ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 12ΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1975

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΠΑΝ. ΖΕΠΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur certains types de congruences de droites, dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par une relation,** *par Othon Pylarinos* *.

Résumé. Cet article a trait à certains types de congruences de droites réelles à paramètres distributeurs principaux liés par une relation de l'espace euclidien habituel, E^3, à chacune desquelles sont attachées ∞^1 surfaces deux à deux isométriques de manière que les droites joignant les points homologues dans l'isométrie des surfaces de chacun de ces couples soient les droites de la congruence, les milieux des segments, que les points homologues des surfaces de chaque couple déterminent sur ces droites, étant leurs points moyens. Les congruences ayant cette dernière propriété sont appelées, dans ce qui suit, *congruences* (M). Après un exposé préliminaire deux théorèmes sont d'abord démontrés concernant le premier les congruences hyperboliques, les droites de chacune desquelles établissent une correspondance isométrique entre ses nappes focales et le second les congruences non isotropes, les droites de chacune desquelles établissent une correspondance isométrique entre les deux surfaces lieux des points-limites de ces droites, qui expriment des conditions suffisantes afin qu'une congruence (M) soit en même temps une congruence de Ribaucour et une congruence à paramètres distributeurs principaux liés par une relation. Ensuite sont données des conditions

---

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ κατηγοριῶν τινων εὐθειογενῶν σμηνῶν, μεταξὺ τῶν κυρίων παραμέτρων διανομῆς ἑκάστου τῶν ὁποίων ὑπάρχει σχέσις.**

suffisantes afin qu'une congruence (M), qui est à la fois soit une congruence de Ribaucour soit une congruence à paramètres distributeurs principaux liés par une relation, jouisse de la seconde ou de la première de ces deux propriétés respectivement. Une condition nécessaire et suffisante est enfin donnée afin qu'il y ait une relation entre les paramètres distributeurs principaux d'une congruence (M), qui est en même temps une congruence de Ribaucour non isotrope et il est démontré que la surface moyenne d'une congruence de ce type, à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minina reglé et ses surfaces génératrices sont des surfaces de révolution.

1. Soit D une congruence de droites réelles de E^3, qui-référée aux paramètres u, v — est définie par rapport au système des coordonnées Oxyz choisi dans l'espace E^3 par l'équation vectorielle

$$\bar{R} = \bar{r}\,(u, v) + \theta \bar{l}\,(u, v)\,; \tag{1, 1}$$

$\bar{l}$ (u, v) est le vecteur-unité qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice courante g (u, v) de D et θ est le paramètre, aux valeurs duquel correspondent les points de la droite g, la surface S définie par l'équation (vectorielle)

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u, v), \tag{1, 2}$$

sur laquelle on a $\theta = 0$, étant la *surface directricc* de la congruence.

Dans ce qui suit, on suppose que l'image Σ de D sur la surface de la sphère - unité ayant l'origine O du système Oxyz comme centre, dans la représentation sphérique habituelle de cette congruence, (décrite par l'extrémité du vecteur $\bar{l}$ mené du point O, ne dégénère pas en courbe et que les paramètres u, v auxquels D est référée, aient été choisis de manière, que les images sur la surface (sphérique) Σ des surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de D, dans sa représentation sphérique, forment un réseau orthogonal. En outre on suppose que $\bar{l}$ (u, v) ainsi que les autres fonctions vectorielles ou scalaires des u, v, qui figurent dans ce qui suit, admettent des dérivées du premier et du second ordre par rapport aux u, v finies et continues pour tous les systèmes de valeurs des u, v, auxquels correspondent les droites de D et, si f est une fonction des u, v, on désigne par f_u, f_v, f_{u^2}, f_{uv}, f_{v^2} ses dérivées du premier et du second ordre respectiyement par rapport à u et à v.

Si l'on désigne par $\mathfrak{t}(u, v)$, $\mathfrak{g}(u, v)$ les vecteurs - unités qui au point courant de l'image sphérique Σ de D déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes $v = $ Cte, $u = $ Cte tracées sur la surface Σ, issues de ce point, on peut écrire les dérivées, $\boldsymbol{l}_u$, $\boldsymbol{l}_v$, du vecteur $\boldsymbol{l}$ par rapport à u et à v pour les valeurs des u, v auxquelles ce point correspond, sous la forme

$$(1, 3) \qquad \boldsymbol{l}_u = a\mathfrak{t}, \qquad \boldsymbol{l}_v = b\mathfrak{g},$$

les vecteurs $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$ étant des fonctions des u, v qui, d'après les suppositions faites - vérifient avec $\boldsymbol{l}(u, v)$ les relations

$$(1, 4) \qquad \mathfrak{t}^2 = \mathfrak{g}^2 = \boldsymbol{l}^2 = 1, \quad \mathfrak{t} \times \mathfrak{g} = 0, \quad \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{g} = \varepsilon \boldsymbol{l} \; *$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 et on peut choisir les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes $v = $ Cte, $u = $ Cte de manière que l'on ait :

$$(1, 5) \qquad \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{g} = \boldsymbol{l},$$

En outre les fonctions vectorielles $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$, $\boldsymbol{l}$ des u, v doivent vérifier avec a, b — comme on le reconnaît, si l'on écrit la condition de compatibilité des deux équations (1, 3) et que l'on tienne compte des relations (1, 4) et (1, 5) — les équations

$$(1, 6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{t}_u = -\dfrac{a_v}{b}\mathfrak{g} - a\boldsymbol{l}, & \mathfrak{t}_v = \dfrac{b_u}{a}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}_u = \dfrac{a_v}{b}\mathfrak{t}, & \mathfrak{g}_v = -\dfrac{b_u}{a}\mathfrak{t} - b\boldsymbol{l}, \end{cases}$$

tandis que $a(u, v)$, $b(u, v)$ doivent satisfaire en plus à l'équation aux dérivées partielles

$$(1, 7) \qquad \left[\frac{b_u}{a}\right]_u + \left[\frac{a_v}{b}\right]_v + ab = 0$$

qui exprime la condition de compatibilité des deux premières ainsi que des deux dernières équations (1, 6) [**3**, p. 6].

Par ailleurs l'équation (1, 7) exprime que la surface Σ dont le carré de l'élément linéaire, en vertu des (1, 3) et (1, 4), est de la forme

---

* Les notations $\mathfrak{t} \times \mathfrak{g}$, $\mathfrak{t} \wedge \mathfrak{g}$ désignent les produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$ respectivement.

$$d\sigma^2 = du^2 a^2 + dv^2 b^2, \tag{1, 8}$$

est une surface à courbure totale constante $= + 1$.

2. Les relations (2, 4) entre les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\boldsymbol{l}$ permettent d'écrire les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface directrice S de la congruence D sous la forme :

$$\bar{r}_u = t_1 \bar{t} + g_1 \bar{g} + l_1 \boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = t_2 \bar{t} + g_2 \bar{g} + l_2 \boldsymbol{l}. \tag{2, 1}$$

Ces deux équations, à conditions qu'elles soient compatibles, déterminent à une translation près la surface S par rapport au système de référence Oxyz ; aussi peut-on supposer, dans l'étude des propriétés intrinséques à la congruence, que sa surface directrice S soit définie par deux équations de la forme (2, 1).

Dans le cas particulier où la surface directrise S de la congruence est sa surface moyenne, les scalaires t_1, g_2, que les équations (2, 1) renferment, sont liés avec a, b par la relation $bt_1 + ag_2 = 0$ [**3**, p. 17] et, dans ce cas, les paramètres u, v peuvent être choisis de manière que les scalaires t_1, g_2 soient tous les deux $\equiv 0$, le réseau (u, v) sur la surface de la sphère étant orthogonal.

A cet effet on peut distinguer deux cas suivant que la congruence D est isotrope ou n'est par isotrope.

Si la congruence D est isotrope, d'après la définition des congruences de ce type [**2**, p. 209], ses paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 (les valeurs desquelles sur la génératrice courante g de D sont, par définition, les extrema du paramètre distributeur p sur g des surfaces engendrées par les droites de la congruence, auxquelles g appartient) seront liés par la relation

$$p_2 - p_1 = 0 \tag{2, 2}$$

et, si S est la surface moyenne de D, on aura dans les équations (2, 1) $t_1 = g_2 = 0$, $g_1 = ap$, $t_2 = -bp_2$, où $p \equiv p_1 = p_2$ [**5**, p. 166].

