

ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 18^{ΗΣ} ΜΑΡΤΙΟΥ 2004

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ

Αυτόνομα συμμετρικά συστήματα ασθενούς απόσβεσεως ἐκδηλώνοντα περιοδικούς ἔλκτες, ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἀντωνίου Ν. Κουνάδη*.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μελέτες ἐπὶ τῆς ἐλαστικῆς εὐστάθειας ταλαντουμένων ἐλαστικῶν συστημάτων ἤδη ἀπὸ τις ἀρχὲς τῆς δεκαετίας τοῦ '50 ἐστίαζαν τὸ ἐνδιαφέρον ἐπὶ τῆς σημασίας τῆς απόσβεσεως σὲ μὴ αὐτοσυζυγῇ (μὴ συντηρητικὰ συστήματα) [Ziegler (1952), Nemat-Nasser and Herrmann (1966), Crandall (1970)]. Ἐν τούτοις, ἡ ἐπιρροή αὐτῆ συνήθως ἀμελεῖται στὴν περίπτωση Χαμιλτόνιων ἢ συμμετρικῶν (συντηρητικῶν) συστημάτων. Πράγματι, ἂν τὰ τελευταῖα αὐτὰ χωρὶς απόσβεση συστήματα εἶναι εὐσταθῆ, εἶναι εὐρέως ἀποδεκτὸ ὅτι ἡ προσθήκη απόσβεσης δὲν μεταβάλλει τὴν εὐστάθειά τους. Ἡ συμπεριφορὰ αὐτῶν τῶν συντηρητικῶν συστημάτων, ὅταν προστεθεῖ απόσβεση περιγράφεται στὸ πλαίσιο τῆς γραμμικοποιημένης δυναμικῆς ἀναλύσεως ὑπὸ μορφήν γενικευμένων συντεταγμένων μέσω τῆς μητρώο-διανυσματικῆς διαφορικῆς ἐξίσωσσεως [Huseyin (1986)]

$$[a_{ij}] \ddot{\mathbf{q}} + [c_{ij}] \dot{\mathbf{q}} + [V_{ij}] \mathbf{q} = 0 \quad (1)$$

ὅπου ἡ τελεία ὑποδηλοῖ παράγωγο ὡς πρὸς τὸν χρόνο t , $\mathbf{q}(t)$ εἶναι n -διάστατο διά-

* ANTHONY N. KOUNADIS, **Autonomous weakly damped symmetric systems exhibiting periodic attractors.**

νυσμα καταστάσεως, ἐνῶ $[a_{ij}]$, $[c_{ij}]$ καὶ $[V_{ij}]$ εἶναι πραγματικά συμμετρικά μητρῶα διαστάσεων $n \times n$. Συγκεκριμένα, τὸ μητρῶο μαζῶν $[a_{ij}] = [a_{ij}(m_i)]$ εἶναι θετικῶς ὠρισμένο, συνδεόμενο μετὴν τετραγωνικὴ μορφή τῆς συνολικῆς κινητικῆς ἐνέργειας, τὸ μητρῶο ἀπόσβεσης $[c_{ij}]$ μπορεῖ νὰ εἶναι θετικῶς ὠρισμένο, θετικῶς ἡμιωρισμένο [Zajac (1964, 1965), Huseyin (1978)] ἢ ἀόριστο, τέλος $[V_{ij}(\lambda)]$ εἶναι ἓνα γενικευμένο μητρῶο ἀκαμψίας, συνάρτηση ἐνὸς αἰφνίδια ἐπιβαλλομένου φορτίου σταθερᾶς διευθύνσεως καὶ ἄπειρης διάρκειας [Kounadis (1999)].

