένου τοῦ περιβάλλοντος τοῦ Εὐδόξου, δεδομένων τῶν προβλημάτων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, δεδομένου τοῦ περιφήμου ὁρισμοῦ του τῆς ἰσοδυναμίας, καὶ δεδομένου ὅτι πόσον εὐκόλως ἐπιλύει ἀμφότερα τὰ προβλήματα ὁρισμοῦ τῶν λόγων τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητος καὶ δεδομένου ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Εὐδόξου τῶν ἀναλογιῶν ἦτο γνωστὴ ὡς τὸ ἀποκορύφωμα τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, καθίσταται ἀκαταμάχητον τὸ συμπέρασμα ὅτι ὤφειλε νὰ εἶχε προσπαθήσει νὰ διατυπώσῃ ἀμφοτέρας τὰς ἀρχάς;*

*Δύναταί τις ἑπομένως νὰ ὑποθέσῃ τὰς πραγματικὰς λέξεις καὶ φράσεις τὰς ὁποίας θὰ εἶχε χρησιμοποιήσει:*

*(α) λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις (ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ὑπάρχει ὡς ὁρισμὸς 3 τοῦ βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου).*

*(β) Τάχος ἐστὶ δύο μεγεθῶν, πρῶτον μὲν τοῦ μήκους δεύτερον δὲ τοῦ χρόνου, ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις (ὁρισμὸς συμφωνῶν μὲ τὸν προηγούμενον καὶ ὡς πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λέξεων).*

*Δυνάμεθα περαιτέρω νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τοὺς ὁρισμοὺς (α) καὶ (β) παρέδωσεν εἰς τὸν Εὐκλείδην. Καθὼς δὲ ὁ Εὐκλείδης προετοίμαζε τὰς σημειώσεις του διδασκαλίας ἐπὶ τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν, ἡ καθαρῶς σχολαστικὴ δομή του, τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν θεμάτων κατὰ εἰδικότητα, τὸν ἠνάγκασε νὰ ψαλιδίσῃ τὸν ὁρισμὸν (β) καὶ νὰ τὸν παραπέμψῃ μὲ διαβιβαστικὸν ἔγγραφον εἰς τὸ τμῆμα ἀστρονομίας, μὲ τὸ ὁποῖον ἐσχετίζετο ὁ ὁρισμὸς αὐτός. Καὶ ἀσφαλῶς ὁ πρόεδρος τοῦ τμήματος ἀστρονομίας, ὅπως ἀκριβῶς οἱοσδήποτε σύγχρονος πολυάσχολος καὶ εὐσυνείδητος πειραματιστής, θὰ τὸν ἔρριξε εἰς τὸν κάλαθον τῶν ἀχρήστων παπύρων. Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ πρότασις αὐτὴ ἀπεκλείσθη ἀπὸ τὸ πρόγραμμα σπουδῶν τοῦ Μουσείου καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐλησμονήθη, καὶ πολὺ ἀργότερον τὰ πρωτότυπα χειρόγραφα ἐκάησαν καὶ ἑπομένως ἀπωλέσθησαν ἀνεπανορθώτως. Ἢ ἴσως ὄχι ἀνεπανορθώτως...*

*Σ υ μ π έ ρ α σ μ α: Νὰ μὴν ἐμπιστεύεται κανεὶς τὴν διαφύλαξιν τῶν ἐρευνῶν του εἰς ἱδρύματα ἐρευνῶν ἀνήκοντα εἰς τὸ Κράτος, ἀλλὰ νὰ τὰ ἐμπιστεύεται εἰς σημαντικὸν ἀριθμὸν ἰσχυρογνωμόνων ἀκαδημαϊκῶν μελετητῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ τὶς προσωπικές του προκαταλήψεις καὶ δοξασίες διὰ τὸ τί εἶναι σημαντικὸν ἢ ὄχι. Οὐδέποτε πρέπει κανεὶς νὰ ἐμπιστεύεται γνώσεις περιεχομένας εἰς εὐρυτάτας πραγματείας καὶ βιβλία τοῦ συνόλου τῶν μαθηματικῶν ἢ καὶ ἄλλων ἐπιστημῶν, ὅπως εἰς τὸ συγκρότημα Bourbaki, ἀλλὰ πρέπει νὰ διατηρῇ μετὰ μεγάλης προσοχῆς τὰ πρωτότυπα ἄρθρα, εἰδικῶς δὲ τὰς συλλογὰς τῶν ἄρθρων μεγάλων μαθηματικῶν.*