Ainsi les équations (2, 1), dans le cas où S est la surface moyenne de la congruence D qui, par hypothèse, est une congruence isotrope référée à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal, prennent la forme

$$\bar{r}_u = ap\bar{g} + l_1 \boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = -bp\bar{t} + l_2 \boldsymbol{l}, \tag{2, 3}$$

les scalcaires p, l_1, l_2, que ces équations renferment, étant des fonctions des u, v vérifiant avec a, b les équations aux dérivées partielles :

$$(2,4) \qquad p_u = l_2 \frac{a}{b}, \qquad p_v = -l_1 \frac{b}{a}, \qquad l_{1v} - l_{2u} = 2abp,$$

qui expriment — comme on le constate à l'aide des (1, 3) et (1, 6) — la condition de compatibilité des deux équations (2, 3).

Si la congruence D n'est pas isotrope, ses paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 ne vérifient pas l'équation (2, 2) ; dans ce cas la génératrice courante g de D est la génératrice commune des deux surfaces distinctes engendrées par des droites de D, les paramètres distributeurs desquelles sur g sont respectivement égaux aux paramètres distributeurs principaux de la congruence sur cette droite. Les surfaces engendrées par les droites de la congruence, qui jouissent de cette propriété et sont appelées *surfaces distributrices principales de la congruence,* constituent deux systèmes distincts de ∞^1 surfaces réelles dont les images sur la surface de la sphère-unité, dans la représentation sphérique de la congruence, forment un réseau orthogonal [**2**, p. 204].

Or, si la congruence non isotrope D est référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité sera orthogonal ; dans ce cas, si en plus la surface directrice S de D est sa surface moyenne, dans les équations (2, 1) on aura — comme on le constate aisément [**5**, p. 165] — $t_1 = g_2 = 0$, $g_1 = ap_1$, $t_2 = -bp_2$, où p_1, p_2 sont les paramètres distributeurs principaux de la congruence.

Ainsi les équations (2, 1), lorsque S est la surface moyenne de la congruence (non isotrope) D, prennent la forme

$$(2,5) \qquad \bar{r}_u = ap_1 \bar{g} + l_1 \bar{l}, \qquad \bar{r}_v = -bp_2 \bar{t} + l_2 \bar{l},$$

les scalaires p_1, p_2, l_1, l_2, qui y figurent, étant des fonctions des u, v vérifiant avec a, b les équations aux dérivées partielles

$$(2,6) \qquad p_{1u} = -(p_1 - p_2)\frac{a_v}{a} - l_1 \frac{b}{a}, \qquad p_{2u} = (p_1 - p_2)\frac{b_u}{b} + l_2 \frac{a}{b},$$

$$l_{1v} - l_{2u} = ab(p_1 + p_2),$$

qui expriment, eu égard aux (1, 3) et (1, 6), la condition de compatibilité des deux équations (2, 5) [**5**, p. 165].

Les équations (2, 5) et (2, 6) se ramènent aux équations (2, 3) et (2, 4) respectivement si $p_1 = p_2 \equiv p$. Dans ce cas D est une congruence isotrope référée à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal.

Il en résulte, compte tenu du fait qu'un couple de systèmes de ∞^1 surfaces engendrées par les droites d'une congruence isotrope, les images desquelles sur la surface de la sphère-unité, dans la représentation sphérique de la congruence, forment un réseau orthogonal, peut être considéré comme un couple de systèmes de surfaces distributrices principales de la congruence, que les équations (2, 5), à condition qu'elles soient compatibles, déterminent à une translation près la surface moyenne de la congruence D référée à ses surfaces distributrices principales $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$, même dans le cas où D est une congruence isotrope.

Il est à noter que, si la surface directrice S de la congruence D est sa surface moyenne, les valeurs θ_1, θ_2 et θ_1', θ_2' du paramètre θ, que l'équation (1, 1) de D renferme, auxquelles correspondent les points focaux et les points-limites de la génératrice courante g de D respectivement, sont des fonctions de ses paramètres distributeurs principaux sur la génératrice g.

En effet, si la surface S est définie par les équations (2, 1), les valeurs θ_1, θ_2 de θ sont les racines du polynôme en θ :

$$ab\theta^2 + (at_1 + bg_2)\,\theta + t_1g_2 - t_2g_1$$

[**3**, p. 9] et ce polynôme, lorsque S est la surface moyenne de D référée à ses surfaces distributrices principales $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$, en vertu des (2, 5), devient $ab\,(\theta^2 + p_1, p_2)$.

Donc, dans ce cas, les valeurs θ_1, θ_2 de θ, auxquelles correspondent des points focaux de la génératrice courante g de D, sont :

$$\theta_{1,2} = \pm \sqrt{-p_1p_2}\,. \tag{2, 7}$$

En outre, dans ce même cas, les valeurs θ_1', θ_2' de θ, auxquelles correspondent les points-limites de la génératrice g de D, sont [**1**, p. 208] :

$$\theta'_{1,2} = \pm \frac{p_2 - p_1}{2}\,. \tag{2, 8}$$

D'après les formules (2, 7), pour que la congruence D soit parabolique, il faut et il suffit, qu'au moins un de ces paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 soit $\equiv 0$; car seulement dans ce cas les points focaux de chaque droite de D se confondent et coïncident avec le point moyen de cette droite. Donc seulement dans ce cas on a $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Il en résulte que, si *la congruence n'est pas parabolique, ses paramètres distributeurs principaux* p_1, p_2 *sont nécessairement tous les deux* $\not\equiv 0$ *:*

$$p_1 \not\equiv 0, \qquad p_2 \not\equiv 0. \tag{2, 9}$$

3. Les droites qui engendrent une congruence de Ribaucour sont parallèles — d'après la definition des congruences de ce type [**1**, p. 308] — aux normales à une même surface, S′, qui est représentée sur la surface moyenne S de la congruence avec orthogonalité des éléments linéaires, la droite de la congruence issue de chaque point de S étant parallèle à la normale à S′ en son point homologue, dans cette représentation des surfaces S, S′, l'une sur l'autre, de ce point de S. La surface S′ est appelée, dans ce cas, *surface génératrice* de la congruence.

Si la congruence considérée D n'est pas parabolique et que la surface moyenne S de D — référée à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal — soit définie à une translation près par deux équations de la forme (2, 5), une condition nécessaire et suffisante, afin que D soit une congruence de Ribaucour est que les scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2, qui figurent dans ces équations, soient des fonctions des u, v vérifiant l'équation :

$$\left[\frac{l_1 b}{p_1 a}\right]_u + \left[\frac{l_2 a}{p_2 b}\right]_v = 0, \tag{3, 1}$$

les paramètres distributeurs p_1, p_2 de D étant, dans ce cas, tous les deux $\not\equiv 0$ [**5**, p. 168].

La condition (3, 1) est remplie — comme on le constate en ayant égard aux équations (2, 4) — si $p_1 = p_2 \equiv p \not\equiv 0$; dans ce cas le congruence D est isotrope et—comme on sait [**1**, p. 311] — *les congruences isotropes sont des congruences de Ribaucour.*

Il est à noter que, dans le cas où la congruence non parabolique D est une congruence de Ribaucour, les deux équations

$$(3, 2) \qquad \frac{\varrho_u}{\varrho} = -\frac{l_2 a}{p_2 b}, \qquad \frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{l_1 b}{p_1 a},$$

grâce à (3, 1), sont compatibles et, pour chaque fonction ϱ (u, v) vérifiant ces deux équations, les équations

$$(3, 3) \qquad \bar{r}'_u = \varrho a p_1 \bar{t}, \qquad \bar{r}'_v = \varrho b p_2 \bar{g},$$

qui, dans ce cas, sont également compatibles, *déterminent à une translation près une surface génératrice de la congruence* [**5**, p. 168] ; de là résulte qu'une congruence de Ribaucour admet ∞^1 surfaces génératrices.

En outre dans la représentation qui vient d'être signalée de la surface moyenne S d'une congruence de Ribaucour sur une de ses surfaces génératrices, S′, les lignes asymptotiques de la surface S′ correspondent aux courbes tracées sur la surface S, que les surfaces développables de la congruence déterminent sur elle [**1**, p. 309] et, si la congruence de Ribaucour n'est pas isotrope, les lignes de courbure de la surface S′ correspondent aux courbes tracées sur la surface S, que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur elle [**6**, p. 134].