Ἡ παροῦσα ἐργασία ἔχει στόχο νὰ διερευνηθεῖ διεξοδικῶς κατὰ πόσον εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν σὲ συμμετρικά συστήματα μετὰ ἐλάχιστη ἀπόσβεση διακλαδικὰ φαινόμενα ἀνάλογα μετὰ ἐκεῖνα ποὺ συμβαίνουν σὲ μὴ αὐτοσυζυγῆ συστήματα [Kounadis (1994, 1997_{1,2}), Bolotin, Grishko καὶ Petrovsky (1996)]. Αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται μέσω λεπτομεροῦς μελέτης τῆς γεωμετρικῆς μορφῆς τοῦ μητρῶου ἀπόσβεσης σὲ συνδυασμὸ μετὴν παράμετρο ἐλέγχου τοῦ φορτίου λ . Συγκεκριμένα, ἐρευνῶνται οἱ συνθήκες κάτω ἀπὸ τίς ὁποῖες συμμετρικά συστήματα, μετὰ ἐλάχιστη ἀπόσβεση μπορεῖ νὰ ἐκδηλώσουν: (α) δυναμικὴ διακλάδωση διπλῆς μηδενικῆς ἰδιοτιμῆς καὶ (β) δυναμικὴ διακλάδωση Hopf γιὰ φορτίο μικρότερο τοῦ κλασσικοῦ κρίσιμου φορτίου, ἐκεῖνου δηλαδὴ τῆς στατικῆς ἀστάθειας, ὅποτε τὸ κινητικὸ κριτήριο Ziegler ἀστοχεῖ στὸν προσδιορισμὸ τοῦ ὀρθοῦ κρίσιμου φορτίου (συνδεόμενο μετὰ τὸν μηδενισμό τῆς θεμελιώδους ἰδιοσυχνότητος). Συνεπῶς τὸ ἐνδιαφέρον ἐστιάζεται σὲ λύσεις τῆς ἐξ. (1) σταθερᾶς καταστάσεως (steady state), οἱ ὁποῖες μπορεῖ νὰ περιλάβουν εὐσταθεῖς ὀριακοὺς κύκλους (περιοδικοὶ ἔλκτες).

Ἐδῶ θὰ πρέπει νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἡ ποιοτικὴ τοπολογικὴ καὶ γεωμετρικὴ ἀνάλυση ἔφερε σὲ φῶς τὴν τελευταία εἰκοσαετία νέα φαινόμενα, τὰ ὁποῖα προκάλεσαν ἀληθινὴ ἐπανάσταση στὴ θεωρία τῶν δυναμικῶν διακλαδώσεων. Ἡ πλειοψηφία αὐτῶν τῶν φαινομένων συνήθως συνδέεται μετὰ γεωμετρικῆς μὴ γραμμικότητας καὶ ἀλληλεπιδράσεις αὐτῶν μετὰ ἄλλες παραμέτρους ἐλέγχου. Ἐν τούτοις, εἶναι περίεργο τὸ γεγονός ὅτι κάποια εἶδη τοπικῶν δυναμικῶν διακλαδώσεων ποὺ θὰ μπορούσαν νὰ ἀνακαλυφθοῦν μέσω κλασσικῶν (γραμμικῶν) ἀναλύσεων διέφυγαν μέχρι σήμερα τῆς προσοχῆς διακεκριμένων ἐρευνητῶν. Αὐτὸ εἶναι ἓνα βασικὸ κίνητρο τῆς ἐργασίας αὐτῆς. Αὐτονόητο εἶναι βέβαια ὅτι ἢ εἰς μεγάλο χρόνο συμπεριφορὰ (εὐστάθεια ἢ ἀστάθεια) τῶν συστημάτων αὐτῶν μπορεῖ νὰ προσδιορισθεῖ μόνο μέσω μὴ γραμμικῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ήρουνουμε λύση τῆς ἐξ. (1) τῆς μορφῆς

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}e^{\rho t} \quad (2)$$

ὅπου ρ εἶναι, ἐν γένει, μιγαδικὸς ἀριθμὸς καὶ \mathbf{r} μιγαδικὸ διάνυσμα, ἀνεξάρτητο τοῦ χρόνου. Εἰσάγοντες τὴν ἔκφραση τοῦ \mathbf{q} στὴν ἐξ. (1) λαμβάνουμε

$$L(\rho)\mathbf{r} = ([\alpha_{ij}]\rho^2 + [c_{ij}]\rho + [V_{ij}])\mathbf{r} = 0 \quad (3)$$

