διαφοράς, ὑφίσταται ὁμοιότης μεταξὺ τῶν διαφόρων εἰδῶν δημιουργίας, ὁμοιότης ἐστηριγμένη εἰς μίαν συνθήκην: τὸν ἔρωτα, τὸ πάθος πρὸς τὸ ὡραῖον.

Διὰ τὸν κ. Hadamard ὁ ἐρευνητής, ὅστις εἰς τὴν ἐργασίαν του δὲν καθοδηγεῖται κυρίως ἀπὸ τὴν συνθήκην ταύτην, εἶναι κατώτερος.

Τὴν ὕπαρξιν τῆς συνθήκης ταύτης ὁ Hadamard δεικνύει φέρων καὶ ὡς παράδειγμα τὸν Εὐκλείδην καὶ Ἀρχιμήδην ἀφ' ἑνὸς καὶ τὸν Φειδίαν καὶ Πραξιτέλην ἀφ' ἑτέρου, οἵτινες δὲν εἶχον εἰς τὴν ἐργασίαν των ὡς ὁδηγὸν εἰμὴ τὴν ἐπιλογήν, τὴν κλίσιν, τὴν ἀγάπην, τὸ πάθος πρὸς τὸ ὡραῖον.

ΑΛΓΕΒΡΑ. — **Sur une équation fonctionnelle***, *par M.* ***Paul Montel.***

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

Dans la dernière Note qu'il a présentée à l'Académie des Sciences de Paris[1], Rémoundos a considéré l'équation fonctionnelle

$$\frac{\varphi'(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_2)} = \varphi'\left[P(\zeta_1, \zeta_2)\right] \tag{1}$$

dans laquelle $\varphi(\zeta)$ désigne la fonction inconnue et $P(\zeta_1, \zeta_2)$, un polynôme en ζ_1 et ζ_2, et montré que l'existence des théorèmes du type de celui de M. Picard sur les fonctions entières était liée aux solutions de cette équation (1).

Je me propose de déterminer toutes les solutions de cette équation fonctionnelle et je prie l'Académie d'accepter cette Note comme un hommage à la mémoire de l'éminent mathématicien que la Grèce vient de perdre.

Posons

$$\log \varphi'(\zeta) = x(\zeta);$$

l'équation fonctionnelle (1) peut s'écrire, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$x(\zeta_1) - x(\zeta_2) = x\left[P(\zeta_1, \zeta_2)\right], \tag{2}$$

et, si nous désignons par $\zeta(x)$ une fonction inverse de $x(\zeta)$, il vient, en posant

$$x(\zeta_1) = x_1, \quad x(\zeta_2) = x_2,$$

$$x_1 - x_2 = x\left[P(\zeta_1, \zeta_2)\right],$$

ou

$$\zeta(x_1 - x_2) = P\left[\zeta(x_1), \zeta(x_2)\right]. \tag{3}$$

---

* PAUL MONTEL.—Περὶ μιᾶς συναρτησιακῆς ἐξισώσεως.

[1] G. RÉMOUNDOS.— Substitution à l'inverse d'une fonction entière. Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard (*Comptes-Rendus*, **185**, 1927, p. 435).

On voit que la fonction $\zeta(x)$ admet un théorème d'addition algébrique.

Pour $x_1=x_2$, on a

$$P(\zeta_1, \zeta_2)=\varphi(0);$$

par conséquent, le polynôme

$$P(\zeta_1, \zeta_2)-\zeta(0)=P(\zeta_1, \zeta_2)-P(\zeta_1, \zeta_1)$$

est divisible par $\zeta_1-\zeta_2$ et l'on peut écrire, en désignant par $Q(\zeta_1, \zeta_2)$, un polynôme en ζ_1 et ζ_2,

$$P(\zeta_1, \zeta_2)-\zeta(0)=(\zeta_1-\zeta_2)Q(\zeta_1, \zeta_2).$$

On aura donc

$$(4) \qquad \zeta(x_1-x_2)-\zeta(0)=\left[\zeta(x_1)-\zeta(x_2)\right]Q\left[\zeta(x_1)\ \zeta(x_2)\right].$$

