ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—**Über einige Eigenschaften der Gauss-Heckeschen Summen***, *von H. Ph. Vassiliou*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. E. Landau gibt in seinem Lehrbuch «Verteilung der Primzahlen Bd. 1. s 478-94» mehrere Eigenschaften der Gauss'schen Summen, welche man im Rationalkörper mit Hilfe eines sogenannten Charakters modulo k konstruieren kann. In dieser Note verallgemeinern wir einige dieser Eigenschaften für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper auf Grund des Begriffes, den E. Hecke 1919 aufgestellt hat.

2. Wenn k ein endlicher Körper n^{ten} Grades, $\mathbf{d}$ seine Differente und ω eine Zahl dieses Körpers, $\omega\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, ist, so hängt die Summe

$$C(\omega,\chi) = \sum_{\mu \ (\mathrm{mod.}\ \mathbf{a})} \chi(\mu) \exp \{ 2\pi i \ S(\mu\omega) \} \qquad (1)$$

[1]

wobei χ einen Charakter mod. $\mathbf{a}$ bedeutet und μ ein vollständiges Restsystem mod. $\mathbf{a}$ durchläuft, nur von ω ab, nicht aber von der speziellen Wahl dieses Restsystems.

Ist $\varkappa$ ganz, zu $\mathbf{a}$ teilerfremd, so können wir in (1) μ durch $\mu\varkappa$ ersetzen und erhalten,

$$C(\omega,\chi) = \sum_{\mu \ (\mathrm{mod.}\ \mathbf{a})} \chi(\varkappa\mu) \exp \{ 2\pi i \ S(\varkappa\mu\omega) \} = \chi(\varkappa) \sum_{\mu \ (\mathrm{mod.}\ \mathbf{a})} \chi(\mu) \exp \{ 2\pi i \ S(\mu . \varkappa\omega) \} =$$

$= \chi(\varkappa)\ C(\omega\varkappa, \chi)$, d. h $C(\varkappa\omega, \chi) = \bar{\chi}(\varkappa)\ C(\omega, \chi)$ wo χ den zu χ konjugierten Charakter darstellt. Aus $(\varkappa_1, \mathbf{a}) = 1$, $(\varkappa_2, \mathbf{a}) = 1$ ergibt sich ferner $C(\varkappa_1\omega, \chi) = C(\varkappa_2\omega, \chi)$, wenn es eine Zahl ε gibt, dass $\varkappa_1 \equiv \varepsilon\varkappa_2$ (mod. $\mathbf{a}$) und $\chi(\varepsilon) = 1$ ist.

Die Charaktere mod. $\mathbf{a}$ teilt man in zwei Klassen: χ nennt man *eigentlich* wenn es kein Ideal $\mathbf{a}'$, Teiler von $\mathbf{a}$, gibt, dass für $\mu \equiv \mu'$ (mod. $\mathbf{a}'$) und $(\mu, \mathbf{a}) = 1$ $(\mu', \mathbf{a}) = 1$, $\chi(\mu) = \chi(\mu')$ ist. Kommt letztes nur für das Ideal $\mathbf{a}'$ vor, so sagt man χ sei ein eigentlicher Charakter mod. $\mathbf{a}$ bezüglich $\mathbf{a}'$. Im entgegengesetzten Falle nennt man ihn *uneigentlich.*

3. Nun hat man folgenden Satz:

«*Ist* $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \neq 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}\mathbf{b}'$, $\mathbf{a} = \mathbf{e}\mathbf{a}'$ $(\mathbf{b}', \mathbf{a}') = 1$, $\mathbf{a}' = \mathbf{p} =$ *Primideal, so gibt es einen uneigentlichen Charakter* χ, *so dass* $C(\omega, \chi) \neq 0$ *ist; dagegen für jeden eigentlichen Charakter* χ *bezüglich* $\mathbf{a}'$, *und jedes* $\mathbf{a}'$, *ist* $C(\omega, \chi) = 0$».

* Φ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ.—Περὶ ἰδιοτήτων τινῶν τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Gauss-Hecke.

[1] Wir schreiben exp x statt e^x.