Λύσεις τῆς ἐξ. (1) συνδέονται μὲ τὶς Ἰακωβιανὲς ἰδιοτιμὲς ρ_i ($i=1, \dots, 2n$) τοῦ μη-τρῶου $L(\rho)$, οἱ ὁποῖες ὑπολογίζονται μὲσω τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως

$$\det L(\rho) = \det([\alpha_{ij}]\rho^2 + [c_{ij}]\rho + [V_{ij}]) = 0 \quad (4)$$

ἢ ὁποῖα μετὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς ὀριζούσης δίδει [Kounadis (1994)]

$$\rho^{2n} + \alpha_1 \rho^{2n-1} + \alpha_2 \rho^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-1} \rho + \alpha_{2n} = 0 \quad (5)$$

ὅπου α_i ($i=1, \dots, 2n$) προσδιορίζονται μὲσω τῶν ἀναδρομικῶν σχέσεων τοῦ Bôcher. Γιὰ τὶς ἀρχικῶς (προκρίσιμες) ἀσυμπτωτικῶς εὐσταθεῖς καταστάσεις ὅλες οἱ ρίζες (ιδιοτιμὲς) τῆς ἐξ. (5) εἶναι ζεύγη συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\rho_i = \nu_i + \mu_i j$ (ὅπου $j = \sqrt{-1}$, $i=1, \dots, n$ καὶ μ_i, ν_i πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) μὲ ἀντίστοιχα συζυγῆ μιγαδικὰ ἰδιοδιανύσματα. Συνεπῶς, οἱ λύσεις τῆς ἐξ. (1) εἶναι τῆς μορφῆς

$$Ae^{\nu_i t} \cos \mu_i t \quad \text{καὶ} \quad Be^{\nu_i t} \sin \mu_i t \quad (6)$$

ὅπου A καὶ B σταθερὲς προσδιοριζόμενες ἀπὸ τὶς ἀρχικὲς συνθῆκες. Οἱ λύσεις τῆς ἐξ. (6) εἶναι φραγμένες καὶ τείνουν στὸ μηδὲν διὰ $t \rightarrow \infty$, ἂν ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τῆς ἐξ. (5) ἔχουν πραγματικὰ μέρη ἀρνητικά, δηλαδὴ ἂν $\nu_i < 0$ γιὰ κάθε i [Gantmacher (1959)].

Πολλαπλασιάζοντας ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τὴν ἐξ. (3) μὲ τὸ διάνυσμα \mathbf{r}^T (συζυγὲς ἀνάστροφο τοῦ \mathbf{r}), λαμβάνουμε

$$\mathbf{r}^T ([\alpha_{ij}]\rho^2 + [c_{ij}]\rho + [V_{ij}])\mathbf{r} = 0 \quad (7)$$

ὅπου ὅλες οἱ τετραγωνικὲς μορφὲς εἶναι πραγματικὲς ποσότητες. Ἔτσι ἡ ἐξ. (7)

είναι μία δευτέρου βαθμοῦ ἀλγεβρική ἐξίσωση, ἡ ὁποία ἐπιλυόμενη ὡς πρὸς ρ δίδει

$$\rho = \frac{1}{2\bar{\mathbf{r}}^T[\alpha_{ij}]\mathbf{r}} \left[-\bar{\mathbf{r}}^T[\mathbf{c}_{ij}]\mathbf{r} \pm \sqrt{\left(\bar{\mathbf{r}}^T[\mathbf{c}_{ij}]\mathbf{r}\right)^2 - 4\left(\bar{\mathbf{r}}^T[\alpha_{ij}]\mathbf{r}\right)\left(\bar{\mathbf{r}}^T[\mathbf{V}_{ij}]\mathbf{r}\right)} \right] \quad (8)$$

Ἐὰν τὰ συζυγῆ μιγαδικὰ ἰδιοδιανύσματα εἶναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{j}\mathbf{y}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{x} - \mathbf{j}\mathbf{y}, \quad \mathbf{j} = \sqrt{-1} \quad (9)$$

ὅπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ καὶ $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, εἰσάγοντες στὴν ἐξ. (3) $\rho = \nu + \mathbf{j}\mu$ καὶ $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{j}\mathbf{y}$ καὶ θέτοντες πραγματικὰ καὶ φανταστικὰ μέρη ἴσα πρὸς μηδέν, λαμβάνομε

$$\left. \begin{aligned} ([\alpha_{ij}](\nu^2 - \mu^2) + \nu[\mathbf{c}_{ij}] + [\mathbf{V}_{ij}])\mathbf{x} &= \mu([\mathbf{c}_{ij}] + 2\nu[\alpha_{ij}])\mathbf{y} \\ ([\alpha_{ij}](\nu^2 - \mu^2) + \nu[\mathbf{c}_{ij}] + [\mathbf{V}_{ij}])\mathbf{y} &= -\mu([\mathbf{c}_{ij}] + 2\nu[\alpha_{ij}])\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Τὸ ὁμογενές αὐτὸ σύστημα ὡς πρὸς \mathbf{x} καὶ \mathbf{y} ἔχει μὴ μηδενική λύση, ὅταν ἡ ὀρίζουσα του ἰσοῦται μὲ μηδέν.

Καθὼς τὸ φορτίο λ αὐξάνει βαθμιαίως ἐκ τοῦ μηδενός, ἡ μεταβολὴ τοῦ μητρῶου $[\mathbf{V}_{ij}(\lambda)]$ ἐπηρεάζει τὶς συζυγεῖς μιγαδικές ἰδιοτιμὲς ρ [δηλαδή $\nu = \nu(\lambda)$ καὶ $\mu = \mu(\lambda)$] καὶ τὰ ἀντίστοιχα συζυγῆ μιγαδικὰ ἰδιοδιανύσματα $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda)$. Τὸ μητρῶο $[\mathbf{V}_{ij}(\lambda)]$ εἶναι θετικῶς ὠρισμένο, ἂν $\lambda < \lambda_{(1)}^c$ (1ο φορτίο λυγισμοῦ), θετικῶς ἡμιωρισμένο, ἂν $\lambda = \lambda_{(1)}^c$ ($\det[\mathbf{V}_{ij}(\lambda_{(1)}^c)] = 0$) καὶ ἀόριστο, ἂν λ εἶναι κατὰ τι μεγαλύτερο τοῦ $\lambda_{(1)}^c$ ($< \lambda$), διότι τότε $(\det[\mathbf{V}_{ij}(\lambda)] < 0)$. Γιὰ διακεκριμένα κρίσιμα σημεῖα μόνο μία ἰδιοτιμὴ τοῦ πίνακος αὐτοῦ (καθὼς τὸ λ αὐξάνεται βαθμιαίως ἐκ τοῦ μηδενός) μηδενίζεται, ἡ ὁποία συνδέεται μὲ κύρια διεύθυνση γιὰ τὴν ὁποία δὲν μπορούμε ν' ἀποφανθοῦμε κατὰ πόσον εἶναι εὐσταθές ἢ ἀσταθές τὸ ἀντίστοιχο κρίσιμο σημεῖο.

Ἵποθέτομε ὅτι ἐκ φυσικῶν λόγων τὸ σύστημα συνδέεται μὲ ἀσθενῆ ἀπόσβεση καὶ ὅτι ἀνεξαρτήτως τῆς ἀλγεβρικής δομῆς τοῦ μητρῶου ἀποσβέσεως $[\mathbf{c}_{ij}]$ ὁ ἀρχικός τετριμμένος δρόμος ἰσορροπίας $\mathbf{q} = 0$ γιὰ μικρὰς τιμὰς τοῦ λ εἶναι ἀσυμπτωτικῶς εὐσταθής. Ἀκολουθῶς μπορεῖ νὰ γίνῃ ἐπίσης χρῆσις τῶν Routh-Hurwitz κριτηρίων εὐσταθείας [Gantmacher (1959)] - ὅπως ἀναλυτικῶς ἐκτί-

θενται από τον συγγραφέα [Kounadis (2004)] - σύμφωνα με τα όποια αναγκαία και ικανή συνθήκη προκειμένου όλες οι ιδιοτιμές να κείνται στο άριστερο μέρος του ρ -μιγαδικού επιπέδου είναι όλες οι Routh-Hurwitz όρίζουσες Δ_i να είναι θετικές. Ἐπί πλέον αναγκαία συνθήκη για όλες τις ιδιοτιμές τῆς ἐξ. (5) να ἔχουν ἀρνητικὰ πραγματικὰ μέρη εἶναι $\alpha_i > 0$ για ὅλα τὰ i , ἐνῶ ικανή συνθήκη εἶναι ὅλες οἱ όρίζουσες Δ_i ἀρτίας (ἢ περιττῆς) τάξεως να εἶναι θετικές (Linard-Chipart theorem).