Divisons par x_1-x_2 les deux membres de cette égalité et faisons tendre x_2 vers x_1 ; il vient, en remplaçant x_1 par x,

$$\zeta'(0)=\zeta'(x)\,Q\left[\zeta(x), \zeta(x)\right],$$

ou

$$(5) \qquad dx=R(\zeta)d\zeta,$$

$R(\zeta)$ désignant un polynôme en ζ. On déduit de cette équation que $x(\zeta)$ est un polynôme en ζ et, en revenant à l'équation (2), on voit, que P doit être un polynôme du premier dégré, sinon le degré du premier membre en ζ, serait inférieur à celui du second. P étant du premier degré en ζ_1, et aussi en ζ_2, Q est une constante C; l'équation (4) s'écrit alors

$$\zeta(x_1-x_2)-\zeta(0)=C\left[\zeta(x_1)-\zeta(x_2)\right];$$

en y faisant $x_2=0$, on voit que C est égal à l'unité. Si l'on pose ensuite

$$f(x)=\zeta(x)-\zeta(0),$$

$$x_2=x, \quad x_1-x_2=y,$$

cette équation devient

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Donc, $\zeta(x)$ est une fonction linéaire de x et $x(\zeta)$ est une fonction linéaire de ζ : $\alpha\zeta+\beta$. On a alors

$$\log\ \varphi'(\zeta)=\alpha\zeta+\beta,$$

d'où

$$\varphi(\zeta)=Ae^{\alpha\zeta}+B,$$

α, β, A, B désignant des constantes.

Le raisonnement précédent suppose que la fonction $\zeta(x)$, ou $x(\zeta)$ admet une dérivée; mais il est possible de montrer que l'hypothèse de la continuité de la fonction inconnue, jointe à l'existence d'un théorème d'addition, entraîne l'existence de la dérivée[1].

L'équation fonctionnelle (1) peut d'ailleurs être généralisée. On peut supposer que la fonction $P(\zeta_1, \zeta_2)$, soit une fonction entière de genre fini de ses arguments: le résultat demeure le même; la seule solution est la fonction exponentielle, à des substitutions linéaires près, à coefficients constants, effectuées sur la variable et sur la fonction.

En effet, le même raisonnement conduit à l'équation (5) dans laquelle $R(\zeta)$ est maintenant une fonction entière de genre fini: il en est donc de même de $x(\zeta)$. L'équation (2) montre alors que la fonction $x(\zeta_1)$ est une fonction entière de fonction entière. Il résulte d'un théorème de M. Pólya[2] que, ou bien P est un polynôme et l'on retombe sur un cas déjà traité, ou bien P et x sont des fonctions entières d'ordre nul.

Dans ce dernier cas, la fonction inverse $\zeta(x)$ ne peut avoir d'autre point singulier à distance finie que des points critiques algébriques. Or, la relation (3) montre alors que ces points critiques ne peuvent exister, sinon on pourrait faire décrire à x_1 et à x_2 des chemins tels que $\zeta(x_1)$ et $\zeta(x_2)$ reprennent leurs valeurs, tandis que la détermination de $\zeta(x_1-x_2)$ aurait changé, ce qui est en contradiction avec la relation (3). La fonction $\zeta(x)$, inverse d'une fonction entière est donc uniforme. La fonction entière $x(\zeta)$ est alors une fonction linéaire et nous retrouvons la solution déjà obtenue.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν τελευταίαν του ἀνακοίνωσιν εἰς τὴν 'Ακαδημίαν τῶν 'Επιστημῶν τῶν Παρισίων ὁ Γ. Ρεμοῦνδος γενικεύων τὸ θεώρημα τοῦ κ. Emile Picard ἀντικαθιστᾷ τὴν συνάρτησιν e^{ζ} διὰ μιᾶς ἄλλης συναρτήσεως $\varphi(\zeta)$, ἥτις ἐπαληθεύει τὴν συναρτησιακὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\varphi'(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_2)} = \varphi'\left[P(\zeta_1, \zeta_2)\right]$$

ὅπου $P(\zeta_1, \zeta_2)$ εἶναι πολυώνυμον ὡς πρὸς ζ_1, ζ_2.