Zum Beweise stellen wir uns den Hilfssatz voran:

«*Ist* $\mathbf{b} = \mathbf{eb}'$, $\mathbf{a} = \mathbf{ea}'$, $\mathbf{a}'$ *beliebig*, χ *ein uneigentlicher Charakter mod.* $\mathbf{a}$, *dass für* $\mu \equiv \mu'$ *(mod.* $\mathbf{a}'$*) und* $(\mu, \mathbf{a}) = 1$, $(\mu', \mathbf{a}) = 1$, $\chi(\mu) = \chi(\mu')$ *ist, so ist*

$$C(\omega, \chi) = N(\mathbf{e}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p})}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p}^{(r)})}\right) C(\omega, \chi_1) \qquad (2)$$

wobei $C(\omega, \chi_1) = \sum\limits_{\xi \, (\text{mod. } \mathbf{a}')} \chi_1(\xi) \exp \{ 2\pi i \, S(\xi\omega) \}$ *ist, unter* $\mathbf{p} \ldots \mathbf{p}^{(r)}$ *die verschiedenen Primideale verstanden die in* $\mathbf{a}$, *aber nicht in* $\mathbf{a}'$, *aufgehen und* χ_1 *einen Charakter mod.* $\mathbf{a}'$».

Es sei eine beliebige der zu $\mathbf{a}'$ teilerfremden Restklassen mod. $\mathbf{a}'$, ξ eine ihr zugehörige Zahl. Für jedes zum Ideale $\mathbf{f}$ teilerfremdes μ, gibt es genau eine Zahl (mod. $\mathbf{a}'\mathbf{f}$) die den Kongruenzen $x \equiv \xi$ (mod. $\mathbf{a}'$), $x \equiv \mu$ (mod. $\mathbf{f}$) erfüllt, wobei $\mathbf{f}$ das Produkt sämtlicher Primidealen, mit höchstem Exponenten, welche in $\mathbf{a}$ aber nicht in $\mathbf{a}'$ aufgehen, darstellt. Solche Primideale sind sicher vorhanden im Falle, dass eine Restklasse, die zu $\mathbf{a}$ nicht relativ prim ist, in einer primen Restklasse mod. $\mathbf{a}'$ enthalten ist. Infolgedessen gibt es für alle zu $\mathbf{f}$ teilerfremden Zahlen μ, dessen Anzahl, $\varphi(\mathbf{f})$ ist, $\varphi(\mathbf{f})$ (mod. $\mathbf{a}'\mathbf{f}$), also $\varphi(\mathbf{f})\, N(\mathbf{m}) = N(\mathbf{mf}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p})}\right) \cdot \ldots \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p}^{(r)})}\right)$ (mod. $\mathbf{a}$) inkongruente Zahlen, die alle kongruent mod. $\mathbf{a}'$ sind und wobei $\mathbf{m}$ das Quotient $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{fa}'}$ darstellt. Man könnte anstatt $\mathbf{f}$ das Product aller $\mathbf{p}$ in erster Potenz berücksichtigen. Schliesslich sieht man, dass jede zu $\mathbf{a}'$ teilerfremde Restklasse mod. $\mathbf{a}'$ dieselbe Anzahl von zu $\mathbf{a}$ teilerfremden Restklassen mod. $\mathbf{a}$ enthält.

Wenn jeder Primfaktor von $\mathbf{a}$ auch in $\mathbf{a}'$ aufgeht, reduziert sich (2) in

$$C(\omega, \chi) = N(\mathbf{e}) \sum_{\xi \, (\text{mod. } \mathbf{a}')} \chi_1(\xi) \exp \{ 2\pi i \, S(\xi\omega) \} = N(\mathbf{e})\, C(\omega, \chi_1).$$

4. Nun sei zunächst $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$. Dann nehmen wir den Hauptcharakter mod. $\mathbf{a}$, der uneigentlich ist und wir haben $C(\omega) = \sum\limits_{\mu \, (\text{mod. } \mathbf{a})} \chi(\mu) = \varphi(\mathbf{a}) \neq 0$.