4. Deux surfaces, S_1, S_2, qui sont représentées l'une sur l'autre de manière que les droites joignant leurs points homologues, dans cette représentation, soient les droites de la congruence D définie par l'équation (1, 1), les milieux des segments, que les points homologues des deux surfaces déterminent sur ces droites, étant situés sur la surface directrice S de la congruence, seront définies par deux équations de la forme

$$(4, 1) \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}(u, v) + \theta \bar{l}(u, v), \qquad \bar{r}_2 = \bar{r}(u, v) - \theta \bar{l}(u, v),$$

où θ est une certaine fonction des u, v, les points homologues des deux surfaces, dans cette représentation, correspondant à un même système de valeurs des u, v.

Si en particulier la surface directrice S de D est sa surface moyenne, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 2, on peut référer D à deux paramètres u, v tels que les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}$ (u, v) de l'équation (1, 2) de D, écrites sous la forme (2, 1), prennent la forme (2, 5), le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité étant orthogonal. Cela étant, en différentiant la première équation (4, 1) par rapport à u et à v, on parvient, à l'aide des (1, 3) et (2, 5), aux équations:

$$(4, 2) \qquad \bar{r}_{1u} = a(\theta\bar{t} + p_1\bar{g}) + (l_1 + \theta_u)\bar{l}, \quad \bar{r}_{1v} = b(-p_2\bar{t} + \theta\bar{g}) + (l_2 + \theta_v)\bar{l}.$$

Or, si E_1, F_1, G_1 ; E_2, F_2, G_2 sont les coefficients des premières formes différentielles fondamentales des surfaces S_1, S_2 référées aux paramètres u, v, en vertu des (4, 2) on aura pour E_1, F_1, G_1 les expressions :

$$(4, 3) \qquad \begin{cases} E_1 = a^2(\theta^2 + p_1^2) + (l_1 + \theta_u)^2, \quad G_1 = b^2(p_2^2 + \theta^2) + (l_2 + \theta_v)^2 \\ F_1 = ab\theta(p_1 - p_2) + (l_1 + \theta_u)(l_2 + \theta_v). \end{cases}$$

On déduit de là, en tenant compte que, d'après (4, 1), les expressions des E_2, F_2, G_2 s'obtiennent des expressions (4, 3) des E_1, F_1, G_1, en y remplaçant θ par $-\theta$, que, pour que la représantation considérée des surfaces S_1, S_2, l'une sur l'autre, soit isométrique ou — ce qui revient au même — pour que l'on ait $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$, il faut et il suffit que la fonction $\theta(u, v)$, qui figure dans les équations (4, 1), vérifie avec les fonctions a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, que les équations (2, 5), renferment, les équations

$$(4, 4) \qquad l_1\theta_u = 0, \quad l_2\theta_v = 0, \quad ab\theta(p_1 - p_2) + l_1\theta_v + l_2\theta_u = 0.$$

Les équations (4, 4) montrent qu'*une congruence qui admet deux surfaces entre lesquelles ses droites établissent une correspondance isométrique, est nécessairement une congruence (M), lorsque les milieux des segments, que les points homologues dans l'isométrie dès deux surfaces déterminent sur les droites de la congruence, sont situés sur sa surface moyenne,* car ces équations, en cas qu'elles soient vérifiées par une fonction $\theta(u, v)$, sont évidemment vérifiées par toute autre fonctions $\theta'(u, v)$, de la forme $\theta' = c\theta$, où c est une constante arbitraire.

Si $p_1 = p_2 \equiv p \neq 0$, les scalaires l_1, l_2 qui figurent dans les équations (2, 5), d'après (2, 6), ne peuvent pas s'annuler tous les leux identiquement et, cela étant, les équations (4, 4) cont vérifiées par $\theta = c$, où c est une constante arbitraire. Dans ce cas, la congruence est isotrope et — comme on sait [**3**, p. 20] — *les congruences isotropes sont des cougruences (M).*

Si la congruence D n'est pas isotrope, on aura, d'après (2, 2), $p_2 - p_1 \neq 0$ et, pour qu'il y ait une fonction $\theta(u, v)$ vérifiant les équations (4, 4), il faut — comme on le voit aussitôt — que l'on ait ou bien

$$(4, 5) \qquad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2}\right] = 0,$$

ou bien

$$(4, 6) \qquad l_1 \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{ab(p_2 - p_1)}{l_1}\right] = 0.$$

D'autre part, si les conditions (4, 5) ou (4, 6) sont remplies, les équations (4, 4) sont vérifiées par toute fonction de la seule variable u, $\theta(u)$, telle que l'on ait $\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{du} = \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2} \equiv f(u)$, ou par toute fonction de la seule variable v ; $\theta'(v)$ telle que l'on ait $\frac{1}{\theta'}\frac{d\theta'}{dv} = \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_1} \equiv f'(v)$ respectivement.

Donc, *afin qu'une congruenee non isotrope dont la surface moyenne est définie à une translation près par deux équations de la forme (2, 5) soit une congruence (M), il faut et il suffit que des six fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, que ces équations renferment, une seule des deux dernières, l_1, l_2, soit $\equiv 0$ et en plus que $\frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2}$ soit une fonction de la seule variable u ou que $\frac{ab(p_2 - p_1)}{l_1}$ soit une fonction de la seule variable v suivant que $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ ou $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$ respectivement* *.

Il est à noter que, si la congruence D qui, étant définie par l'équation (1, 1), admet comme surface directrice S sa surface moyenne, est une congruence non isotrope référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, les seconds membres $\bar{r}(u, v)$ de l'équation

* Des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une congruence admette ∞^1 surfaces, entre lesquelles, prises deux à deux, ses droites établissent une correspondance isométrique telle que les milieux des segments, que les points homologues dans l'isométrie des surfaces de chaque couple déterminent sur ces droites, soient situés sur une surface la même pour tous ces couples des surfaces, sont données par M. P. Vincensini [**3**, p. 18 à 20].

(1, 2) de la surface S et $\bar{r}_1(u, v)$, $\bar{r}_2(u, v)$ des équations qui s'obtiennent des deux équations (4, 1) en y remplaçant θ par une fonction $\theta(u, v)$ satisfaisant aux équations (4, 4), sont des fonctions des u, v qui, d'après la proposition précédente, vérifient — comme on le reconnaît aisément en ayant égard aux (2, 5), (4, 1) et (4, 3), les équations

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0, \qquad \bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v} = 0, \qquad \bar{r}_{2u} \times \bar{r}_{2v} = 0,$$

qui expriment que les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur chacune de ces surfaces forment un réseau orthogonal.

Donc *les courbes, que les surfaces distributrices principales d'une congruence (M) non isotrope déterminent sur la surface moyenne de la congruence ainsi que sur les surfaces deux à deux isométriques qui lui sont attachées, forment sur chacune de ces surfaces un réseau orthogonal.*

5. Supposons maintenant que la congruence D définie par l'équation (1, 1) soit une congruence non isotrope qui, ayant comme surface directrice S sa surface moyenne, est référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales.

Si en premier lieu la congruence D est hyperbolique et que ses nappes focales, S_1, S_2, ne dégénèrent pas en courbes, ces deux surfaces, qui, d'après (2, 7), sont définies par les équations

$$(5, 1) \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}(u, v) + \sqrt{-p_1 p_2}\; l(u, v), \qquad \bar{r}_2 = \bar{r}(u, v) - \sqrt{-p_1 p_2}\; l(u, v),$$

où p_1, p_2 sont les paramètres distributeurs principaux de D, sont représentées, l'une sur l'autre, de manière que leurs points homologues, dans cette représentation — correspondant à un même système de valeurs des u, v — soient les points focaux des droites de D ; par conséquent les milieux des segments, que les points homologues des deux surfaces S_1, S_2 déterminent sur les droites de la congruence, sont situés sur sa surface moyenne.

Or, si cette représentation est isométrique, d'après ce qui est exposé dans la paragraphe 4, D est une congruence (M) et les fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans les expressions (2, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface moyenne S de D et vérifient les équations (1, 7) et (2, 6), doivent vérifier en plus avec $\theta = \sqrt{-p_1, p_2}$ les équations (4, 4). On aura donc ou bien

$$(5, 2) \qquad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad p_1 p_2 = -\theta^2(u), \quad \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2} = \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{du} \equiv f(u),$$

ou bien

$$(5, 3) \qquad l_1 \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad p_1 p_2 = -\theta'^2(v), \quad \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_1} = \frac{1}{\theta'}\frac{d\theta'}{dv} \equiv f'(v),$$

les fonctions $\theta(u)$, $f(u)$ et $\theta'(v)$, $f'(v)$, qui figurent dans ces conditions, étant réelles et $\neq 0$, puisque D est, par hypothèse, une congruence hyperbolique.

