Ἂν καὶ ζῇς, σεβαστὲ φίλε καὶ συνάδελφε, μακρὰν τῆς Ζακύνθου, διὰ τῆς φαντασίας μετατίθεσαι ἀδιακόπως εἰς τὴν νῆσον τῆς Φαρμακωμένης, τῆς Στέλας Βιολάντη καὶ τῆς Φωτεινῆς Σάντρη. Καὶ ὅπως ὅλα τὰ τέκνα τῆς ἰδιαιτέρας πατρίδος σου, νοσταλγεῖς καὶ σὺ πάντοτε τὴν Ζάκυνθον καὶ μάλιστα τὴν Ζάκυνθον τῶν παιδικῶν σου χρόνων, ὅταν *ἤσουνα πολὺ μικρὸς γιὰ νὰ ρωτήσῃς καὶ πολὺ πιὸ μικρὸς γιὰ νὰ σοῦ εἰποῦν ἀρώτητα ποιὰ ἦτο ἡ ὡραία Ἀθανασία, τὸ ὄνειρον τῆς αὐγούλας σου ζωῆς.*

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ.—Περί τινος μεθόδου ὁλοκληρώσεως τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τοῦ Hamilton τῆς Δυναμικῆς, *ὑπὸ* ***Α. Τζώρτζη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Πᾶν πρόβλημα ὁλοκληρώσεως ἀνάγεται ὡς γνωστὸν εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν τῶν ὁλοκληρωτικῶν πολλαπλοτήτων μιᾶς δεδομένης δέσμης ἀπειροστικῶν μετασχηματισμῶν, ἢ τῶν ὁλοκληρωτικῶν πολλαπλοτήτων ἑνὸς δεδομένου συστήματος ἐξισώσεων τοῦ Pfaff.

Εἰς προηγουμένας ἐργασίας μου[1] ἐμελέτησα, βάσει τῆς θεωρίας τῶν δεσμῶν ἀπειρ. μετασχ. τοῦ κ. Vessiot[2], τὸ πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως γενικῶν τινων κατηγοριῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους, εἰς δύο δὲ τῶν ἐργασιῶν μου τούτων[3] κατέδειξα ὅτι δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ θεωρίας ἐπανευρίσκομεν κατὰ τρόπον συντομώτερον καὶ κομψότερον τὰ ἐξαγόμενα τὰ ἐκτειθέμενα ὑπὸ τοῦ Goursat εἰς τὰ κλασικά του συγγράμματα.

Μετὰ τῆς αὐτῆς ἐπιτυχίας θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν θεωρίαν τῶν δεσμῶν ἀπειρ. μετασχ. καὶ εἰς τὴν μελέτην πλείστων προβλημάτων τῆς Μηχανικῆς, ἰδίᾳ τῶν σχετιζομένων μὲ συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως εἶναι ἡ μελέτη, βάσει τῆς θεωρίας ταύτης, τοῦ προβλήματος τῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τοῦ Hamilton τῆς Δυναμικῆς, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ θεμελιῶδες ἀναλυτικὸν ὄργανον τῆς θεωρητικῆς Μηχανικῆς.

---

* **A. TSORTSIS, Sur une méthode d'intégration des équations canoniques d'Hamilton de la Dynamique.**

[1] Α. ΤΖΩΡΤΖΗ, α) Thèse Paris 1933. β) *Comptes rendus* **196** (1933), pp. 159, 990. γ) *Πρακτικὰ Ἀκαδ. Ἀθηνῶν* **9** (1934), σ. 46 καὶ *Δελτ. Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρ.*, **16** (1935), σ. 188.

[2] E. VESSIOT, Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **52** (1924), p. 336.

[3] Α. ΤΖΩΡΤΖΗ, *Δελτ. Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρ.*, **18** (1938), σ. 1 καὶ **21** (1941), σ. 42.

Τὸ πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἐκεῖνο τῆς ὁλοκληρώσεως μιᾶς δέσμης ἀπειρ. μετασχημ., τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ἑνὸς διακεκριμένου μετασχ. τῆς δέσμης ταύτης. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν ἓν θεμελιῶδες σύστημα ἀναλλοιώτων τοῦ τελευταίου τούτου μετασχ., ἵνα ἔχωμεν τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τοῦ Hamilton.