Andernfalls nehmen wir einen eigentlichen Charakter χ_1 mod. $\mathbf{p}$ und definieren χ wie folgt: $\chi(\alpha) = \chi_1(\alpha)$ für alle zu $\mathbf{a}$ teilerfremde Zahlen α, $\chi(\alpha) = 0$ für alle zu $\mathbf{a}$ nicht teilerfremde α. χ ist ein Charakter mod. $\mathbf{a}$. Denn es ist I) für $\alpha \equiv \alpha'$ (mod. $\mathbf{a}$) auch $\alpha \equiv \alpha'$ (mod. $\mathbf{p}$), folglich $\chi(\alpha) = \chi(\alpha')$, II) $\chi(1) = \chi_1(1) = 1 \neq 0$ und III) $\chi(\alpha\alpha') = \chi_1(\alpha\alpha') = \chi_1(\alpha)\chi_1(\alpha') = \chi(\alpha)\chi(\alpha')$, da sofern

α, α' relativ prim zu $\mathbf{a}$ auch relativ prim zu $\mathbf{p}$ sind. Dieser Charakter χ ist ein uneigentlicher Charakter mod. $\mathbf{a}$. Nach (2) bleibt dann zum Beweise des Nichtverschwindens der Summe $C(\omega)$ zu zeigen, dass

$\sum\limits_{\xi \,(\mathrm{mod.}\ \mathbf{a}')} \chi_1(\xi) \exp\{2\pi i\, S(\xi\omega)\} \neq 0$, wobei $\mathbf{p}$ zu $\mathbf{b}'$ relativ prim ist. Es ist

$$C(\omega,\chi)\cdot C(\omega,\overline{\chi}) = \sum_{\mu} \chi(\mu) \exp\{2\pi i\, S(\mu\omega)\} \sum_{\xi} \overline{\chi}(\xi) \exp\{-2\pi i\, S(\xi\omega)\} \quad (3)$$

und wenn ϱ so gewählt wird, dass $\varrho\xi \equiv 1$ (mod. $\mathbf{p}$) für $(\xi, \mathbf{p}) = 1$, so ist die rechte Seite von (3) gleich mit $\sum\limits_{\mu,\,\xi} \chi(\mu\varrho) \exp\{2\pi i\, S[(\mu-\xi)\omega]\} =$

$$= \sum_{\xi} (\chi\varrho) \sum_{\mu} \exp\{2\pi i\, S[(1-\varrho)\mu\omega]\},$$ wobei ξ durch $\mu\xi$ ersetzt ist.

Aus $\sum\limits_{\mu} \exp\{2\pi i\, S[\mu(1-\varrho)\omega]\} = N(\mathbf{p}) - 1$, falls $\varrho \equiv 1)$ (mod. $\mathbf{p}$) und $= -1$, falls $\varrho \not\equiv 1$ (mod. $\mathbf{p}$) ist, hat man schliesslich $C(\omega,\chi)\cdot C(\omega,\overline{\chi}) = |C(\omega,\chi)|^2 =$

$$= N(\mathbf{p}) - 1 - \sum_{\xi} \chi(\varrho) = N(\mathbf{p}) \neq 0.$$

5. Für den zweiten Teil des Satzes nehmen wir an χ sei eigentlich mod. $\mathbf{a}'$. Wird nun für alle ganze Zahlen, die $\equiv 1$ mod. $\mathbf{a}'$ und zu $\mathbf{a}$ teilerfremd sind, χ immer denselben Wert haben, so würde dasselbe für die Zahlen irgendeiner anderen Restklasse mod. $\mathbf{a}'$, die zu $\mathbf{a}$ teilerfremd sind, gelten und χ, gegen die Annahme, nicht eigentlich mod. $\mathbf{a}'$ sein. Es gibt also im Körper eine Zahl ε, $(\varepsilon, \mathbf{a}) = 1$, welche $\equiv 1$ (mod. $\mathbf{a}'$) aber $\not\equiv 1$ (mod. $\mathbf{a}$), so dass $\chi(\varepsilon) \neq 1$ ist. Die Summe $C(\omega, \chi)$ lässt sich daher folgendermassen schreiben:

$C(\omega) = \sum\limits_{\nu} \exp\{2\pi i\, S(\nu\omega)\} \sum\limits_{\varrho} \chi(\varrho)$, wobei ϱ ein Repräsentantensystem von zu $\mathbf{a}$ teilerfremden Restklassen mod. $\mathbf{a}$ durchläuft, welche aus lauter kongruenten Zahlen mod. $\mathbf{a}'$ bestehen; dabei ist die erste Summe über alle zu $\mathbf{a}'$ teilerfremden Restklassen zu summieren. Die zweite Summe ist aber immer gleich Null; denn mit ϱ durchläuft auch $\varepsilon\varrho$ ein ebensolches Repr. System, das derselben Restklasse mod. $\mathbf{a}'$ angehört wie das erstere. Daraus folgt

$$\sum_{\varrho} \chi(\varrho) = \sum_{\varrho} \chi(\varrho\varepsilon) \text{ d.h } (\chi(\varepsilon) - 1) \sum_{\varrho} \chi(\varrho) = 0, \text{ oder da } \chi(\varepsilon) \neq 1, \sum_{\varrho} \chi(\varrho) = 0.$$

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ E. Landau ἐξετάζει εἰς τὸ σύγγραμμα αὐτοῦ Verteilung der Primzahlen, τόμ. 1, σ. 478 - 94 ἰδιότητάς τινας τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Gauss εἰς τὸ σῶμα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κατὰ τὸ ἔτος 1919 γενομένης γενικεύσεως τῆς ἐννοίας τῶν ἀθροισμάτων τούτων ὑπὸ τοῦ E. Hecke, ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει ἐξετάζω παρομοίας ἰδιότητας τῶν περὶ οὗ ὁ λόγος ἀθροισμάτων, τῶν σχηματιζομένων τῇ βοηθείᾳ χαρακτῆρός τινος εἰς τυχὸν ἀλγεβρικὸν σῶμα ἀποδεικνύων τὰς ἑπομένας δύο προτάσεις:

I. «*Ἐὰν τὰ ἰδεώδη* $\mathbf{b}$ *καὶ* $\mathbf{a}$ *ἑνὸς πεπερασμένου ἀλγεβρικοῦ σώματος* k *δὲν εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα,* $\mathbf{e}$ *δὲ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, ὥστε τὸ πηλίκον* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$ *νὰ εἶναι πρῶτον ἰδεῶδες, τότε ὑπάρχει ἰδιάζων (uneigentlich) τις χαρακτὴρ* χ, *ὥστε τὸ ἄθροισμα* $C(\omega, \chi)$ *νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός· τοὐναντίον δι' ἕκαστον κυρίως (eingentich) χαρακτῆρα* χ *ὡς πρὸς τὸ* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$ *καὶ δι' ἕκαστον ἰδεῶδες* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$ *(ὄχι κατ' ἀνάγκην πρῶτον) εἶναι* $C(\omega, \chi) = o$».

II. «*Ἐὰν* $\mathbf{e}$ *εἶναι κοινός τις διαιρέτης τῶν ἰδεωδῶν* $\mathbf{b}$ *καὶ* $\mathbf{a}$, *τὸ δὲ* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$ *τυχὸν ἰδεῶδες,* χ *ἰδιάζων (uneigentlich) τις χαρακτὴρ ὡς πρὸς μέτρον* $\mathbf{a}$, *ὥστε διὰ* $\mu \equiv \mu'$ *(μετρ.* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$*) καὶ* $(\mu, \mathbf{a}) = 1$, $(\mu', \mathbf{a}) = 1$, *νὰ εἶναι* $\chi(\mu) = \chi(\mu')$, *τότε ἰσχύει ἡ σχέσις* $C(\omega, \chi) = N(\mathbf{e}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p})}\right) \cdot \cdot \cdot \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{p}^{(r)})}\right) C(\omega, \chi_1)$ *ὅπου τὰ μὲν* $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}^{(r)}$ *παριστάνουν τὰ διάφορα πρῶτα ἰδεώδη, τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὸ* $\mathbf{a}$, *ὄχι ὅμως εἰς τὸ* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$, *τὸ δὲ* χ_1 *παριστάνει χαρακτῆρά τινα ὡς πρὸς μέτρον* $\mathbf{a}:\mathbf{e}$».

K. A. Kς