---

[1] PAUL MONTEL.— Sur les fonctions continues d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique. *Comptes-Rendus* **186**, 1928, p. 672.

[2] G. POLYA.— On an integral function of an integral function. (*Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 1925. Part. 1).

Ὁ κ. Paul Montel προσδιορίζει ὅλας τὰς λύσεις τῆς συναρτησιακῆς ταύτης ἐξισώσεως εὑρίσκων

$$\varphi(\zeta) \equiv Ae^{\alpha\zeta} + B$$

ὅπου α, A, B εἶναι σταθεραί, δεικνύων οὕτω ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Picard παρουσιάζει τὴν μεγίστην γενικότητα, ἣν δύναταί τις νὰ ἐλπίζῃ. Ἐπὶ πλέον ὁ κ. Montel στηριζόμενος εἰς μίαν πρότασιν τοῦ κ. Polyà δεικνύει ὅτι ἡ λύσις $Ae^{\alpha\zeta} + B$ μένει ἡ αὐτὴ ἐν τῇ γενικωτάτῃ περιπτώσει, καθ' ἣν τὸ $P(\zeta_1, \zeta_2)$ δὲν εἶναι πολυώνυμον ἀλλὰ συνάρτησις ἀκεραία ὡς πρὸς ζ_1, ζ_2 τάξεως πεπερασμένης, παρακαλεῖ δὲ τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἀθηνῶν νὰ θεωρήσῃ τὴν ἀνακοίνωσίν του ταύτην ὡς εὐλαβῆ προσφορὰν εἰς τὴν μνήμην τοῦ ἐξόχου μαθηματικοῦ, ὃν ἡ Ἑλλὰς ἀπώλεσε.

ΑΝΑΤΟΜΙΚΗ.— **Des champs d'insertion des muscles masticateurs de l'homme et des mammifères***, *par M. G. Apostolakis*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Γ. Σκλαβούνου.

Ayant déterminé, par la méthode pyrographique du Professeur Sclavounos, les champs d'insertion des muscles masticateurs de l'homme et des animaux, nous sommes amené aux conclusions suivantes:

1. Les limites d'insertion des trois muscles masticateurs, c'est-à-dire du muscle temporal, du muscle masséter et du muscle ptérygoïdien interne, ne sont pas fixes chez les divers animaux et chez l'homme, mais ils présentent des différences en se déplaçant ou en s'étendant vers le corps ou vers la branche du maxillaire inférieur.

2. Les champs d'insertion du muscle temporal se déplacent chez les singes, mais surtout chez l'homme en s'écartant du condyle; les champs d'insertion du masséter et du muscle ptérygoïdien interne se déplacent en s'étendant soit vers le corps du maxillaire inférieur (carnivores), soit vers sa branche (herbivores et quelques espèces de singes), soit en occupant une place intermédiaire entre les limites des insertions des muscles masticateurs des carnivores et des herbivores. (Homme et quelques espèces de singes).

3. Ces changements des limites d'insertion qu'on observe dans ces mus-

---

* Γ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗ — Περὶ τῶν καταφυτικῶν πεδίων τῶν μασητηρίων μυῶν τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῶν θηλαστικῶν.

Ἡ προκειμένη ἀνακοίνωσις ἀποτελεῖ περίληψιν τῆς κατατεθείσης μελέτης, ἥτις θὰ δημοσιευθῇ εἰς τὰς *Πραγματείας τῆς Ἀκαδημίας*.