20. LACASSAGNE A., C. R. Acad. Sci. Paris 195, 1932.
21. » » C. R. Soc. Biol. 114, 1933.
22. » » C. R. Soc. Biol. 115, 1934.
23. » » C. R. Soc. Biol. 126, 1937.
24. » » Bull. Assoc. franc. Etude Cancer. 27, 1938.
25. » » Erg. Vit. u. Horm.-Forsch. 2, 1939.
26. » » C. R. Soc. Biol. 129, 1938.
27. LATHROP C. E. A. and LOEB L., J. Canc. res. 1, 1916.
28. LOEB and GENTHER I. I., Proc. Soc. cxper. Biol. a. Med. (Am) 25, 1928.
29. MURRAY S. W., J. Canc. Res. 12, 1928.
30. » » » Amer. J. Canc. 30, 1937.
31. NELSON, Proc. Soc. exper. Biol. a Med. (Am) 30, 1933.
32. REDING R., Münch. med. Wschr. 86, 1939 I.
33. ROBSON I. M. and BONSER M. G. Nature (Lond) 1938 II.
34. SCHINZINGER, Verh. dtsch. Ges. Chir. 18, 1889.
35. SIMMONET H. et ROBEY M., Le corps Jaune, Paris, 1939.
36. SMITH, Amer. J. Physiol. 103, 1933.
37. SUNTZEFF V. BURNS L. E., MOSKOP M. and LOEB L., Amer. J. Canc. 27, 1936.
38. SYMEONIDIS A., Virch. Arch. 304, 1939.

(Laboratoires d'Anatomie-Pathologique et de Pathologie Experimentale de l'Institut Anticancereux Hellenique Athènes. Directeur: Dr. ALEX. SYMEONIDIS).

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ. — Ὑπολογισμὸς τοῦ προβλήματος τῆς ὀπισθοτομίας — *ὑπὸ Κωνσταντίνου Κλαδᾶ.* Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Δ. Λαμπαδαρίου.

Πρὸς ἐκτέλεσιν ἀποτυπώσεων μειζόνων τμημάτων τῆς γηΐνης ἐπιφανείας προσδιορίζεται ἡ ἐν ὁριζοντίᾳ προβολῇ θέσις σταθερῶν ἐδαφικῶν σημείων μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν (ἑκατοστῶν τινῶν τοῦ μέτρου) διὰ τῆς μεθόδου τῆς τριγωνομετρικῆς δικτυώσεως.

Ἡ πύκνωσις αὐτῶν διὰ παρεμβολῆς νέων τοιούτων σημείων γίνεται διὰ τῶν ἀλληλοτομικῶν μεθόδων.

Μεγάλην σπουδαιότητα διὰ τὰς πρὸς τοῦτο μετρήσεις καὶ τοὺς ὑπολογισμοὺς ἔχει ἡ ἐξοικονόμησις ἔστω καὶ ἐλαχίστου χρόνου δι' ἕκαστον σημεῖον, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλληλοτομικῶς προσδιοριζομένων τριγωνομετρικῶν σημείων ἀνέρχεται ἐτησίως εἰς πολλὰς χιλιάδας.

Κατὰ τὴν Συνεδρίαν τῆς Ἀκαδημίας τῆς 14 Ἀπριλίου 1932 ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ καθηγητοῦ κ. Δ. Λαμπαδαρίου ἰδία αὐτοῦ μέθοδος ὑπολογισμοῦ ἀλληλοτομιῶν διὰ διπλῆς ἀριθμομηχανῆς, ἁπλουστάτη καθ' ἑαυτὴν καὶ παρέχουσα σημαντικὴν οἰκονομίαν χρόνου.

Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ καθηγητοῦ κ. Δ. Λαμπαδαρίου ἔκτοτε ἐφαρμόζεται οὐ μόνον παρ' ἡμῖν ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ ἀλλοδαπῇ.