Ἐφαρμογὴν τῶν πορισθέντων ἐξαγομένων κάμνομεν εἰς τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν τῆς κινήσεως ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ἀπωθουμένου ὑπὸ σταθεροῦ κέντρου ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως.

2. Ἔστω τυχὸν ὁλόνομον σύστημα κινούμενον ἄνευ τριβῆς, τοῦ ὁποίου ἡ θέσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ k παραμέτρους $q_1, q_2, \dots q_k$. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὰ μέτρα τῶν προβολῶν ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν ἐφηρμοσμένων δυνάμεων ἐπὶ τοῦ συστήματος τούτου, ἐκτὸς τῶν δυνάμεων τοῦ συνδέσμου, εἶναι αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς τὰς συντεταγμένας μιᾶς συναρτήσεως U τῶν συντεταγμένων καὶ τοῦ χρόνου. Ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ συστήματος λαμβάνουν τὴν ὑπὸ τοῦ Hamilton δοθεῖσαν κανονικὴν μορφήν:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\dots k), \tag{1}$$

ὅπου $H=\sum\limits_{\alpha=1}^{k} p_\alpha\, q'_\alpha - T - U$, T εἶναι ἡ ρύμη τοῦ συστήματος καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ H ἔχομεν ἀντικαταστήσει τὰς παραγώγους q'_i τῶν q_i διὰ τῶν τιμῶν τῶν ἐξαγομένων ἐκ τῶν σχέσεων

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial q'_i}\qquad (i=1,2,\dots k).$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) ἀποτελοῦν κατὰ συνέπειαν ἓν σύστημα 2k διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως μὲ 2k ἀγνώστους συναρτήσεις $q_i, p_i\ (i=1,2,\dots k)$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t (χρόνου) καὶ τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ συστήματος τούτου συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν q_i, p_i, συναρτήσει τοῦ t καὶ 2k αὐθαιρέτων σταθερῶν, ὥστε νὰ πληροῦν τὸ σύστημα (1).

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, ὅπου οἱ σύνδεσμοι εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου ἔχομεν, ὡς γνωστόν,

$$\sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha\,.\,q'_\alpha=2T,\qquad \text{ἄρα } H=T-U.$$

Θεωρήσωμεν τὴν δέσμην F βαθμοῦ 2k+1 τῶν μεταβλητῶν v, t, q_i, p_i $(i=1,2,\dots k)$ τὴν ἔχουσαν ὡς βάσιν τὰς ἀπειρ. μετασχηματισμούς:

$$F:\quad \mathcal{T}=\frac{\partial f}{\partial t}-H\frac{\partial f}{\partial v},\quad Q_i=\frac{\partial f}{\partial q_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial v},\quad P_i=\frac{\partial f}{\partial p_i}\qquad (i=1,2,\dots k)$$

ὅπου H εἶναι μία τυχοῦσα συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν t, q_i, p_i $(i=1,2,\dots k)$.

Αἱ παρενθέσεις τῶν Poisson - Jacobi τῶν μετασχηματισμῶν τούτων, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, εἶναι:

$$(\mathcal{T}, Q_i) = Q_i H \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (P_i, Q_i) = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (\mathcal{T}, P_i) = P_i H . \frac{\partial f}{\partial v} \qquad (i=1, 2 \ldots k).$$

ἄρα ἡ δέσμη F δὲν εἶναι πλήρης. Ζητοῦμεν οὕτω τὰς ἐνελίξεις βαθμοῦ k + 1 τῆς F ὑπὸ τὴν λελυμένην μορφήν:

$$M = \mathcal{T} + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu_\alpha P_\alpha, \qquad M_i = Q_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu_{i\alpha} P_\alpha \quad (i=1, 2, \ldots k).$$

Αἱ συγκλίνουσαι—ταυτότητες:

$$(M, M_i) \equiv 0, \quad (M_i, M_j) \equiv 0 \quad (\text{mod } F) \quad (i, j = 1\ 2, \ldots k)$$