*Συνεχίζοντες κατὰ τὴν αὐτὴν διαδικασίαν εἶναι δυνατὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ Εὔδοξος θὰ ἠδύνατο νὰ συμπληρώσῃ τὴν λύσιν ὅλων τῶν τεσσάρων παραδόξων τοῦ Ζήνωνος δι' ἐφαρμογῶν τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσοδυναμίας, δι' ἀποδείξεων ἐκτάσεως μιᾶς γραμμῆς, τὰ δύο πρῶτα μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀρχῆς τῶν λόγων καὶ τὰ δύο τελευταῖα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητος. Ἐν τούτοις ὅμως, ἐξετάζοντες τὸ θεώρημα αὐτὸ εἰς τὸ βιβλίον V τοῦ Εὐκλείδου, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐλησμόνησε νὰ καθορίσῃ τὸν λόγον δύο λόγων, ὁρισμὸν ἀπαραίτητον διὰ τὴν ἄλγεβραν. Καὶ τοῦτο διότι, ἐνῷ ἦτο ἀναγκαῖος διὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ λόγου τῶν ταχυτήτων, ἦτο ἄχρηστος διὰ τὴν γεωμετρίαν, περιοχὴν τοῦ ἐνδιαφέροντος τοῦ Εὐκλείδου.*

*Ἐξ ἄλλου εἶναι δυνατὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ἠδύνατο νὰ ὁρίσῃ τὸν λόγον δύο λόγων, διότι ἔκαμνε τοιαύτην ἀνάμιξιν τῆς σειρᾶς τῶν προτάσεων καὶ θεωρημάτων, ὥστε ἦτο ἀδύνατον νὰ προκύψῃ εὐκόλως ἡ σχέσις. Καὶ ἐν τέλει ἀνακαλύπτομεν τὴν αἰτίαν αὐτῆς τῆς περιπλοκῆς, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἄλλη, εἰμὴ μόνον ὁ Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς τὸ βιβλίον VII, πρότασις 2, ὅπου χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Τὸν ἀλγόριθμον αὐτόν, ὁ ὁποῖος εἶναι πιθανὸν ὅτι ἀπετέλεσε προσωπικὴν ἐρευνητικὴν ἐργασίαν τοῦ ἰδίου τοῦ Εὐκλείδου, ὡς σπουδαστοῦ, προσεπάθησε νὰ εὕρῃ τὴν κατάλληλον εὐκαιρίαν νὰ τὸν συμπεριλάβῃ εἰς τὰς σημειώσεις τῶν παραδόσεών του, τὸ δυνατὸν ταχύτερον, καὶ τοιουτροτρόπως εὑρίσκει ἀνάλογον περίπτωσιν χρήσεώς του ὡς τὴν πρότασιν 8. Ἀλλὰ ἡ χρῆσις αὐτὴ τῆς προσθετικῆς δομῆς καὶ εἰδικῶς ἡ χρῆσις τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἄχρηστος διὰ τὰ θέματα τοῦ βιβλίου V, εἰς τὴν περιοχὴν αὐτήν, καὶ πάρα πολὺ ἐνωρὶς διὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω, ἡ τοποθέτησίς της εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν καταστρέφει τὸ σύνολον τοῦ προσεκτικοῦ καὶ ἀκριβοῦς προγραμματισμοῦ τοῦ Εὐδόξου. Ἄλλωστε διαφαίνεται ὅτι ὁ Εὐκλείδης δὲν ἀντιλαμβάνεται πλήρως τὴν σημασίαν τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, διότι δὲν κάμνει χρῆσιν της εἰς τὸ βιβλίον VII ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅπου ἡ χρῆσις της θὰ τὸν ἐβοήθει σημαντικῶς διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς σχετικῆς θεωρίας, ἐνῷ ἀντιθέτως καταφεύγει εἰς τὴν ἐπανάληψιν προηγουμένων προτάσεων, ἀχρήστων δι' οἱανδήποτε ἄλλην χρῆσιν. Ἡ κατάληξις εἶναι ὅτι, πρὸς διευθέτησιν αὐτοῦ τοῦ μπλεξίματος, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἐκ νέου συγγραφὴ τοῦ βιβλίου V ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν καταστροφῶν, ὅπως αὐτὴ ἀνεπτύχθη ὑπὸ τοῦ Zeeman [10], ὁπότε καὶ θὰ καθίστατο σαφὴς διὰ πρώτην φορὰν ἡ ἐξαίρετος κομψότης τοῦ φημισμένου ὁρισμοῦ τοῦ Εὐδόξου καὶ ἡ ἐφαρμογή της εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων.*