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κατωτέρω θά διερευνηθεῖ ἡ ἐπιρροή τῆς ἀλγεβρικής μορφῆς τοῦ μητρώου ἀποσβέσεως $[c_{ij}]$ ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ μέρους τῶν ιδιοτιμῶν ρ μέσω τῆς ἐξ. (8). Συγκεκριμένα θά ἐξεταστοῦν οἱ περιπτώσεις, ὅπου τὸ μητρώο $[c_{ij}]$ εἶναι θετικῶς ὠρισμένο, θετικῶς ἡμιωρισμένο καὶ ἀόριστο [Lancaster (1969)].

Περίπτωση (α): $[c_{ij}]$ θετικῶς ὠρισμένο

Σ'αὐτὴν τὴν περίπτωση, ἐπειδὴ τὸ μητρώο $[a_{ij}]$ καὶ τὸ μητρώο $[V_{ij}(\lambda)]$ για $\lambda < \lambda_{(1)}^C$ εἶναι θετικῶς ὠρισμένα, οἱ τετραγωνικές μορφές $\bar{\mathbf{r}}^T [c_{ij}] \mathbf{r}$, $\bar{\mathbf{r}}^T [a_{ij}] \mathbf{r}$ καὶ $\bar{\mathbf{r}}^T [V_{ij}(\lambda)] \mathbf{r}$ εἶναι θετικές ποσότητες για $\mathbf{r}(\lambda) \neq 0$. Τότε οἱ ρίζες τῆς ἐξ. (8) ἔχουν πραγματικὰ μέρη ἀρνητικὰ ἢ εἶναι ἀρνητικές, ἐφ' ὅσον $\lambda < \lambda_{(1)}^C$ (ἀσυμπτωτική εὐστάθεια). Πράγματι, ἡ διακρίνουσα μπορεῖ να εἶναι ἀρνητική (συζυγεῖς μιγαδικές ιδιοτιμές), μηδέν (διπλὴ ἀρνητικὴ ιδιοτιμὴ) ἢ θετική (δύο ἄνισες ἀρνητικές ρίζες). Για $\lambda = \lambda_{(1)}^C$ (στατική κρίσιμη κατάσταση C) ἡ τελευταία τετραγωνική μορφή γίνεται θετικῶς ἡμιωρισμένη, $\bar{\mathbf{r}}^T [V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)] \mathbf{r} \geq 0$, για ὅλα τὰ \mathbf{r} , ἐνῶ ἡ ἰσότητα ἰσχύει για κάποιον $\mathbf{r} \neq 0$. Αὐτὸ τὸ διάνυσμα, για τὸ ὅποιο $\det [V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)] = 0$, ἀντιστοιχεῖ σὲ κύρια διεύθυνση συντεταγμένων (μετὰ τὴν ἀναγωγή τῆς τετραγωνικής μορφῆς $\bar{\mathbf{r}}^T [V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)] \mathbf{r}$ σὲ διαγώνιο μορφή) για τὴν ὁποία ὁ μικρότερος συντελεστής εὐσταθείας ἢ ἰσοδυνάμως μία ιδιοτιμὴ (ἢ μικρότερη) τοῦ μητρώου $[V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)]$ μηδενίζεται, ἐνῶ ὅλες οἱ ὑπόλοιπες παραμένουν θετικές. Ἡ κρίσιμη κατάσταση ἰσοροπίας C εἶναι εὐσταθὴς ὡς πρὸς ὅλες τὶς κύριες διευθύνσεις συντεταγμένων, πλὴν ἐκείνης για τὴν ὁποία μηδενίζεται ὁ μικρότερος συντελεστής εὐσταθείας (ἢ ἡ μικρότερη ιδιοτιμὴ τοῦ μητρώου ἀκαμψίας) ὡς πρὸς τὴν ὁποία (κύρια διεύθυνση) δὲν γνωρίζουμε, ἂν ὑπάρχει εὐστάθεια ἢ ἀστάθεια. Σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση, πού τὸ μητρώο $[V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)]$ γίνεται ἀνώμαλο, ἢ ἐξ. (8) ἔχει μία ιδιοτιμὴ μηδενική καὶ μία ἀρνητική.