Si les conditions (5, 2) sont remplies, de la première équation (2, 6) qui, grâce aux (5, 2), acquiert la forme

$$(5, 4) \qquad \frac{p_1 p_{1v}}{p_1^2 + \theta^2} = -\frac{a_v}{a},$$

résulte que, si $a_v \neq 0$, p_1 et a seront liés avec la variable u par une relation de la forme

$$(5, 5) \qquad p_1^2 + \theta^2 = \frac{\varphi_1^2}{a^2},$$

où φ_1 est une fonction réelle et $\neq 0$ de la seule variable u, tandis que, si $a_v = 0$ et que, par conséquent, a soit une fonction de la seule variable u, il en est de même de p_1.

Mais si $a_v \neq 0$, de la relation (5, 5) jointe à la troisième relation (5, 2) on obtient pour p_1, p_2 les expressions :

$$(5, 6) \qquad p_1 = \theta\frac{\sqrt{\varphi^2 - a^2}}{a} \qquad p_2 = -\theta\frac{a}{\sqrt{\varphi^2 - a^2}},$$

où $\varphi \equiv \frac{\varphi_1}{\theta} \equiv \varphi(u) \neq 0$.

Par ailleurs la dernière relation (5, 2), si l'on y remplace p_1, p_2 par leurs valeurs (5, 6), devient

$$(5, 7) \qquad \frac{l_2 a}{p_2 b} = \frac{\varphi^2}{f} \equiv F(u)$$

et de cette relation, en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en tenant compte que, grâce aux (5, 2), (5, 6) et à la dernière équation (2, 6), on a

$$(5, 8) \qquad \frac{l_{2u}}{l_2} = f\,\frac{\varphi^2 - 2a^2}{a^2}$$

et

$$(5, 9) \qquad \frac{p_{2u}}{p_2} = f + \frac{\varphi\, a_u}{a\,(\varphi^2 - a^2)} - \frac{\varphi\,\dot{\varphi}}{\varphi^2 - a^2}\,^{*},$$

on parvient à l'équation

$$(5, 10) \qquad \frac{b_u}{b} + \frac{a\, a_u}{\varphi^2 - a^2} = \frac{\varphi\,\dot{\varphi}}{\varphi^2 - a^2} - 2\frac{f}{\varphi^2}a^2 + \frac{\dot{f}}{f} - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}.$$

D'autre part de la seconde équation (2, 6) jointe aux (5, 7) et (5, 9) on obtient l'équation

$$(5, 11) \qquad \frac{b_u}{b} + \frac{a\, a_u}{\varphi^2 - a^2} = a^2\left[\frac{1}{f} - \frac{f}{\varphi^2}\right] + \frac{a^2\,\dot{\varphi}}{\varphi\,(\varphi^2 - a^2)}.$$

On aura donc, en vertu des (5, 10) et (5, 11), l'équation

$$(5, 12) \qquad a^2\left[\frac{1}{f} + \frac{f}{\varphi^2}\right] + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} - \frac{\dot{f}}{f} = 0$$

qui montre que la supposition faite, que la dérivée de a par rapport à v soit $\neq 0$, n'est pas compatible avec les conditions (5, 2).

En effet, d'après l'équation (5, 12), à laquelle on parvient en supposant que les conditions (5, 2) soient remplies, et en outre que l'on ait $a_v \neq 0$, a_v doit être $= 0$; car le premier membre de (5, 12) est un polynôme en a, dont les coefficients sont des fonctions de la seule variable u et ces coefficients ne peuvent pas s'annuler tous les deux identiquement, les fonctions f (u), φ (u) étant réelles et $\neq 0$. Donc, dans le cas envisagé, a doit être une fonction de la seule variable u :

$$(5, 13) \qquad a = a(u)$$

et, cela étant, il en est de même, d'après (5, 2) et (5, 4), des p_1, p_2 :

$$(5, 14) \qquad p_1 = p_1(u), \qquad p_2 = p_2(u);$$

par conséquent, p_1, p_2 seront liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation.

---

* Les points désignent les dérivées par rapport à la variable u.

En outre, grâce aux (5, 2), (5, 13) et (5, 14), la condition (3, 1), qui est suffisante afin que la congruence D soit une congruence de Ribaucour, est remplie.

Si, au lieu des conditions (5, 2), les conditions (5, 3) sont remplies, on peut démontrer par des raisonnements pareils aux précédents que b, p_1, p_2 sont nécessairement des fonctions de la seule variable v et que la condition (3, 1) est remplie.

On peut donc énoncer le

Théorème 1. Une congruence hyperbolique dont les nappes focales sont deux surfaces isométriques, les points homologues dans l'isométrie de ces surfaces étant les points focaux des droites de la congruence, est une congruence (M) qui est à la fois une congruence de Ribaucour et une congruence à paramètres distributeurs principaux liès, si aucun d'eux n'est constant, par une relation.

Il est à noter que, si les droites d'une congruence hyperbolique établissent une correspondance isométrique entre ses nappes focales, ces deux surfaces, à moins qu'elles ne soient des surfaces de révolution, sont des hélicoïdes [**7**, p. 119].

Si en second lieu les couples des points-limites des droites de la congruence non isotrope D constituent deux surfaces, S_1', S_2', ces deux surfaces, qui — d'après (2, 8) — seront définies par les équations

$$(5, 15) \qquad \bar{r}_1' = \bar{r}(u, v) + \frac{p_2 - p_1}{2} \bar{l}(u, v), \qquad \bar{r}_2' = \bar{r}(u, v) - \frac{p_2 - p_1}{2} \bar{l}(u, v),$$

sont représentées, l'une sur l'autre, de manière que leurs points homologues dans cette représentation — correspondant à une même système de valeurs des u, v — soient les points-limites des droites de la congruence ; par conséquent les milieux des segments, que les points homologues des deux surfaces déterminent sur les droites de la congruence, coïncident avec les points moyens de ces droites.

Or, si cette représentation des surfaces S_1', S_2', l'une sur l'autre, est isométrique, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 4, D est nécessairement une congruence (M) et les scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2, que les expressions (2, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre de l'équation (1, 2) de la surface moyenne S de D renferment, sont des fonctions des u, v, qui doivent vérifier les équations (1, 7) et (2, 6) et en plus avec $\theta = \frac{p_2 - p_1}{2}$ les équations (4, 4). On aura donc ou bien

$$(5, 16) \quad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad p_2 - p_1 = 2\,\theta(u), \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_2} = \frac{1}{\theta}\,\frac{d\theta}{du} \equiv f(u),$$

ou bien

$$(5, 17) \quad l_1 \neq 0, \quad l_1 = 0, \quad p_2 - p_1 = 2\,\theta'(v), \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_1} = \frac{1}{\theta'}\,\frac{d\theta'}{dv} \equiv f'(v),$$

les fonctions $\theta(u)$, $f(u)$ et $\theta'(v)$, $f'(v)$ des variables u et v respectivement, qui figurent dans ces conditions, étant réelles et $\neq 0$, puisque D est, par hypothèse, une congruence non isotrope.

Si les conditions (5, 16) sont remplies, de la première équation (2, 6) qui, grâce aux (5, 16) devient

$$(5, 18) \qquad p_{1v} = 2\,\theta(u)\,\frac{a_v}{a},$$

résulte que, *si en plus* $a_v \neq 0$, p_1 et, d'après la troisième relation (5, 16), p_2 seront des fonctions de a et de la variable u de la forme :

$$(5, 19) \quad p_1 = 2\,\theta(u)\log a + \theta_1(u), \quad p_2 = 2\,\theta(u)\log a + \theta_1(u) + 2\,\theta(u).$$

En outre, dans ce cas, de la relation

$$(5, 20) \qquad l_2 = 2ab\,\frac{\theta^2}{\dot{\theta}},$$

à laquelle on parvient en éliminant $p_2 - p_1$ entre les deux dernières relations (5, 16), en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en tenant compte que, grâce aux (5, 16), (5, 19) et à la troisième équation (2, 6), on a

$$(5, 21) \qquad \frac{l_{2u}}{l_2} = -\,\frac{\dot{\theta}}{\theta^2}\left\{2\,\theta\log a + \theta_1 + \theta\right\},$$

on obtient l'équation

$$(5, 22) \qquad \frac{a_u}{a} + \frac{b_u}{b} = -\,2\,\frac{\dot{\theta}}{\theta}\log a - \theta_1\,\frac{\dot{\theta}}{\theta^2} - 3\,\frac{\dot{\theta}}{\theta} + \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}.$$