συνεπάγονται τὰς συνθήκας ὡς πρὸς μ:

$$\mu_i = - Q_i H - \sum_{\alpha=1}^{k} \mu_{i\alpha} \dot{P}_\alpha \dot{H}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots k).$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς συνθήκας ταύτας καὶ συνδυάζοντες τοὺς μετασχηματισμοὺς M, M_i, ὥστε νὰ ἀπαλειφθοῦν τὰ μ_i, πορίζόμεθα τὴν γενικὴν ἐνέλιξιν βαθμοῦ k + 1 ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\Lambda = M + \sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha H M_\alpha = \mathcal{T} + \sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha H Q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha H P_\alpha, \quad M_i = Q_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu_{i\alpha} P_\alpha$$

$$(i=1, 2, \ldots k)$$

μετὰ $$\mu_{i,j} = \mu_{j,i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots k).$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς Λf εἶναι εἷς διακεκριμένος μεταχηματισμὸς τῆς δέσμης F καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς δέσμης ταύτης ἀνάγεται κατ' οὐσίαν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ μετασχηματισμοῦ Λf. Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι ἐξακολουθοῦν ἰσχύοντες καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις H ἐξαρτᾶται ἐκτὸς τῶν μεταβλητῶν t, q_i, p_i, ($i=1, 2, \ldots k$) καὶ ἀπὸ τὴν ἄγνωστον συνάρτησιν V. Θὰ ἠδυνάμεθα ἑπομένως νὰ λύσωμεν ἓν πρόβλημα γενικώτερον τοῦ ἐν ἀρχῇ τεθέντος. Ἀλλ' ἐνταῦθα θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τοῦ Hamilton (1). Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνάρτησις H δὲν περιέχει τὴν V, ὁ μετασχηματισμὸς Λf δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἁπλουστέρου τοιούτου

$$\Lambda_1 f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha},$$

ὁ ὁποῖος δὲν περιέχει τὸν ὅρον ὡς πρὸς $\frac{\partial f}{\partial v}$..

Ἔστω $\varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k)$ μία ἀναλλοίωτος τοῦ μετασχηματισμοῦ $\Lambda_1 f$· θὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος:

$$\Lambda_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Κατὰ συνέπειαν δι' ἓν τυχὸν σύστημα q_i, p_i, $(i=1, 2, \dots k)$ συναρτήσεων τοῦ t πληρουσῶν τὸ σύστημα (1) θὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος:

$$\Lambda_1 \varphi = 0$$

ἢ λόγῳ τῶν (1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad \text{ἢ } d\varphi = 0$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$\varphi(t, q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2, \dots p_k) = C,$$

ὅπου C αὐθαίρετος σταθερά. Ὅθεν ἡ σχέσις $\varphi = C$ θὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἓν τυχὸν σύστημα συναρτήσεων q_i, p_i, $(i=1, 2, \dots k)$, πληρουσῶν τὰς ἐξισώσεις (1), ἄρα θὰ εἶναι ἓν πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῶν ἐξισώσεων (1). Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ συστήματος (1) καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ μετασχηματισμοῦ $\Lambda_1 f$ εἶναι δύο προβλήματα ἰσοδύναμα.

Ἔστωσαν φ_i $(t, q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2, \dots p_k)$ 2k θεμελιώδεις ἀναλλοίωτοι τοῦ μετασχηματισμοῦ $\Lambda_1 f$· αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi_i(t, q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2, \dots p_k) = C_i \qquad (i=1, 2, \dots 2k)$$

ὅπου C_i αὐθαίρετοι σταθεραί, ἐκφράζουν τὰ q_i, p_i $(i=1, 2, \dots k)$ συναρτήσει τοῦ t καὶ τῶν 2k αὐθαιρέτων σταθερῶν C_i, ἄρα ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ συστήματος (1).

Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ὅλα τὰ ἐξαγόμενα τῆς κλασσικῆς θεωρίας θὰ ἠδύναντο νὰ προκύψουν καὶ κατὰ τρόπον μάλιστα ἁπλούστερον καὶ συντομώτερον διὰ τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου τῶν δεσμῶν ἀπειρ. μετασχηματισμῶν. Οὕτως ἐπὶ παραδείγματι ἡ ἰδιότης, καθ' ἥν, ὅταν ἡ H δὲν περιέχῃ t, θὰ εἶναι μία ἀναλλοίωτος τοῦ $\Lambda_1 f$, προκύπτει ἀμέσως. Πράγματι ἔχομεν τότε

$$\Lambda_1 H = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \equiv 0.$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει, ὡς γνωστόν, εἰδικώτερον, ὅταν οἱ σύνδεσμοι εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου καὶ ὑπάρχῃ μία συνάρτησις δυνάμεων U $(q_1, q_2, \dots q_k)$· τότε αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις τοῦ Hamilton δέχονται τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα $H = h$, ὅπερ συμπίπτει μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ρύμης[1].

3. *Ἐφαρμογή:* Δώσωμεν μίαν ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἐξαγομένων εἰς τὴν κλασικὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως ἑνὸς ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ἀπωθουμένου ὑπὸ σταθεροῦ κέντρου ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως. Διὰ τὴν ἁπλότητα, λάβωμεν τὸ

---

[1] P. Affel, Ttaité de Mécanique Rationnelle II (1931), p. 422 et 442.

σταθερὸν κέντρον ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι q_1, q_2, q_3 παριστάνουν αὐτὰς ταύτας τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$x=q_1,\ y=q_2,\ z=q_3,\ x'=q'_1,\ y'=q'_2,\ z'=q'_3,$$

χάριν δὲ συντομίας, θεωρήσωμεν τὴν μᾶζαν τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἴσην πρὸς τὴν μονάδα· θὰ ἔχωμεν:

$$T=\tfrac{1}{2}\,(x'^2+y'^2+z'^2),\quad U=\frac{\mu^2}{2}\,(x'^2+y'^2+z'^2),$$

ὅπου μ σταθερὰ ποσότης· ἐπειδὴ δὲ οἱ σύνδεσμοι εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου, ἡ συνάρτησις τοῦ Hamilton θὰ εἶναι

$$H=T-U=\tfrac{1}{2}\,(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-\frac{\mu^2}{2}\,(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\,, \tag{2}$$

καθότι

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial x'}=x',\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial y'}=y',\quad p_3=\frac{\partial T}{\partial z'}=z'$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=p_i,\quad \frac{\partial H}{q_i}=-\mu^2 q_i \qquad (i=1,2,3)$$

ἄρα αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις τοῦ Hamilton εἶναι:

$$\frac{dq_i}{dt}=p_i\ ,\ \frac{dp_i}{dt}=\mu^2 q_i \qquad (i=1,2,3) \tag{3}$$

Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκτεθεῖσαν θεωρίαν ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ συστήματος τούτου ἀνάγεται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ ἀπειρ. μετασχηματισμοῦ:

$$\Lambda_1 f=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{3}\mu^2 q_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

τῶν 7 μεταβλητῶν t, q_i, p_i $(i=1,2,3)$, ὁ ὁποῖος εἶναι εἷς διακεκριμένος μετασχηματισμὸς τῆς δέσμης F, ὅπου ἡ συνάρτησις H ἔχει τὴν προαναφερθεῖσαν τιμὴν (2). Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν 6 θεμελιώδεις ἀναλλοιώτους τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου. Πρὸς τοῦτο ζητήσωμεν μίαν ἀναλλοίωτον τοῦ $\Lambda_1 f$ τῆς μορφῆς $p_1 A(t)+q_1 B(t)$· πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος:

$$\Lambda_1\,[p_1 A(t)+q_1 B(t)]=p_1(A'+B)+q_1(B'+\mu^2 A)=0\,,$$

ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ p_1, q_1, t εἶναι μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι μεταξύ των, συνάγομεν τὰς σχέσεις:

$$A'+B=0\ ,\quad \mu^2 A+B'=0\ . \tag{4}$$

Ἐκ τούτων διὰ παραγωγήσεως τῆς πρώτης ὡς πρὸς t, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς δευτέρας ἀγόμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$A''-\mu^2 A=0\ .$$

