Voraussetzung hierfür ist: tiefe Bodenbearbeitung (20-25 cm), tiefe Unterbringung der Phosphorsäure-Düngung (80-kg/ha) im Herbst (auf kaliarmen Böden: eine Phosphorsäure-Kali-Düngung), ausgewähltes Saatgut, frühreife Sorten, Stickstoff-Düngung (150 kg/ha Kalksalpeter) im Frühjahr in 2 Gaben in Verbindung mit 1 maligem Eggen und Hacken. Unsere seit 1931 in ganz Griechenland ausgeführten Düngungs- und Hackversuche haben ausgezeichnete Resultate ergeben.

So erzielten wir 1934-35 in 19 Bezirken Griechenlands 13.2-43.4 dz/ha Korn, während der in der landesüblichen Art angebaute Weizen nur 3.3-19.9 dz/ha erbrachte. Mit dem italienischen Bearbeitungssystem «Del Pelo Pardi» erreichten wir in Attika sogar 46.1 dz/ha.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. — Remarques sur les lignes asymptotiques et sur les lignes de courbure*, *par* ***Dragoslav Mitrinovitch***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

I.— L'équation différentielle des projections des lignes asymptotiques sur le plan xoy de la surface

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

se présente sous la forme

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r = 0, \tag{2}$$

r, s, t désignant les valeurs des dérivées secondes de z par rapport à x et y.

Nous nous proposons de traiter le problème: *déterminer des surfaces ayant pour les lignes asymptotiques les lignes dont les projections sur le plan* xoy *se coupent sous l'angle droit.*

En supposant que

$$t \neq 0,$$

on a, en vertu de l'équation (2),

$$r + t = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

comme l'équation différentielle du problème signalé.

L'équation (3), connue sous le nom d'équation de Laplace, nous donne la possibilité de l'interprétation suivante.

* DRAGOSLAV MITRINOVITCH.— Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν καὶ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

Grâce au fait que la partie réelle et le coefficient de i d'une fonction analytique donnée

$$f(u) = P(x, y) + i\, Q(x, y), \qquad (u = x + y\, i),$$

satisfont identiquement à l'équation de Laplace, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0,$$

on peut énoncer la proposition suivante:

Soit donnée une surface réelle

$$z = F(x, y); \tag{4}$$

pour que les deux systèmes de projections des lignes asymptotiques, tracées sur cette surface, soient leurs propres trajectoires orthogonales, il faut et il suffit que $F(x, y)$ *représente soit la partie réelle, soit le coefficient de* i *d'une fonction analytique* $f(x + y\, i)$.

Or, nous sommes en mesure, non seulement d'examiner directement sur l'équation d'une surface donnée (4) si les projections de leurs lignes asymptotiques se coupent à l'angle droit, mais aussi de former une infinité de surfaces ayant telle propriété. En effet, en prenant une fonction arbitraire f de la variable complexe

$$u = x + y\, i,$$

et en séparant cette fonction en sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$f(u) = P(x, y) + i\, Q(x, y),$$

on est conduit aux surfaces en question

$$z = P(x, y),$$

$$z = Q(x, y).$$

1er exemple. – On constate d'après ce qui précède, que sur la surface

$$z = \sin x \,\mathrm{ch}\, y$$

se trouvent des lignes asymptotiques dont les projections sur le plan xoy se rencontrent à l'angle droit; que sur la surface

$$z = x^2 - y^3 + \sin x$$

ne se trouve aucune des lignes asymptotiques ayant une telle propriété.

2me exemple. — En partant de la fonction analytique

$$f(u) = e^u + \frac{1}{u},$$

on peut affirmer que les surfaces

$$z = e^x \cos y + \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$z = e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

ont des lignes asymptotiques dont les projections dans le plan x o y se coupent sous l'angle droit.

Bien entendu, le même raisonnement s'applique aussi bien aux surfaces de la forme

$$x = \Phi_1 (y, z),$$

$$y = \Phi_2 (x, z),$$

où, dans le premier cas, il faut considérer les projections des lignes asymptotiques sur le plan y o z; dans le second cas, sur le plan x o z.

II.— Proposons-nous maintenant *de trouver les surfaces dont les lignes de courbure se projettent dans le plan* x o y *suivant deux courbes qui sont leurs propres trajectoires orthogonales.*

L'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan x o y de la surface

$$z = F(x, y)$$

est de la forme

$$\left[p q t - (1 + q^2) s \right] y'^2 + \left[(1 + p^2) t - (1 + q^2) r \right] y' -$$
$$- \left[p q r - (1 + p^2) s \right] = 0,$$

où p, q, r, s, t ont les significations habituelles:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

L'équation différentielle du problème proposé est

$$(5) \qquad p q (r - t) - s (p^2 - q^2) = 0.$$

L'équation (5) s'écrit

$$q (p r + q s) - p (p s + q t) = 0$$

ou bien

$$\frac{\Delta (z. u)}{\Delta (x, y)} = 0, \qquad (u = p^2 + q^2),$$

ce qui prouve qu'il existe entre z et u une relation de la forme

$$p^2+q^2=\frac{1}{f'^2(z)}, \qquad \left(f'=\frac{df}{dz}\right),$$

où f(z) est une fonction arbitraire de z. Cette dernière équation représente une intégrale intermédiaire de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (5), et peut s'écrire sous la forme de l'équation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=1,$$

dont l'intégrale complète est

$$f(z)=Cx+y\sqrt{1-C^2}+C_1,$$

où C et C_1 désignent deux constantes arbitraires.

L'intégrale générale de l'équation (5) sera de la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} f(z)=Cx+y\sqrt{1-C^2}+\varphi(C), \\ x-\dfrac{Cy}{\sqrt{1-C^2}}+\varphi'(C)=0, \end{cases}$$

φ étant une fonction arbitraire de C.

Par conséquent, *les surfaces répondant au problème que nous venons de traiter sont fournies par les formules* (6), *où* C *figure comme paramètre arbitraire.*

On peut obtenir, de la même manière, les surfaces à lignes de courbure dont les projections soit dans le plan x o z soit dans le plan y o z se coupent orthogonalement.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζει πρῶτον τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν ἀσυμπτωτικὰς γραμμάς, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπί τινος τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων τέμνονται ὀρθογωνίως καὶ ἀποδεικνύει ὅτι ἵνα τὰ δύο συστήματα τῶν προβολῶν τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν, τῶν χαρασσομένων ἐπὶ μιᾶς πραγματικῆς ἐπιφανείας $z=F(x,y)$ ὦσιν αἱ ἴδιαι ὀρθογώνιοι τροχιαί των, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ $F(x,y)$ νὰ παριστᾷ εἴτε τὸ πραγματικὸν μέρος εἴτε τὸν συντελεστὴν τοῦ i ἀναλυτικῆς τινὸς συναρτήσεως $f(x+yi)$. Ἐπίσης κατὰ δεύτερον λόγον ἀνευρίσκει τὰς ἐπιφανείας τῶν ὁποίων αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος προβάλλονται ἐπί τινος τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων κατὰ δύο καμπύλας τεμνομένας καθέτως (τύποι 6).