ἡ σχέσις

$$a_1 x^3 y^3 + a_4 (x^3 + y^3) + a_{10} = 0$$

ὁρίζει ἓν ἀλγεβρικὸν ὁλοκλήρωμα, καὶ γενικώτερον ἡ σχέσις

$$a x^\mu y^\mu + b (x^\mu + y^\mu) + c = 0$$

ὁρίζει ἓν ἀλγεβρικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς γενικωτέρας διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{dx}{\sqrt[\mu]{(ax^\mu + b)(bx^\mu + c)^{\mu-1}}} + \frac{dy}{\sqrt[\mu]{(ay^\mu + b)(by^\mu + c)^{\mu-1}}} = 0$$

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΛΕΙΟΝΟΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΝ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ[1]

ΥΠΟ **Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ**

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου)

Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν πλειονότιμον $u(x)$ ἔχουσαν δύο κλάδους καὶ ἀριθμὸν κριτικῶν σημείων πεπερασμένον. Μία τοιαύτη συνάρτησις ὁριζομένη ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $u^2 + 2f(x)u + g(x) = 0$ ὅπου $f(x)$, $g(x)$ εἶναι συναρτήσεις ἀκέραιοι — οὐχὶ ἀμφότεραι πολυώνυμα — λαμβάνει ἀναγκαίως τὴν μορφήν: $f(x) + \theta(x)e^{Q(x)}$ (κατὰ προσέγγισιν τοῦ σημείου της) ὅπου $\theta(x)$ εἶναι μία συνάρτησις ἀλγεβρικὴ καὶ $Q(x)$ παριστᾷ ἀκεραίαν συνάρτησιν.

Ὁ Καθηγητὴς PAUL MONTEL μοῦ ἔθεσε τὸ ζήτημα: *εὑρεῖν τὴν μορφὴν τῶν πλειονοτίμων συναρτήσεων ἐχουσῶν μ κλάδους καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν κριτικῶν σημείων εἶναι πεπερασμένος.*

Μία τοιαύτη συνάρτησις ὁρίζεται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$f(x,u) \equiv u^\mu + \mu f_1(x) u^{\mu-1} + f_2(x) u^{\mu-2} + \ldots + f_\mu(x) = 0$$

ἡ δὲ διακρίνουσα (discriminant) τοῦ πολυωνύμου $f(x,u)$ ὡς πρὸς u ἀναγκαίως θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $p(x)e^{P(x)}$, $p(x)$ εἶναι ἓν πολυώνυμον καὶ $P(x)$ παριστᾷ μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν.

Ἡ ἔρευνα τοῦ ζητήματος μὲ ἤγαγεν εἰς τὸ ἑξῆς ἐξαγόμενον:

Θεώρημα: *Ἔστω $u(x)$ μία πλειονότιμος συνάρτησις ἔχουσα μ κλάδους ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς*

$$f(x,u) \equiv u^\mu + \mu f(x) u^{\mu-1} + \ldots = 0$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν κριτικῶν σημείων τῆς συναρτήσεως $u(x)$ εἶναι πεπερασμένος θὰ ἔχωμεν

[1] **TH. VAROPOULOS. — Sur les algébroïdes ayant un nombre fini des points critiques.**

$$u(x) = f(x) + \varphi_1(x)e^{Q_1(x)} + \varphi_2(x)e^{Q_2(x)} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(x)e^{Q_{\mu-1}(x)}$$

ὅπου $f(x)$ *εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ* $\mu u^{\mu-1}$ *τῆς ἐξισώσεως* $f(x,u) = o$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots,$ $\varphi_{\mu-1}(x)$ *εἶναι συναρτήσεις ἀλγεβρικαὶ καὶ* $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $\ldots$, $Q_{\mu-1}^{(x)}$ *εἶναι ἀκέραιοι συναρτήσεις.*

RÉSUMÉ

1. Considérons une algébroïde $u(x)$ à deux branches pour fixer les idées, dont les points critiques sont en nombre fini. Ses deux déterminations $u_1(x)$, $u_2(x)$ correspondant à un point x du plan verifient une équation

$$u^2 + 2f(x)u + g(x) = o$$

les $f(x)$, $g(x)$ designent des fonctions entierès dont une an moins n'est pas un polynome, dans ces conditions l'algébroïde aura la forme

$$f(x) + \theta(x)e^{Q(x)}$$

$\theta(x)$ étant une fonction *algébrique* et $Q(x)$ une fonction entière.

2. Mr MONTEL m'a posè la question de savoir: *quelle est la forme d'une fonction algébroïde à* μ *détérminations dont le nombre des points critiques est fini.*

Une telle fonction est definie par une équation de la forme

$$f(x,u) \equiv u^\mu + \mu f_1(x)u^{\mu-1} + f_2(x)u^{\mu-2} + \ldots f_\mu = o$$

les $f_1(x)$ ne sont pas toutes des polynomes.

Le discriminant du polynome f en u étant necessairement de la forme $p(x)e^{Q(x)}$, $p(x)$ designant un polynome et $Q(x)$ une fonction entière.

Je suis arrivé à etablir le resultat suivant:

Théorème: *Soit* $u(x)$ *une algébroïde à* μ *détérminations definie par une equation de la forme*

$$u^\mu + \mu f(x)u^{\mu-1} + \ldots = o$$

Si on suppose que le nombre des points eritiques de cette fonction est fini on aura

$$u(x) = f(x) + \theta_1(x)e^{\varphi_1} + \theta_2(x)e^{\varphi_2} + \ldots + \theta_{\mu-1}(x)e^{\varphi_{\mu-1}(x)}$$

$\theta_1(x)$ *designant des fonctions algébriques et les* $\varphi_1(x)$ *des fonctions entières.*