D'autre part la seconde équation (2, 6), si l'on y remplace $p_2 - p_1$

et l_2 par leurs valeurs (5, 16) et (5, 20) et que l'on tienne compte que, d'après la seconde relation (5, 19), on a $p_{2u} = 2\dot{\theta}\log a + 2\theta\frac{a_u}{a} + \dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}$, acquiert la forme :

$$\frac{a_u}{a} + \frac{b_u}{b} = -\frac{\dot{\theta}}{\theta}\log a + a^2\frac{\theta}{\dot{\theta}} - \frac{\dot{\theta}_1}{2\theta} - \frac{\dot{\theta}}{\theta}. \tag{5, 23}$$

On aura donc, en vertu des (5, 22) et (5, 23), l'équation :

$$\frac{\theta}{\dot{\theta}}a^2 + \frac{\dot{\theta}}{\theta}\log a + 2\frac{\dot{\theta}}{\theta} - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} + \theta_1\frac{\dot{\theta}}{\theta^2} - \frac{\dot{\theta}_1}{2\theta} = 0 \tag{5, 24}$$

et de cette équation, qui a été obtenue en supposant que les conditions (5, 16) soient remplies et en plus que la dérivée de a par papport à v soit $\neq 0$, on déduit, compte tenu que les fonctions $\theta(u)$ et $f(u) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$ sont toutes les deux $\neq 0$, que les deux suppositions faites ne sont pas compatibles.

Donc, si les conditions (5, 16) sont remplies, a est nécessairement une fonction de la seule variable u et, cela étant, il en est de même, en vertu des (5, 16) et (5, 18), des p_1, p_2 qui, par conséquent, seront liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation.

En outre, dans ce cas, la condition (3, 1) — qui est suffisante afin que la congruence D soit une congruence de Ribaucour — grâce aux (5, 16) et au fait que a, p_1, p_2 sont des fonctions de la seule variable u, est remplie.

Si, au lieu des conditions (5, 16), les conditions (5, 17) sont remplies, des raisonnements pareils aux précédents, conduisent à la constatation que b, p_1, p_2 doivent être des fonctions de la seule variable v et que la condition (3, 1) est également remplie.

On peut donc formuler le

Théorème II. Une congruence non isotrope, dont les droites établissent une correspondance isométrique entre les deux surfaces lieux des points-limites de ces droites, est une congruence (M) de Ribaucour à paramètres distributeurs principaux liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation.

Remarque.— Si la congruence — qui, ayant comme surface directrice sa surface moyenne, est définie par l'équation (1, 1) — est une congruence (M) hyperbolique dont les droites établissent une correspondance isométrique soit entre ses nappes focales soit entre les deux surfaces lieux des points-limites de ces droites, deux surfaces isométriques qui lui sont attachées, d'après ce qui est exposé dans les paragraphes 2 et 4, seront définies par les équations qui s'obtiennent des deux équations (4, 1) en y remplaçant θ par $c\sqrt{-p_1 p_2}$ ou par $c(p_2 - p_1)$ respectivement, où c est une constante $\neq 0$.

Or, dans le cas particulier où les droites de la congruence établissent une correspondance isométrique d'une part entre ses nappes focales et d'autre part entre les deux surfaces lieux de leurs points-limites, p_1, p_2 seront liés par une relation de la forme

$$1 - \frac{p_1}{p_2} = c\sqrt{-\frac{p_1}{p_2}},$$

où c est une constante $\neq 0$.

Donc, *dans ce cas particulier, les paramètres distributeurs principaux* p_1, p_2 *de la congruence seront liés par une relation de la forme* $Ap_1 + Bp_2 = 0$, *où* A, B *sont des constantes* $\neq 0$ *et telles que* $\frac{A}{B}$ *soit* $\neq -1$.

6. Les théorèmes établis dans le paragraphe précédent expriment des conditions suffisantes afin qu'une congruence (M) soit à la fois une congruence de Ribaucour et une congruence dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par une relation. Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes afin qu'une congruence (M) ayant une des deux propriétés signalées, jouisse nécessairement de l'autre.

A cet effet nous allons supposer que la congruence considérée D soit une congruence ni parabolique ni isotrope, dont la surface moyenne est définie à une translation près par les équations (2, 5), les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par ses droites étant ses surfaces distributrices principales.

Si en premier lieu les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de la congruence D sont liés par la relation

$$p_2 = p_2(p_1), \tag{6, 1}$$

où, d'après les suppositions faites, $p_2(p_1) \neq p_1$ et $\neq 0$, les fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans les équations (2, 5) et vérifient les équations (1, 7) et (2, 6), doivent vérifier en plus, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 4, les équations (4, 5) ou (4, 6). On aura donc ou bien

$$(6,2) \qquad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_2} = f\,(u),$$

ou bien

$$(6,3) \qquad l_1 \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_1} = f'(v),$$

les fonctions f (u) et f′ (v) étant $\neq 0$, puisque D est une congruence non isotrope.

Or, *si les conditions (6, 2) sont remplies,* la première équation (2, 6), grâce aux (6, 1) et (6, 2), acquiert la forme

$$(6,4) \qquad \frac{p_{1v}}{p_2(p_1) - p_1} = \frac{a_v}{a}$$

et si

$$(6,5) \qquad \frac{\partial a}{\partial v} \neq 0,$$

l'équation (6, 4) montre que a doit être une fonction de p_1 et de la variable u de la forme :

$$(6,5) \qquad a = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(p_1).$$

Cela étant le paramètre u peut être choisi de manière que le coefficient a, qui figure dans l'expression (1, 8) du carré de l'élément linéaire de l'image sphérique de la conguence D, soit une fonction de p_1 : $a = a(p_1)$, les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de D étant ses surfaces distributrices principales.

Cela étant, p_1 et, en vertu de (6, 1), p_2 seront des fonctions du seul coefficient a :

$$(6,6) \qquad p_1 = p_1(a), \qquad p_2 = p_2(a),$$

qui, d'après (6, 4) et (6, 5), doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$(6,7) \qquad \frac{dp_1}{da} = \frac{p_2 - p_1}{a}.$$

En outre de la dernière relation (6, 2), en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en ayant égard aux (6, 1), (6, 7) et au fait que, grâce aux (6, 2) et à la dernière équation (2, 6), on a

$$\frac{l_{2u}}{l_2} = f(u)\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}, \tag{6, 8}$$

on parvient à l'équation

$$\frac{b_u}{b} + \frac{a_u}{a}\frac{dp_2}{dp_1} = f(u)\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} + \frac{\dot{f}}{f}. \tag{6, 9}$$

Par ailleurs la seconde équation (2, 6), à l'aide des (6, 1), (6, 2) et (6, 7), affecte la forme

$$\frac{b_u}{b} + \frac{a_u}{a}\frac{dp_2}{dp_1} = \frac{a^2}{f}. \tag{6, 10}$$

On aura donc, en vertu des (6, 9) et (6, 10), l'équation

$$\frac{p_1 + p_2}{p_2 - p_2} = \frac{a^2}{f^2} - \frac{\dot{f}}{f^2}, \tag{6, 11}$$

qui montre que, dans le cas envisagé, si $a_v \neq 0$, la relation (6, 1) entre p_1, p_2 ne peut pas être de forme $p_1 + p_2 = 0$ et en outre que la fonction $f(u)$ qui figure dans la dernière relation (6, 2), doit être une constante $\neq 0$, lorsque le paramètre u est tel que p_1, p_2 soient des fonctions du seul coefficient a, les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par les droites de la congruence étant ses surfaces distributrices principales.

Donc, dans ce cas, on a nécessairement

$$p_1 + p_2 \neq 0, \qquad \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = \frac{a^2}{c_1^2} \tag{6, 12}$$

où c_1 est une constante $\neq 0$.