Κατωτέρω δίδεται νέα ἀναλυτικὴ λύσις ἀλληλοτομικοῦ προσδιορισμοῦ τριγωνομετρικῶν σημείων διὰ τοῦ προβλήματος τῆς ὀπισθοτομίας:

Ὡς γνωστὸν δίδονται: Α (Y_A, X_A) Γ (Y_Γ, X_Γ) Β (Y_B, X_B)

Ζητοῦνται: Μ (Υ, Χ)

Ἐμετρήθησαν: ἐπὶ τοῦ σημείου Μ αἱ γωνίαι α, β

Ἂς ἐκφρασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῶν γωνιῶν α καὶ β συναρτήσει τῶν συντελεστῶν κατευθύνσεως μ_1, μ_2, καὶ μ_3 τῶν διευθύνσεων M_A, M_Γ, M_B

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + \mu_1 \mu_2} \qquad \varepsilon\varphi\beta = \frac{\mu_2 - \mu_3}{1 + \mu_2 \mu_3}$$

Ἀλλὰ $$\mu_1 = \frac{X_A - X}{Y_A - Y} \qquad \mu_2 = \frac{X_\Gamma - X}{Y_\Gamma - Y} \qquad \mu^3 = \frac{X_B - X}{Y_B - Y}$$

Οὕτω προκύπτει τὸ σύστημα:

$$(1) \quad \left(\frac{Y_A}{\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + X_A + X_\Gamma\right) X + \left(\frac{X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{X_A}{\varepsilon\varphi\alpha} + Y_A + Y_\Gamma\right) Y - \frac{Y_A X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + \frac{Y_\Gamma X_A}{\varepsilon\varphi\alpha} - X_A X_\Gamma - Y_A Y_\Gamma = X^2 + Y^2$$

$$(2) \quad \left(\frac{Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} - \frac{Y_B}{\varepsilon\varphi\beta} + X_\Gamma + X_B\right) X + \left(\frac{X_B}{\varepsilon\varphi\beta} - \frac{X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} + Y_\Gamma + Y_B\right) Y - \frac{Y_\Gamma X_B}{\varepsilon\varphi\beta} + \frac{Y_B X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} - X_\Gamma X_B - Y_\Gamma Y_B = X^2 + Y^2$$

Ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει, ὅτι πρόκειται περὶ περιφερειῶν κύκλων.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς σχέσεως 1) εἶνε περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΜΑΓ, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ (Υ, Χ) εἶνε ἡ κορυφὴ τῆς σταθερᾶς γωνίας α, ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾶ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων Μ (Υ, Χ) κινουμένων οὕτως ὥστε ἡ γωνία α νὰ παραμένῃ σταθερά, ἐνῷ αἱ πλευραὶ αὐτῆς θὰ διέρχωνται πάντοτε διὰ τῶν σταθερῶν σημείων Α, Γ.

Ὁμοίως προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις (2) παριστᾶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΜΓΒ περιφερείας.

Τὸ ἕτερον σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων περιφερειῶν θὰ εἶναι τὸ ἐπιλύον τὸ πρόβλημα.

Ἂς τεθῇ εἰς τὰς σχέσεις (1) καὶ (2):

$$\frac{Y_A}{\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + X_A + X_\Gamma = A_o, \ \frac{X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{X_A}{\varepsilon\varphi\alpha} + Y_A + Y_\Gamma = B_o, \ -\frac{Y_A X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + \frac{Y_\Gamma X_A}{\varepsilon\varphi\alpha} - X_A X_\Gamma - Y_A Y_\Gamma = \Gamma_o$$

$$\frac{Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} - \frac{Y_B}{\varepsilon\varphi\beta} + X_\Gamma + X_B = A_1, \ \frac{X_B}{\varepsilon\varphi\beta} - \frac{X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} + Y_\Gamma + Y_B = B_1, \ -\frac{Y_\Gamma X_B}{\varepsilon\varphi\beta} + \frac{Y_B X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} - X_\Gamma X_B - Y_\Gamma Y_B = \Gamma_1$$

τότε τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad Ao\ X + Bo\ Y + \Gamma o = X^2 + Y^2 \\ &(2)\quad A_1\ X + B_1\ Y + \Gamma_1 = X^2 + Y^2 \end{aligned}\right\}$$