*Χωρὶς νὰ προχωρήσωμεν εἰς περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς συμβολῆς τῶν ὁρισμῶν τοῦ Εὐδόξου εἰς τὴν σύγχρονον θεωρίαν τῶν συνόλων, ὑποσημειώνομεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ Εὐδόξου καὶ συγχρόνου θεωρίας, ἀναφέροντες ὅτι ἡ σύγχρονος θεωρία εἶναι* *πολλαπλασιαστικῆς μορφῆς, ἐνῶ ἡ τοῦ Εὐδόξου διαιρετικῆς μορφῆς, καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ λεπτὴ διαφορά των. Τοιουτοτρόπως διὰ τὴν σύγχρονον θεωρίαν ἡ συνεταιριστικότης εἶναι φυσικὴ ἰδιότης καὶ ἡ ἐναλλακτικότης ἡ κατ' ἐξαίρεσιν ἰδιότης, ἐνῶ διὰ τὸν Εὔδοξον ἰσχύει τὸ ἀντίστροφον. Πράγματι, οἱ σύγχρονοι καθαροὶ μαθηματικοὶ ἐπιμένουν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι φυσικώτερος τῆς διαιρέσεως, διότι χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν σύνθεσιν χαρτῶν. Παρατηρώντας ὅμως τὴν φύσιν, ὁ ἐφηρμοσμένος μαθηματικὸς συγκρίνει πάντοτε εἴτε μήκη εἴτε ἐπιφάνειες εἴτε θερμοκρασίες εἴτε μουσικὲς νότες, καὶ τοιουτοτρόπως ἰσχυρίζεται, ὅπως ὁ Εὔδοξος, ὅτι πιθανὸν οἱ λόγοι δύο μεγεθῶν, παρὰ τὰ γινόμενά των, εἶναι πιὸ φυσικοί.*

*Εἶναι γνωστὴ ἡ ρῆσις τοῦ μαθηματικοῦ René Thom, τοῦ ἱδρυτοῦ τῆς θεωρίας τῶν καταστροφῶν, λέγοντος: Τὰ μωρὰ ὅλου τοῦ κόσμου ὅταν γεννηθοῦν ψελλίζουν τοὺς αὐτοὺς φθόγγους σὲ ὅλα τὰ γεωγραφικὰ πλάτη καὶ μήκη, καὶ μόνον μὲ τὴν συναναστροφὴν τῶν μητέρων των, ἐν συνεχείᾳ, ἀρχίζουν νὰ ψελλίζουν φθόγγους στὴν μητρική τους γλῶσσα. Ἔτσι καὶ οἱ μαθηματικοὶ οἱ ὁποῖοι ψελλίζουν φωνήματα εἰς τὰ μαθηματικὰ πρέπει νὰ ἀρχίσουν νὰ ἐνδιαφέρωνται καὶ διὰ τὰ φωνήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν μητέρα φύσιν.*

### 6. Συμπεράσματα

*Ἡ ἐργασία αὐτὴ σκοπὸν εἶχε νὰ δείξῃ τὴν ἰδιαιτέραν σημασίαν ποὺ εἶχε διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῆς γνώσεως τοῦ ἀνθρώπου τὸ ἱδρυθὲν Μουσεῖον εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ὡς μέσον ἐχρησιμοποιήθησαν σύγχρονοι ἰδέαι καὶ δοξασίαι περὶ τὴν ὀργάνωσιν ἐρευνητικῶν κέντρων ἀπὸ τὰ σημερινὰ κράτη, αἱ ὁποῖαι προεβλήθησαν εἰς τὸ μακρινὸν παρελθόν, ὅταν ἡ Ἑλληνικὴ σκέψις κυριαρχοῦσε εἰς τὸν τότε γνωστὸν κόσμον.*