Cela étant, de la seconde équation (6, 12), en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à v de ses deux membres et en ayant égard aux (6, 1), (6, 5), (6, 6) et (6, 7), on obtient l'équation

$$\{p_2 - p_1\} \cdot \frac{d}{dp_1}\left[\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\right] - 2\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = 0$$

et de cette équation, qui, si l'on tient compte que l'on a, par hypothèse, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $p_2 - p_1 \neq 0$ et, d'après (6, 12), $p_1 + p_2 \neq 0$, devient

$$1 + \frac{dp_2}{dp_1} = 0,$$

on déduit que, dans le cas envisagé, la dérivée de a par rapport à v n'est $\neq 0$ que seulement dans le cas ou la relation (6, 1) entre p_1, p_2 est de la forme

$$p_1 + p_2 = \mathrm{Cte} \neq 0. \tag{6, 13}$$

Donc a est nécessairement une fonction de la seule variable u et, cela étant, il en est de même, d'après (6, 1), des p_1, p_2 lorsque la relation (6, 1) entre p_1, p_2 n'est pas de forme $p_1 + p_2 = \mathrm{Cte} \neq 0$.

En outre, si p_1, p_2, a sont des fonctions de la seule variable u, il en est de même, d'après la dernière relation (6, 2), de $\frac{l_2 a}{p_2 b}$ et, cela étant, la condition (3, 1) qui est suffisante afin que la congruence D soit une congruence de Ribaucour et, en vertu des (6, 2) devient $\left[\frac{l_2 a}{p_2 b}\right]_v = 0$, est remplie.

Si, au lieu des conditions (6, 2), les conditions (6, 3) sont remplies, on peut constater par des raisonnements pareils aux précédents, que b, p_1, p_2 sont nécessairement des fonctions de la seule variable v et que la condition (3, 1) est remplie, lorsque la relation (6, 1) entre p_1, p_2 n'est pas de forme $p_1 + p_2 = \mathrm{Cte} \neq 0$.

On peut donc, en tenant compte en outre du fait qu'une congruence (M) dont les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 sont liés par la relation $p_2 - p_1 = 0$ est isotrope et que, par conséquent, elle est une congruence de Ribaucour, énoncer le

T h é o r è m e *III. Une congruence (M) non parabolique, dont les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 sont liés par une relation, est nécessairement une congruence de Ribaucour, lorsque la relation entre p_1, p_2 n'est pas de forme $p_1 + p_2 =$ Cte.*

Si en second lieu la congruence considérée D est une congruence (M) de Ribaucour non isotrope, les fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans les équations (2, 5) de sa surface moyenne S et vérifient les équations (1, 7) et (2, 6), doivent vérifier en plus, d'après ce qui est exposé dans les paragraphes 3 et 4, l'équation (3, 1) et les équations (4, 5) ou (4, 6). On aura donc ou bien

$$(6,14) \qquad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_2} = f\,(u) \neq 0, \quad \frac{l_2 a}{p_2 b} = \sigma\,(u) \neq 0,$$

ou bien

$$(6,15) \qquad l_1 \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad \frac{ab\,(p_2 - p_1)}{l_1} = f'(v) \neq 0, \quad \frac{l_1 b}{p_1 a} = \sigma'(v) \neq 0.$$

Si les conditions (6, 14) sont remplies, en éliminant $\frac{l_2}{b}$ entre les deux dernières de ces relations, in vient

$$(6,16) \qquad a^2\left[1 - \frac{p_1}{p_2}\right] = f \cdot \sigma \equiv \sigma_1(u) \neq 0\,.$$

Or, si

$$(6,17) \qquad a_v \neq 0\,,$$

d'après la première équation (2, 6) qui, dans le cas envisagé, à l'aide des (6, 14) et (6, 16), acquiert la forme $\{p_1 p_2\}_v = 0$, le produit $p_1 \cdot p_2$ doit être une fonction de la seule variable u :

$$(6,18) \qquad p_1 \cdot p_2 = \varphi(u) \neq 0\,.$$

De cette relation jointe à la relation (6, 16) on obtient pour p_1^2, p_2^2 les expressions

$$(6,19) \qquad p_1^2 = \varphi\,\frac{a^2 - \sigma_1}{a^2}\,, \qquad p_2^2 = \varphi\,\frac{a^2}{a^2 - \sigma_1}\,.$$

En outre de la dernière relation (6, 14), en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en tenant compte que, grâce aux (6, 14), (6, 19) et à la dernière équation (2, 6), on a

$$\frac{l_{2u}}{l_2} = \frac{\sigma_1 - 2a^2}{\sigma}\,, \qquad \frac{p_{2u}}{p_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot\varphi}{\varphi} + \frac{\dot\sigma_1}{a^2 - \sigma_1} - 2\,\frac{a_u\,\sigma_1}{a\,(a^2 - \sigma_1)}\right],$$

on parvient à l'équation

$$(6,20) \qquad \frac{b_u}{b} - \frac{a_u}{a^2 - \sigma_1} = \frac{\sigma_1 - 2a^2}{\sigma} - \frac{\dot\sigma_1}{2a\,(a^2 - \sigma_1)} + \frac{1}{2}\,\frac{\dot\varphi}{\varphi} - \frac{\dot\sigma}{\sigma}\,.$$

Par ailleurs la seconde équation (2, 6) jointe aux (6, 14) et (6, 19) conduit à l'équation

$$(6,\ 21)\qquad \frac{b_u}{b} - \frac{a_u}{a^2 - \sigma_1} = a^2\left[\sigma - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right] + a^2\,\frac{\dot{\sigma}_1}{2\sigma_1(a^2 - \sigma_1)}\,.$$

On aura donc en vertu des (6, 20) et (6, 21), l'équation

$$(6,\ 22)\qquad a^2\left[\frac{1}{2}\,\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} - \sigma - 2\,\frac{\sigma_1}{\sigma}\right] + \frac{\sigma_1}{\sigma} - \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma} + \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right] = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme en a.

Les coefficients de ce polynôme sont des fonctions de la seule variable u et ces coefficients, d'après (6, 17), doivent être tous les deux $\equiv 0$. Donc, dans le cas envisagé, afin que l'on ait $a_v \not\equiv 0$, il faut que les fonctions $f = \frac{\sigma_1}{\sigma}$, σ et φ de la variable u vérifient les deux équations différentielles

$$(6,\ 23)\qquad \frac{1}{2\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} - \sigma - 2f = 0\,, \qquad \frac{1}{f}\,\frac{df}{du} - \frac{1}{\sigma}\,\frac{d\sigma}{du} - \frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} + 2f = 0.$$

Ces deux équations sont incompatibles —comme on le constate aussitôt— lorsque la fonction $\varphi(u)$, qui figure dans l'équation (6, 18), est une constante ; donc, si $a_v \not\equiv 0$, la relation (6, 18) entre p_1, p_2 ne peut pas être de forme :

$$(6,\ 24)\qquad p_1 \cdot p_2 = \text{Cte} \not\equiv 0\,.$$

Par ailleurs, si $\frac{d\varphi}{du} \not\equiv 0$, afin que a_v puisse être $\not\equiv 0$, il faut que les fonctions f, σ de la variable u, que les relations (6, 14) renferment, vérifient l'équation différentielle

$$(6,\ 25)\qquad \frac{1}{f}\,\frac{df}{du} - \frac{1}{\sigma}\,\frac{d\sigma}{du} - 2(\sigma + f) = 0\,,$$

à laquelle on parvient en éliminant $\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{du}$ entre les deux équations (6,23).

Donc a est néssairement une fonction de la seule variable u toutes les fois que les fonctions f (u), σ (u) ne vérifient pas l'équation (6, 25). Dans ce cas p_1, p_2 seront liès, si aucun d'eux n'est constant, par une relation, car, si $a_v = 0$, p_1, p_2, en vertu des (6, 14) et (2, 6), sont des fonctions de la seule variable u.

Il est à remarquer que, dans les cas envisagé, p_1, p_2 sont nécessairement des fonctions des u, v indépendantes l'une de l'autre, lorsque la dérivée de a par rapport à v est $\neq 0$.