πρὸς ἐπίλυσιν τούτου ἂς τεθῇ: $Ao - A_1 = A_2 \quad Bo - B_1 = B_2 \quad \Gamma o - \Gamma_1 = \Gamma_2$

Τελικῶς προκύπτει $X_1 = \dfrac{-B_3 + \sqrt{B_3^2 - 4\,A_3\,\Gamma_3}}{2\,A_3} \qquad X_2 = \dfrac{-B_3 - \sqrt{B_3^2 - 4\,A_2\,\Gamma_3}}{2\,A_3}$

$$Y_1 = \frac{-2\,A_3\,\Gamma_2 - A_2\,B_3 + A_2\sqrt{B_3^2 - 4\,A_3\,\Gamma_3}}{2\,A_3\,B_2} \text{ ἢ } Y_1 = -\frac{\Gamma_2 + A_2\,X_1}{B_2}$$

$$Y_2 = \frac{-2\,A_3\,\Gamma_2 - A_2\,B_3 - A_2\sqrt{B_3^2 - 4\,A^3\,\Gamma_3}}{2\,A_3\,B_2} \text{ ἢ } Y_2 = -\frac{\Gamma_2 + A_2\,X_2}{B_2}$$

$$\text{ἔνθα} \left\{\begin{aligned} &B_2^2 + A_2^2 = A_3 \\ &Bo\,A_2\,B_2 + 2\,\Gamma_2\,A_2 - B_2^2\,Ao = B_3 \\ &Bo\,\Gamma_2\,B_2 - \Gamma o\,B_2^2 + \Gamma_2^2 = \Gamma_3 \end{aligned}\right.$$

Οὕτως εὑρέθησαν διὰ τὸ σημεῖον Μ (Υ, Χ) δύο τιμαὶ αἱ Y_1, X_1 καὶ Y_2, X_2 ἐξ ὧν ἡ μία πρέπει προφανῶς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὰς γνωστὰς συντεταγμένας Y_Γ, X_Γ τοῦ κοινοῦ σημείου Γ τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν.

Σημαντικὴ ἁπλούστευσις τῶν ὑπολογισμῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ παραλλήλου μεταθέσεως τῶν ἀξόνων οὕτως ὥστε ἡ ἀρχὴ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ γνωστὸν σημεῖον Γ (Y_Γ, X_Γ) τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν.

Τότε αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Α, Γ, Β εἰς τὸ νέον σύστημα ἀξόνων θὰ εἶναι Α ($Y_A - Y_\Gamma$, $X_A - X_\Gamma$), Γ (ο, ο) καὶ Β ($Y_B - Y_\Gamma$, $X_B - X_\Gamma$).

Τὸ δὲ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) κατόπιν μηδενισμοῦ τῶν συντεταγμένων τοῦ Γ γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \left(\frac{Y_A - Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + X_A - X_\Gamma\right) X + \left(-\frac{X_A - X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + Y_A - Y_\Gamma\right) Y = X^2 + Y^2 \\ &(2)\quad \left(\frac{Y_B - Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} + X_B - X_\Gamma\right) X + \left(\frac{X_B - X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} + Y_B - Y_\Gamma\right) Y = X^2 + Y^2 \end{aligned}\right\}$$

Θέτομεν:

$$\frac{Y_A - Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + X_A - X_\Gamma = Ao \qquad -\frac{X_A - X_\Gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} + Y_A - Y_\Gamma = Bo$$

$$-\frac{Y_B - Y_\Gamma}{\varepsilon\varphi\beta} + X_B - X_\Gamma = A_1 \qquad \frac{X_B - X_P}{\varepsilon\varphi\beta} + Y_B - Y_\Gamma = B^1$$

Οὕτως εὑρίσκεται τὸ ἰσοδύναμον σύστημα ἐξ᾿ οὗ δι᾿ ἐπιλύσεως εὑρίσκονται αἱ συντεταγμέναι Υ καὶ Χ.