Αὕτη εἶναι μία κοινὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις δευτέρας τάξεως γραμμικὴ καὶ ὁμογενὴς μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς καὶ ὁλοκληροῦται κατὰ τὰ γνωστά. Ἡ γενικὴ λύσις θὰ εἶναι:

$$A = A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t},$$

ὅπου A_1 καὶ A_2 αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (4) ἔχομεν ἐν συνεχείᾳ:

$$B = -A' = -\mu A_1 e^{\mu t} + \mu A_2 e^{-\mu t}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀναλλοίωτος τοῦ μετασχηματισμοῦ $\Lambda_1 f$ θὰ εἶναι

$$p_1 A + q_1 B = p_1 (A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t}) + q_1(-\mu A_1 e^{\mu t} + \mu A_2 e^{-\mu t}).$$

Θέτοντες δὲ εἰς ταύτην (ἐπὶ παραδείγματι) ἐν πρώτοις $A_1 = 0$, $A_2 = -1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ λαμβάνομεν δύο ἀναλλοιώτους τοῦ $\Lambda_1 f$ διακεκριμένας μεταξύ των.

$$-(p_1 + \mu q_1) e^{-\mu t}, \quad (p_1 - \mu q_1) e^{\mu t}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπονται τὰ δύο πρῶτα ὁλοκληρώματα τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως (3) διακεκριμένα μεταξύ των

$$(p_1 + \mu q_1) e^{-\mu t} = h_1, \quad (p_1 - \mu q_1) e^{\mu t} = d_1,$$

ὅπου h_1, d_1 αὐθαίρετοι σταθεραί. Λύοντες τὰς σχέσεις ταύτας ὡς πρὸς p_1, q_1 λαμβάνομεν:

$$(5) \qquad p_1 = \frac{1}{2}(h_1 e^{\mu t} + d_1 e^{-\mu t}), \quad q_1 = \frac{1}{2\mu}(h_1 e^{\mu t} - d_1 e^{-\mu t}),$$

κατ᾽ ἀναλογίαν δέ, λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν p καὶ q εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) ἢ εἰς τὸν μετασχηματισμὸν $\Lambda_1 f$, ἔχομεν

$$(6) \qquad \begin{cases} p_2 = {}^1/_2 (h_2 e^{\mu t} + d_2 e^{-\mu t}), & q_2 = \dfrac{1}{2\mu}(h_2 e^{\mu t} - d_2 e^{-\mu t}), \\ p_3 = {}^1/_2 (h_3 e^{\mu t} + d_3 e^{-\mu t}), & q_3 = \dfrac{1}{2\mu}(h_3 e^{\mu t} - d_3 e^{-\mu t}), \end{cases}$$

ὅπου h, d αὐθαίρετοι σταθεραί. Αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) ἐκφράζουσαι τὰ p καὶ q συναρτήσει τοῦ t καὶ 6 αὐθαιρέτων σταθερῶν h, d ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ συστήματος τοῦ Hamilton (3).

Ἡ ἐπαλήθευσις εἶναι εὔκολος· πράγματι ἐκ τῶν (5) διὰ παραγωγήσεως ὡς πρὸς t ἔχομεν:

$$\frac{dp_1}{dt} = {}^1/_2 (\mu h_1 e^{\mu t} - \mu d_1 e^{-\mu t}), \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{1}{2\mu}(\mu h_1 e^{\mu t} + \mu d_1 e^{-\mu t})$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ταῦτα καθὼς καὶ τὰ p_1, q_1 ἐκ τῶν (5) εἰς τὴν πρώτην καὶ τετάρτην τῶν (3) λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$${}^1/_2 (\mu h_1 e^{\mu t} - \mu d_1 e^{-\mu t}) = \frac{\mu^2}{2\mu}(h_1 e^{\mu t} - d_1 e^{-\mu t})$$

$${}^1/_2 (\mu h_1 e^{\mu t} + \mu d_1 e^{-\mu t}) = \frac{1}{2}(h_1 e^{\mu t} + d_1 e^{-\mu t}),$$

αἱ ὁποῖαι πληροῦνται ἐκ ταυτότητος. Τὸ αὐτὸ ἔχομεν λόγῳ τῆς συμμετρίας καὶ διὰ τὰς σχέσεις (6).