En effet, si $a_v \neq 0$ et que p_1, p_2 soient liés par une relation, $F(p_1, p_2) = 0$, de cette relation, qui, d'après la constatation précédente ne peut pas être de forme $p_1, p_2 = Cte$, jointe à la relation (6, 18) on déduit que p_1, p_2 doivent être des fonctions de la seule variable u. Mais, si $p_1 = p_1(u)$, $p_2 = p_2(u)$, la première équation (2, 6) qui, en vertu des (6, 14), devient $p_{1v} = -(p_1 - p_2)\dfrac{a_v}{a}$, n'est vérifiée que si l'on a $a_v = 0$; ce qui montre que dans le cas envisagé, les deux hypothèses faites sont incopatibles. Donc, *si p_1, p_2 sont liés par une relation, a est nécessairement une fonction de la seule variable u.*

Si, au lieu des conditions (6, 14), les conditions (6, 15) sont remplies, on peut démontrer par des raisonnements pareils aux précédents, que b, p_1, p_2 sont des fonctions de la variable v toutes les fois que les fonctions $f'(v)$, $\sigma'(v)$, que les conditions (6, 15) renferment, ne vérifient pas l'équation différentielle

$$\frac{1}{f'}\,\frac{df'}{dv} - \frac{1}{\sigma'}\,\frac{d\sigma'}{dv} - 2(\sigma' + f') = 0 .$$

On peut donc, grâce aux constatations précedentes, formuler le

T h é o r è m e IV. Si la surface moyenne d'une congruence (M) de Ribaucour non isotrope — réferée à deux paramètres u, v, tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales — est définie à une translation près par deux équations de la forme (2, 5), des six fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, que ces équations renferment, une seule des deux dernières, l_1, l_2 est nécessairement = 0 et les paramètres, auxquels la congruence est référée, peuvent être toujours désignés par u et v de manière que l'on ait $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$. Cela étant $\dfrac{a\,b\,(p_2 - p_1)}{l_2} \equiv f$ et $\dfrac{l_2\, a}{p_2\, b} \equiv \sigma$ sont des fonctions de la seule variable u et une condition suffisante, afin que les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de la congruence soient *liés par une relation, est que f, σ soient des fonctions de la variable u, qui ne vérifient pas l'équation différentielle (6, 25).*

7. Supposons enfin la congruence D définie par l'équation (1, 1) soit une congruence (M) de Ribaucour non isotrope et que les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales.

D'après le théorème IV, dans les équations de la forme (2, 5), qui déterminent à une translation près la surface moyenne S de cette congruence, on aura ou bien $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ ou bien $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$ et on peut se borner au premier de ces deux cas.

Si les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, de D sont liés par une relation, d'après la remarque faite dans le paragraphe 6, p_1, p_2 et a seront des fonctions de la seule variable u, puisque, par hypothèse, on a $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ et, cela étant, on peut supposer en plus que la variable u soit telle que l'on ait :

$$a = 1 . \tag{7, 1}$$

Ainsi dans les équations (2, 5) on aura

$$a = 1 , \quad p_1 = p_1(u) , \quad p_2 = p_2(u) , \quad l_1 = 0 , \quad l_2 \neq 0 . \tag{7, 2}$$

En outre $\frac{l_2}{b}$, grâce aux (7, 2), est une fonction de la seule variable u :

$$\frac{l_2}{b} \equiv F(u) , \tag{7, 3}$$

car, dans le cas envisagé, $\frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2}$ et $\frac{l_2 a}{p_2 b}$ sont nécessairement, d'après le théorème IV, des fonction de la seule variable u.

De même $\frac{l_{2u}}{l_2}$, en vertu des (7, 2), (7, 3) et de la troisième équation (2, 6), est une fonction de la seule variable u :

$$\frac{l_{2u}}{l_2} = - \frac{p_1 + p_2}{F(u)} \equiv \varphi(u) .$$

Donc l_2 et, d'après (7, 3), b seront nécessairement des fonctions des u, v de la forme

(7, 4) $l_2 = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(v)$, $b = \sigma_1(u)\, \varphi_2(v)$,

la fonction $\sigma_1(u)$, que la seconde des (7, 4) renferme, étant nécessairement de la forme : $\sigma_1 = c_1 \cdot \cos(u + c)$, où c_1, c sont des constantes dont au moins la première est $\neq 0$, car σ_1 doit satisfaire à l'équation différentielle $\frac{d^2 \sigma_1}{du_2} + \sigma_1 = 0$, à laquelle se ramène, grâce aux (7, 1) et (7, 4), l'équation (1, 7).

On en déduit que, dans le cas envisagé, on peut réferer la congruence à deux paramètres u, v tels que les conditions (7, 2) soient remplies, tandis qu'en même temps on a

(7, 5) $l_2 = l_2(u)$, $b = \cos u$, $a = 1$,

les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de la congruence étant ses surfaces distributrices principales et de donner ainsi au carré de l'élément linéaire de l'image sphérique de cette congruence la forme

(7, 6) $$d\sigma^2 = du^2 + dv^2 \cos^2 u\,;$$

ce qui montre que les images sur la surface de la sphère-unité des surfaces distributrices principales u = Cte, v = Cte de la congruence, dans sa représentation sphérique, sont ∞^1 cercles parallèles et les méridiens qui coupent ces cercles à angle droit.

D'autre part, si le réseau des images sur la surface de la sphère-unité des surfaces distributrices principales de la congruence D qui, par hypothèse, est une congruence (M) de Ribaucour non isotrope, dans sa représentation sphérique, est formé par un système de ∞^1 cercles parallèles et les méridiens qui coupent ces cercles à angle droit, on peut donner, par un choix convenable des paramètres u, v, au carré de l'élément linéaire de l'image sphérique de la congruence D la forme (7, 7), les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de cette congruence étant ses surfaces distributrices principales.

Ainsi dans les équations (2, 5) de la surface moyenne de la congruence D on aura

(7, 8) $a = 1$, $b = \cos u$

et en plus d'après le théorème IV, ou bien $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ on bien $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$.

Mais, si

(7, 9) $$l_1 \neq 0, \qquad l_2 = 0,$$

$\dfrac{l_1 b}{p_1 a}$ et $\dfrac{ab(p_2 - p_1)}{l_1}$, d'après ce qui est exposé dans les paragraphes 3 et 4, seront des fonctions de la seule variable v.

On aura donc, en vertu des (7, 8),

(7, 10) $$\frac{l_1}{p_1} \cdot \cos u = f(v) \neq 0, \qquad \frac{p_2 - p_1}{l_1} \cdot \cos u = \sigma(v) \neq 0$$

et on déduit de là, eu égard que les fonctions $f(v)$, $\sigma(v)$ sont toutes les deux $\neq 0$, que $\dfrac{p_2}{p_1}$ ne peut pas être indépendant de la variable u.

En effet, en éliminant l_1 entre les deux relations (7, 10) on obtient pour $\dfrac{p_2}{p_1}$ l'expression :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{f(v) \cdot \sigma(v)}{\cos^2 u}.$$

D'autre part de la première relation (7, 10), en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à v de ses deux membres et en tenant compte que, grâce aux (2, 6), (7, 8) et (7, 10), on a $\dfrac{p_{1v}}{p_1} = - f(v)$, $\dfrac{l_{1v}}{l_1} = \sigma(v) \dfrac{p_1 + p_2}{p_2 - p_1}$, on parvient à l'équation $\sigma(v) \dfrac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \dfrac{1}{f} \dfrac{df}{dv} - f$, qui montre que $\dfrac{p_2}{p_1}$, à moins qu'il ne soit constant, doit être une fonction de la seule variable v.

Il en résulte que, dans le cas envisagé, les conditions (7, 10) qui doivent être remplies, si $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, jointes, aux équations (2, 6) conduisent à des résultats contradictoires et que, par conséquent, on aura nécessairement $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$.

Mais, si

(7, 11) $$a = 1, \qquad b = \cos u, \qquad l_1 = 0, \qquad l_2 \neq 0,$$

d'après le théorème IV, il faut que l'on ait

(7, 12) $$\frac{p_2 - p_1}{l_2} \cos u = \sigma(u) \neq 0, \qquad \frac{l_2}{p_2 \cos u} = f(u) \neq 0.$$

Ces conditions jointes aux équations (2, 5) montrent que p_1, p_2 sont nécessairement des fonctions de la seule variable u et que, par conséquent, ils sont liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation.

En effet on déduit aussitôt de la première équation (2, 6) qui, grâce aux (7, 11), devient $p_{1v} = 0$, que p_1 est une fonctions de la seule variable u, tandis qu'il en est de même, d'après les conditions (7, 12), de $\frac{p_1}{p_2}$:

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 - f(u) \cdot \sigma(u).$$

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le :

T h é o r è m e V. *Afin que les paramètres distributeurs principaux d'une congruence (M) de Ribaucour non isotrope soient liés par une relation, il faut et il suffit que les images sur la surface de la sphère-unité des deux systèmes de surfaces distributrices principales de la congruence, dans sa représentation sphérique, soient* ∞^1 *cercles parallèles et les méridiens qui coupent ces cercles à angle droit.*

D'après le théorème V, la congruence considérée D, en cas qu'elle soit une congruence (M) de Ribaucour non isotrope à paramètres distributeurs principaux liés par une relation, peut être référée à deux paramètres u, v tels que le carré de l'élément linéaire de son image sphérique soit de la forme (7, 7), les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites étant ses surfaces distributrices principales.