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad Ao\ X + Bo\ Y = X^2 + Y^2 \\ &(3)\quad (Ao - A_1)\ X + (Bo - B_1)\ Y = o \end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει: $X = -\dfrac{Bo - B_1}{Ao - A_1} Y = -\ CY$ ἔνθα $C = \dfrac{Bo - B_1}{Ao - A_1}$

καὶ $X^2 = C^2\ Y^2$ ἀντικαθιστῶ στὴν (1)

$- C\ Ao\ Y + Bo\ Y = C^2\ Y^2 + Y^2$ λύοντες ὡς πρὸ Y εὑρίσκομεν

$$Yo = \frac{Bo - C\ Ao}{1 + C_2} \qquad Xo = - G\ Yo$$

Αἱ εὑρεθεῖσαι συντεταγμέναι Y, X σύμπίπτουν μὲ τὰς συντεταγμένας Y_2, X_2 ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα ἀξόνων.

Αἱ ἕτεραι δύο συντεταγμέναι Y_1, X_1 ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα μηδενίζονται ἀμφότεραι εἰς τὸ νέον, διότι $\Gamma_3 = o$, καὶ $\Gamma_2 = o$.

Ἐκ τῶν συντεταγμένων Yo, Xo τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα προκύπτουν αἱ τελικαὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M (Y, X) ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα διὰ τῶν τύπων:

$$Y_M = Y_o + Y_\Gamma$$
$$X_M = X_o + X_\Gamma$$

Ἔλεγχος. Πρὸς ἔλεγχον τῶν ὑπολογισμῶν ἐφαρμόζονται οἱ τύποι:

$$Bo - CAo = B_1 - CA_1 \text{ καὶ } \varepsilon\varphi\ (\alpha + \beta) = \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 + \mu_1\ \mu_3}$$

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ὡς γνωστὸν καθίσταται ἀπροσδιόριστον, ὅταν οἱ δύο κύκλοι ΜΑΓ καὶ ΜΓΒ πλησιάζουν πρὸς τὸν ἐπικίνδυνον κύκλον (τὸν διερχόμενον διὰ τῶν σημείων Α, Γ, Β), ὁπότε τὰ μήκη ΜΑ, ΜΓ, ΜΒ διαφέρουν πολὺ μεταξύ των, αἱ δὲ γωνίαι α καὶ β γίνονται πολὺ ὀξεῖαι ἢ πολὺ ἀμβλεῖαι.

Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ὅπως οἱ δύο κύκλοι συμπίπτουν εἶναι

$$Ao = A_1 \quad \text{καὶ} \quad Bo = B_1 \qquad (4)$$

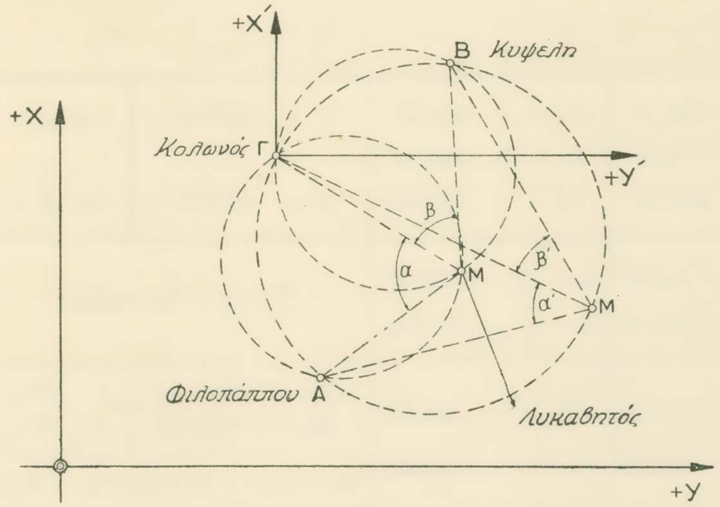
Κατόπιν λύσεως τοῦ συστήματος τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῶν σχέσεων (4) εὑρίσκονται αἱ τιμαὶ α΄ καὶ β΄, τῶν γωνιῶν α καὶ β, αἵτινες καθιστοῦν τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον:

$$\varepsilon\varphi\alpha' = \frac{X'_3\ Y'_1 - X'_1\ Y'_3}{X'^2_3 - X'_1\ X'_3 - Y'^2_3 + Y'_1\ Y'_3} \qquad \text{ἔνθα} \begin{cases} Y_A - Y_\Gamma = Y'_1 & X_A - X_\Gamma = X'_1 \\ Y_B - Y_\Gamma = Y'_3 & X_B - X_\Gamma = X'_3 \end{cases}$$

$$\varepsilon\varphi\beta' = \frac{X'_3\ Y'_1 + Y'_3\ X'_1}{X'^2_1 - X'_1\ X'_3 + Y'^2_1 - Y'_3\ Y'_1}$$