Καθὼς τὸ φορτίο αὐξάνεται βαθμιαίως ἀπὸ τὸ μηδέν, τουλάχιστον εἶνα ζεῦγος συζυγῶν μιγαδικῶν ιδιοτιμῶν, πού ἀκολουθεῖ στὸ ρ -μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸν

δρόμο, ό όποϊός φαίνεται στό Σχ. 1a, καταλήγει σέ διπλή άρνητική ιδιοτιμή για κάποιο $\lambda = \lambda_0$ (ελάχιστα μικρότερο του $\lambda_{(1)}^C$) λόγω του μηδενισμού τής διακρίνουσας. Για $\lambda > \lambda_0$ (άλλα μικρότερο του $\lambda_{(1)}^C$) ή διακρίνουσα γίνεται θετική, όδηγοΰσα σέ μία άρνητική ιδιοτιμή (πού ελαττώνεται άλγεβρικά) και σέ μία επίσης άρνητική ιδιοτιμή (αΰξάνουσα άλγεβρικά), ή όποια πλησιάζει προς την άρχην των συντεταγμένων. Από την έξ. (8) προκύπτει ότι αΰτό τό ζευγος μιγαδικών ιδιοτιμών για $\lambda = \lambda_{(1)}^C$ μετασχηματίζεται σέ μία μηδενική ιδιοτιμή (πού γίνεται θετική και αΰξάνει για $\lambda > \lambda_{(1)}^C$), ή όποια συνεπάγεται στατική αστάθεια, και σέ μία άρνητική ιδιοτιμή (πού ελαττώνεται για $\lambda > \lambda_{(1)}^C$). Αΰτες οι δύο πραγματικές ιδιοτιμές συνεχίζουν, για $\lambda > \lambda_{(1)}^C$, νά κινούνται σέ αντίθετες κατευθύνσεις κατά μήκος του πραγματικοΰ άξονος.

Περίπτωση (6): $[c_{ij}]$ θετικώς ήμιωρισμένο

Σ' αΰτην την περίπτωση (πού εμφανίζεται στη Μηχανική του διαστήματος), $\det[c_{ij}] = 0$, υποθέτουμε ότι μία από τις ιδιοτιμές του μητρώου $[c_{ij}]$ είναι μηδέν, ενώ όλες οι υπόλοιπες είναι θετικές. Θα εξεταστούν δύο ύποπερίπτώσεις, κατά τις όποϊες ή τετραγωνική μορφή $\mathbf{F}^T[V_{ij}(\lambda)]\mathbf{r}$ είναι θετικώς ώρισμένη και άκολουθως θετικώς ήμιωρισμένη.