Ainsi les équations (2, 5) qui expriment les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface directrice S de D, dans le cas où S est sa surface moyenne, en vertu des (7, 1), (7, 11) et (7, 12), prennent la forme

$$(7, 13) \qquad \bar{r}_u = p_1(u)\,\bar{g}\,, \qquad \bar{r}_v = -\,p_2(u)\cdot\cos u\cdot\bar{t} + l_2(u)\,\boldsymbol{l}\,.$$

Des équations (7, 13) jointes aux équations

$$(7, 14) \qquad \bar{r}_{u^2} = \dot{p}_1\,\bar{g}\,, \qquad \bar{r}_{v^2} = \{p_2\sin u + l_2\}\cdot\cos u\,\bar{g}\,,$$

auxquelles on parvient en différentiant la première de ces équations par rapport à u et la seconde par rapport à v et en ayant égard aux (1, 3), (1, 6) et (7, 11), on déduit que le second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface S doit satisfaire aux équations

$$(7,\,15)\qquad \bar{r}_{u^2} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0, \quad \bar{r}_{v^2} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0, \quad \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0,$$
$$\bar{r}_{u^2} \wedge \bar{r}_u = 0$$

et que, par conséquent, S *est nécessairement une surface minima reglée,* car les deux premières équations (7, 15) expriment que les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur S sont ses lignes asymptotiques et la trosième que le réseau formé par ces courbes est orthogonal, tandis que, d'après la quatrième, les courbes $v = Cte$ sont des droites.

Donc *la surface moyenne de la congruence, à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minima reglé.*

Par ailleurs les équations (3, 3) qui déterminent à une translation près une surface génératrice S′ de la congruence D, lorsque le scalaire ϱ que ces équations renferment, est une fonction des u, v satisfaisant aux équations (2, 3) qui, dans le cas envisagé, sont compatibles, prennent, grâce aux (7, 2) et (7, 5), la forme

$$(7,\,16)\qquad \bar{r}'_u = \varrho\, p_1(u)\, \bar{t}\,, \qquad \bar{r}'_v = \varrho\, p_2(u) \cdot \cos u \cdot \bar{g}\,,$$

où ϱ est également une fonction de la seule variable u, puisque les équations (3, 2) auxquelles ϱ doit satisfaire, grâce aux (7, 2) et (7, 5), deviennent

$$\frac{\varrho_u}{\varrho} = -\frac{l_2(u)}{p_2(u) \cdot \cos u}\,, \qquad \varrho_v = 0\,.$$

On aura donc pour les coefficients E′, F′, G′ de la première forme différentielle fondamentale de la surface S′, en vertu des (7, 16) les expressions

$$E' = \varrho^2 p_1^{\,2} \equiv E'(u)\,, \qquad F' = 0\,, \qquad G' = \varrho^2 p_2^{\,2} \cdot \cos^2(u) \equiv G'(u)\,,$$

qui montrent que le réseau formé par les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur la surface S′ est isotherme, tandis que les courbes $v = Cte$ sont des géodésiques de cette surface. En outre les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur S′ sont ses lignes de courbure, car elles correspondent, dans la représentation de la surface S′ sur la surface moyenne S de la congruence signalée dans le paragraphe 3, aux courbes tracées sur la surface S, que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur elle [**6**, p. 134]. Donc S′ est une surface isothermique dont les lignes de courbure de l'un système sont des géodésiques et, par conséquent, elle est nécessairement une surface de révolution [**4**, p. 329].

On peut donc formuler le:

Théorème VI. La surface moyenne d'une congruence (M), qui est à la fois une congruence de Ribaucour non isotrope à paramètres distributeurs principaux liés par une relation, à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minima reglé et ses surfaces génératrices sont des surfaces de révolution.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

῾Η ἐργασία αὕτη ἀναφέρεται εἰς εἰδικάς τινας κατηγορίας σμηνῶν πραγματικῶν εὐθειῶν τοῦ συνήθους τριδιαστάτου χώρου, μεταξὺ τῶν κυρίων παραμέτρων διανομῆς ἑκάστου τῶν ὁποίων ὑπάρχει σχέσις, χαρακτηριζομένων δὲ ὑπὸ τῆς ἑξῆς ἰδιότητος: εἰς ἓν τοιοῦτο σμῆνος ἀντιστοιχοῦν ∞^1 ζεύγη ἐπιφανειῶν, τῶν ἐπιφανειῶν ἑκάστου ζεύγους ἀπεικονιζομένων τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης ἰσομετρικῶς, οὕτως ὥστε αἱ ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην σημείων τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν ὁριζόμεναι εὐθεῖαι εἶναι αἱ εὐθεῖαι τοῦ σμήνους, τὰ δὲ μέσα τῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων ὁριζομένων ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν ἐπιφανειῶν ἑκάστου ζεύγους τμημάτων κεῖνται ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ σμήνους. Εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην τὰ ἔχοντα τὴν προαναφερομένην ἰδιότητα σμήνη, συντομίας χάριν, καλοῦνται σμήνη (M), εἰς δὲ τὰς πρώτας παραγράφους αὐτῆς, εἰς τὰς ὁποίας ἐκτίθενται στοιχεῖά τινα ἀπαραίτητα διὰ τὰς ἑπομένας, δίδεται πρὸς τοῖς ἄλλοις συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία, ἵνα σμῆνος, ὁριζόμενον καταλλήλως ἀναλυτικῶς, εἶναι σμῆνος (M). ᾿Ακολούθως ἀποδεικνύονται δύο θεωρήματα ἀναφερόμενα τὸ μὲν πρῶτον εἰς τὰ ὑπερβολικὰ σμήνη, αἱ ἑστιακαὶ χῶναι ἑκάστου τῶν ὁποίων ἀπεικονίζονται ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης ἰσομετρικῶς διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὰ μὴ ἰσότροπα σμήνη, διὰ τῶν εὐθειῶν ἑκάστου τῶν ὁποίων ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς, ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, αἱ δύο ἐπιφάνειαι-τόποι τῶν ὁρικῶν σημείων τῶν εὐθειῶν τούτων, ἐκφράζοντα δὲ συνθήκας ἱκανὰς ἵνα σμῆνος (M) εἶναι συγχρόνως σμῆνος τοῦ Ribaucour καὶ σμῆνος, μεταξὺ τῶν κυρίων παραμέτρων διανομῆς τοῦ ὁποίου ὑπάρχει σχέσις. ᾿Εν συνεχείᾳ ἀποδεικνύονται θεωρήματα ἐκφράζοντα συνθήκας ἱκανάς, ἵνα σμῆνος (M), ἔχον τὴν μίαν τῶν δύο προαναφερομένων ἰδιοτήτων, ἔχῃ ἀναγκαστικῶς καὶ τὴν ἄλλην. ᾿Εν τέλει δίδεται συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία, ἵνα ὑπάρχῃ σχέσις μεταξὺ τῶν κυρίων παραμέτρων διανομῆς σμήνους (M), τὸ ὁποῖον ἐπὶ πλέον εἶναι σμῆνος τοῦ Ribaucour μὴ ἰσότροπον καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μὲν μέση ἐπιφάνεια ἑνὸς τοιούτου σμήνους, ἐὰν δὲν εἶναι ἐπίπεδος, εἶναι κατ' ἀνάγκην εὐθειογενὴς ἑλικοειδὴς ἐλαχίστης ἐκτάσεως, αἱ δὲ γεννήτριαι ἐπιφάνειαι αὐτοῦ εἶναι ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, (Teubner) 1910.
2. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, (Springer) 1924.
3. H. Milloux et P. Vincensini, Sur une méthode vectorielle d'étude des congruences de droites et quelques-unes de ses applications, Bull. Sc. Math. S. 2, 94 (1970), p. 5 à 24.
4. O. Pylarinos, Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution, Ann. di Mat. pura ed. Applic. S. IV, Vol. LIX (1962), p. 319 - 350.
5. ———, Sur un type spécial de congruences de droites, Praktika Acad. Athènes, 49 (1974), p. 160 - 186.
6. Ram Behari and R. Mishra, On the congruences of Ribaucour, Proc. of the Acad. of Sciences (India), sect. A. 28 (1948), p. 132 - 145.
7. A. Schur, Über diejenigen Strahlensysteme deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden, Math. Zeitschr. 19 (1924), p. 114 à 127.