Δυνάμεθα ἐν συνεχείᾳ διὰ τῆς προαναφερθείσης μεθόδου νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα πρῶτα ὁλοκληρώματα τῶν ἐξισώσεων (3) μὴ ἐξαρτώμενα ἐκ τῆς μεταβλητῆς t, τινὰ μάλιστα ἐκ τούτων ἐπιδέχονται ἀξιόλογον μηχανικὴν ἑρμηνείαν. Οὕτως ἐπὶ παραδείγματι ἐπαληθεύομεν ἀμέσως ὅτι $p_1 q_2 - p_2 q_1$ εἶναι ἐπίσης μία ἀναλλοίωτος τοῦ $\Lambda_1 f$· πράγματι ἔχομεν ἐκ ταυτότητος

$$\Lambda_1(p_1q_2 - p_2q_1) = p_1 \cdot (-p_2) + p_2p_1 + \mu^2 q_1 q_2 + \mu^2 q_2 (-q_1) = 0$$

καὶ ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως (3) δέχονται τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = C,$$

τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν διὰ τὴν προβολὴν τῆς κινήσεως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy. Λόγῳ τῆς συμμετρίας ὁ μετασχηματισμὸς $\Lambda_1 f$ δέχεται πρὸς τούτοις τὰς ἀναλλοιώτους $p_2 q_3 - p_3 q_2$, $p_3 q_1 - p_1 q_3$ καὶ ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (3) ἔχουν τὰ ἀντίστοιχα πρῶτα ὁλοκληρώματα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν διὰ τὴν προβολὴν τῆς κινήσεως ἐπὶ τὰ ἄλλα δύο συντεταγμένα ἐπίπεδα yz καὶ xz.

Εὐκόλως ἐπίσης ἐπαληθεύομεν τὴν ἰδιότητα ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ συνάρτησις τοῦ Hamilton H δὲν περιέχει τὸν t, θὰ εἶναι μία ἀναλλοίωτος τοῦ $\Lambda_1 f$· πράγματι ἔχομεν

$$\Lambda_1 \left[{}^1\!/_2\, (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\mu^2}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \right] = p_1(-\mu^2 q_1) + p_2(-\mu^2 q_2) +$$
$$+ p_3(-p^2 q_3) + \mu^2 q_1 p_1 + \mu^2 q_2 p_2 + \mu^2 q_3 p_3 = 0\,;$$

κατὰ συνέπειαν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως (3) δέχονται τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα

$${}^1\!/_2\, (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\mu^2}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = h,$$

ὅπερ συμπίπτει μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ρύμης.

Τέλος εἶναι προφανές, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν πρώτων ὁλοκληρωμάτων τῶν ἀνεξαρτήτων τοῦ t μόνον 5 δύνανται νὰ εἶναι διακεκριμένα μεταξύ των, διότι ἄλλως, ἂν ἦσαν ἐπὶ παραδείγματι 6, θὰ παρεῖχον διὰ τὰς 6 μεταβλητὰς q_i, p_i $(i = 1, 2, 3)$ σταθερὰς τιμάς, ὅτε δὲν θὰ ὑπῆρχε κίνησις.

RÉSUMÉ

Le but de cette note est d'indiquer comment on peut utiliser la théorie des faisceaux de transformations infinitésimales due à M. Vessiot, à l'étude de quelques questions de Mécanique. Il s'agit notamment du problème de l'intégration des équations canoniques d'Hamilton, qui, comme l'on sait, constituent l'instrument analytique fondamental de la Mécanique Ra-

tionnelle. Une application des résultats ainsi obtenus au problème classique du mouvement d'un point libre repoussé par un centre fixe proportionellement à la distance achève cette note.

ΠΑΙΔΟΛΟΓΙΑ. — Ἔρευναι ἐπὶ τῶν ἀνθρωπομετρικῶν διαστάσεων τοῦ Ἑλληνόπαιδος κατὰ τὴν περίοδον τοῦ πολέμου (1943-1944), *ὑπὸ* ***Π. Ι. Λαμπρινάκου*** *καὶ* ***Κ. Βασιλάκη.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Ν. Ἐξαρχοπούλου.