Γενικῶς παρατηρητέον, ὅτι ὅταν $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$ τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπικινδύνου κύκλου, ὅταν $\alpha + \beta < \alpha' + \beta'$ τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ ὅταν $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἐπικινδύνου κύκλου.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ πράξει ἐπιδιώκεται, ὅπως αἱ ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ διαφέρουν ὀλίγον μεταξύ των, αἱ δὲ γωνίαι α καὶ β νὰ μὴ εἶναι οὔτε πολὺ ὀξεῖαι οὔτε πολὺ ἀμβλεῖαι, συνάγεται, ὅτι τὰ ἐντὸς τοῦ ἐπικινδύνου κύκλου σημεῖα δίδουν τὰ ἱκανοποιητικώτερα ἀποτελέσματα, ἤτοι τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$.



ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

$Y_A = +\ 4309.35$ $Y_\Gamma = +\ 3745.68$ $Y_B = +\ 6167.92$	$X_A = +\ 3336.47$ $X_\Gamma = +\ 6494.05$ $X_B = +\ 7806.68$	$\alpha = 80.7506$ $\beta = 63.7371$	εφ. $\alpha = 3.205807$ εφ. $\beta = 1.561457$
$Y_A - Y_\Gamma = +\ 563.67$ $Y_B - Y_\Gamma = +\ 2422.24$	$X_A - X_\Gamma = -\ 3157.58$ $X_B - X_\Gamma = +\ 1312.63$	$\frac{Bo - B_1}{Ao - A_1} = C = 0.62494$	
$\frac{Y_A - Y_\Gamma}{\text{εφ. } \alpha} = +\ 175.828$ $X_A - X_\Gamma = -\ 3157.580$	$-\frac{X_A - X_\Gamma}{\text{εφ. } \alpha} = +\ 984\ 955$ $Y_A - Y_\Gamma = +\ 563.670$	$CAo = -\ 1863.416$ $Bo = +\ 1548.625$ $Bo - CAo = +\ 3411.922 = B_1 - CA_1$ (ἔλεγχος)	$C^2 = 0.\ 3905$ $1 + C^2 = 1.\ 3905$
Ἄθρ. $Ao = -2981.752$	Ἄθρ. $Bo = +\ 1548.625$	$\frac{Bo - CAo}{1 + C^2} = Yo = +\ 2453.74$	
$-\frac{Y_B - Y_\Gamma}{\text{εφ. } \beta} = -\ 1551.268$ $X_B - X_\Gamma = +\ 1312.630$	$\frac{X_B - X_\Gamma}{\text{εφ. } \beta} = +\ 840.642$ $Y_B - Y_\Gamma = +\ 2422.240$	$Y_\Gamma = +\ 3745.68$ $Yo + Y_\Gamma = Y_M = +\ 6199.42$	
Ἄθρ. $A_1 = -\ 238.638$	Ἄθρ. $B_1 = +\ 3262.882$	$-\ CYo = Xo = -\ 1533.42$	
$Ao - A_1 = -\ 2743.114$	$Bo - B_1 = -\ 1714.257$	$X_\Gamma = +\ 6494.05$ $Xo + X_\Gamma = X_M = +\ 4960.63$	

Ἔλεγχος εφ. $(\alpha + \beta) = \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 + \mu_1 \mu_3}$ εφ. $(\alpha + \beta) = -\ 1{,}19011$

$$\mu_1 = \frac{X_A - X_M}{Y_A - Y_M} = +\ 0{,}85932 \qquad \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 + \mu_1 \mu_3} = -\ 1.\ 1901$$

$$\mu_3 = \frac{X_B - X_M}{Y_B - Y_M} = -\ 90.3505$$