*Τὸ παράδειγμα τοῦ Εὐδόξου, τοῦ πρώτου προαγγέλου τῆς ἀλγέβρας καὶ ἡ σύγκρισις τῶν ἰδεῶν του μὲ τὸν μέγαν γεωμέτρην Εὐκλείδην, σκοπὸν εἶχε νὰ καταδείξῃ τὴν διαφορὰν τῶν ἀπόψεων τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ἐπιστήμης καὶ τὴν ἀλληλεπίδρασιν, ἄλλοτε ὠφέλιμον, καὶ ἄλλοτε βλαβεράν, τῶν διαφόρων ἀπόψεων τῆς ἐπιστήμης.*

*Ἐξ ἄλλου, καὶ παρεμπιπτόντως, μνεία ἐγένετο εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ μεγάλαι πραγματεῖαι τῆς ἐπιστήμης, ὅπως τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὴν ἀρχαιότητα, καὶ τοῦ Bourbaki εἰς τὴν σύγχρονον ἐποχήν, ἢ αἱ μεγάλαι συγκεντρωτικαὶ μεταρρυθμίσεις τῶν περιεχομένων σπουδῶν τῶν χωρῶν τῆς γῆς, ἀλλὰ καὶ μεγάλων περιφερειῶν της, εἶναι εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρήσιμοι καὶ ὠφέλιμοι, ἐνῶ εἰς ἄλλας δύνανται νὰ ἐκβιάσουν ὀλεθρίας καταστάσεις. Οὕτως ὁ Εὐκλείδης ἦτο θαυμάσιος εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἐνῶ τὸ Bourbaki ἐξαιρετικὸν εἰς τὴν ἄλγεβραν καὶ τὴν ἀνάλυσιν, ἀλλὰ πτωχὸν εἰς τὴν γεωμετρικὴν σκέψιν καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά.*

*Τέλος, ἡ μεγάλη μορφὴ τοῦ Εὐδόξου, προαγγέλου τῆς συγχρόνου ἀλγέβρας καὶ τῆς θεωρίας συνόλων, ἐσκιαγραφήθη ἁδρῶς, δεικνύουσα ὅτι πολλὰς φορὰς οἱ προτιμήσεις μας καὶ ὁ θαυμασμός μας σὲ ἱστορικὰ πρόσωπα μπορεῖ νὰ περιέχῃ καὶ σημαντικὴν δόσιν ἀδικίας.*

## *ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ*


1. *Εὐκλείδου, «Στοιχεῖα» (μετάφρασις εἰς τὴν Ἀγγλικὴν καὶ σχόλια ὑπὸ τοῦ T. L. Health, Dover Publ. N. York, 1956).*
2. *E. M. Foster, «Alexandria: a history and a guide», Anchor, Doubleday Publ. N. York (1961).*
3. *T. L. Health: «A history of greek mathematics», Oxford at the Clarendon Press, 2nd Edition (1960).*
4. *T. L. Health, «Euclides' elements» Dover Publ. N. York, Vol. 2 σελ. 114 καὶ 120-129 (1956).*
5. *R. Dedekind: «Stetigkeit und irrationalen Zahlen», Brawnscheig (1872).*
6. *M. Dehn, «Über raumgleiche Polyeder», Nachr. Akad. Wiss., Göttingen 1900; ἰδὲ ἐπίσης: Über dem Rauminhalt, Math., Annalen 55, σελ. 465-478 (1902).*
7. *D. Hilbert, «Mathematical problems», Intern. Congr. of Math. 1900, Nachr. Akad. Wiss, Göttingen, σελ. 253-297 (1900).*
8. *O. Neugebauer, «On the Hippopede of Eudoxus», Scripta Mathematica 19, σελ. 225-229 (1953).*
9. *E. T. Bell, «Men of Mathematics», Vol. 1, Penguin, London (1953).*
10. *R. Thom, «Stabilité structurelle et morphogénèse», Benjamin, N. York (1972).*