Ἡ ἡμετέρα ἐργασία γενομένη κατὰ τὰς πλέον δυσκόλους καὶ δυσχερεῖς βιοτικὰς καὶ ἐπισιτιστικὰς συνθήκας τὰς ὁποίας διῆλθε καὶ διέρχεται ἀκόμη καὶ σήμερον ἡ Πατρίς μας, σκοπὸν ἔχει, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ καταστήσῃ γνωστὰ τὰ συμπεράσματα ὡρισμένων ἐπιστημονικῶν ἐρευνῶν μας σχετικῶς μὲ τὴν σωματικὴν ἀνάπτυξιν καὶ τὴν ἐν γένει ὑγείαν τῶν Ἑλληνοπαίδων, ὡς αὕτη διεμορφώθη ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ὑποσιτισμοῦ (ποσοτικοῦ καὶ ποιοτικοῦ) κατὰ τὸν παρόντα πολεμικὸν λιμὸν καὶ ἀφ' ἑτέρου, νὰ κρούσῃ τὸν κώδωνα τοῦ κινδύνου, ὅστις ἐπαπειλεῖ τὸ μέλλον τῆς φυλῆς ἐκ τῆς ἐνδεχομένης παρατάσεως τῆς ὑποσιτίσεως τῶν παίδων εἰς τρόπον ὥστε νὰ κινήσῃ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Κράτους καὶ τῆς Κοινωνίας πρὸς ταχεῖαν λῆψιν τῶν ἀναγκαίων μέτρων, τὰ ὁποῖα θὰ δυνηθοῦν νὰ θεραπεύσουν ἢ τοὐλάχιστον νὰ περιορίσουν εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ὅριον τὰ ὀλέθρια ἀποτελέσματα τῆς ἀνεπαρκοῦς διατροφῆς, ὥστε νὰ διαφυλάξωμεν τὸν μοναδικὸν αἱμοδότην τοῦ Ἔθνους, ὅστις παραμένει εἰς τὰς τοιαύτας περιστάσεις διὰ τὴν ἐπιβίωσιν μιᾶς φυλῆς· δηλαδὴ τὸ Παιδί.

Ὡς βάσιν τῶν ἐρευνῶν μας πρὸς ἐκτίμησιν τῆς σωματικῆς ἀναπτύξεως καὶ τῆς ἐν γένει θρέψεως καὶ ὑγείας τοῦ Ἑλληνόπαιδος ἐπροτιμήσαμεν ἀντὶ πάσης ἄλλης ἰατρικῆς ἐξετάσεως, τὰς γνωστὰς κλασσικὰς σωματομετρικὰς μεθόδους, ἤτοι: ἀναστήματος, βάρους, κλπ. διότι ὡς τυγχάνει γνωστὸν ἡ συλλογὴ στοιχείων ἀφορώντων τὰς ἀνθρωπομετρικὰς διαστάσεις τοῦ παιδὸς ἐν τῇ ἐξελίξει αὐτοῦ, τοῦτ' ἔστιν περὶ τοῦ ἐὰν ἡ σωματικὴ αὔξησις τούτου ἐπιτελῆται φυσιολογικῶς ἢ παρουσιάζῃ ἀποκλίσεις τινὰς ἀπὸ τῆς κανονικῆς τροχιᾶς τῆς ἡλικίας ἢ καὶ τοῦ φύλου του, τόσον κατὰ τὴν ἑκάστοτε σωματικήν του διάπλασιν ὅσον καὶ κατὰ τὴν πορείαν, ἣν αὕτη ἀκολουθεῖ, ἀποτελεῖ τὸ καλύτερον κριτήριον διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς φυσιολογικῆς ἢ μὴ ἐξελίξεως τοῦ παιδικοῦ ὀργανισμοῦ.

Ἡ ἔρευνα πρὸς γνῶσιν τῆς σωματικῆς ἀναπτύξεως τοῦ παιδὸς στηριζομένη ἐπὶ συστηματικῶν σωματολογικῶν μετρήσεων τῆς παιδικῆς ἡλικίας ἀπησχόλησε διαφόρους κατὰ καιροὺς ἐρευνητάς, εἰς ἁπάσας σχεδὸν τὰς πεπολιτισμένας χώρας. Παρ' ἡμῖν ἀνάλογος ἐργασία ἐγένετο τὸ πρῶτον (1920) ὑπὸ τοῦ καθηγ. Ἐμμ. Λαμπαδαρίου Τὸ ἔργον ὅμως τοῦ καθ. Ν. Ἐξαρχοπούλου (1930) παραμένει μέχρι τῆς στιγμῆς