Σύμφωνα με την πρώτη ύποπερίπτωση ή ποσότης $\mathbf{F}^T[V_{ij}(\lambda)]\mathbf{r}$ είναι θετικώς ώρισμένη δια $\lambda < \lambda_{(1)}^C$ (ή $\alpha_{2n} = \det[V_{ij}(\lambda)]/\det[\alpha_{ij}] > 0$). Οι ιδιοτιμές τής εξίσωσης (5) είναι μιγαδικές με πραγματικά μέρη άρνητικά, πλην ενός ζεύγους συζυγών φανταστικών ριζών. Αΰτό συμβαίνει για κάποιο φορτίο λ , έστω $\lambda = \lambda_H$, τό όποϊο είναι συνάρτηση των συντελεστών άποσβέσεως $[c_{ij}]$ και των μαζών $m_i (> 0)$, δηλ. $\lambda_H = \lambda_H(c_{ij}, m_i)$, αντιστοιχεί σέ δυναμικής μορφής διακλάδωση, ή όποια καλείται έκφυλισμένη διακλάδωση Hopf [Golubitsky και Langford (1981)], εαν παραβιάζεται ή συνθήκη έγκαρσιότητος (transversality condition), δηλαδή $dn/d\lambda|_{\lambda=\lambda_H} = 0$ [Huseyin (1986)]. Από την πάρα πάνω έκφραση του n , έφ' όσον ή τετραγωνική μορφή $\mathbf{F}^T[\alpha_{ij}]\mathbf{r}$ είναι πάντοτε γνωστή θετική ποσότης είναι φανερό ότι τό n εξαρτάται μόνο από την τετραγωνική μορφή $\mathbf{F}^T[c_{ij}]\mathbf{r}$, και έτσι θα πρέπει ν' άποδειχθει ότι ή παράγωγος αΰτης τής ποσότητος ως προς λ , όταν $\lambda = \lambda_H$, είναι μηδέν. Τοΰτο άποδεικνύεται πρόσφορα διαγωνοποιώντας την τετραγωνική μορφή $\mathbf{F}^T[c_{ij}]\mathbf{r}$ μέσω του μετασχηματισμοΰ $\mathbf{r} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}$ όπου \mathbf{H} μητρώο, του όποϊου οι στήλες είναι τά κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του $[c_{ij}]$, τέτοιο ώστε $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}$, ένθα \mathbf{I} τό μοναδιαίο μητρώο. Τότε λαμβάνομε: $\mathbf{F}^T[c_{ij}]\mathbf{r} = \rho_1 \tilde{\mathbf{r}}_1^2 + \rho_2 \tilde{\mathbf{r}}_2^2 + \dots + \rho_n \tilde{\mathbf{r}}_n^2$, όπου ρ_i είναι οι ιδιοτιμές του $[c_{ij}]$ και $\tilde{\mathbf{r}}_i$ οι συνιστώσες του διανύσματος $\tilde{\mathbf{r}}$. Έφ' όσον μία ιδιο-

τιμή του $[c_{ij}]$ είναι μηδέν, έστω $\rho_n=0$, ενώ όλες οι άλλες είναι θετικές, τότε $\tilde{r}=0$ για όλα τα $i \neq n$. Συνεπώς, η παράγωγος ως προς λ της ποσότητας $\tilde{r}^T(\lambda)[c_{ij}]r(\lambda)$ είναι μηδέν, όποτε η συνθήκη έγκαρσιότητας παραβιάζεται. Τότε η αντίστοιχη διακλάδωση είναι μία εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf, ή όποια όδηγεί σε περιοδική κίνηση, όχι όμως σε όριακούς κύκλους. Από πρακτικής πλευράς ενδιαφέρει ιδιαίτερα η περίπτωση αν η δυναμική αυτή διακλάδωση λαμβάνει χώρα για φορτίο μικρότερο του στατικού κρίσιμου φορτίου, ήτοι αν

$$0 < \lambda_H < \lambda_{(1)}^C \quad (11)$$

Έαν η τελευταία ανίσότης επαληθεύεται, έξηγάγαμε ένα μη άναμενόμενο εύρημα, ότι δηλαδή Χαμιλτόνια συστήματα με ελάχιστη απόσβεση μπορεί να εκδηλώσουν μία δυναμική (τοπική) διακλάδωση για φορτίο λ_H μικρότερο του στατικού κρίσιμου φορτίου λυγισμού $\lambda_{(1)}^C$. Αυτή βέβαια είναι μία μεμονωμένη διακλάδωση, διότι για όλα τα λ στο διάστημα $[0, \lambda_{(1)}^C]$, πλην του $\lambda = \lambda_H$, το σύστημα είναι ασυμπτωτικώς εύσταθές. Μπορεί ακόμη κανείς ν' αποδείξει ότι το ζεύγος των συζυγών φανταστικών ιδιοτιμών $\pm j\mu$ που αντιστοιχούν στο λ_H συνδέεται με ένα πραγματικό ιδιοδιάνυσμα, κοινό για το άνευ αποσβέσεως σύστημα και για το μητρώο $[c_{ij}]$ [Kounadis (2004)]. Τουτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω των εξισώσεων (10). Εισάγοντες $v=0$ στις εξισώσεις (10) λαμβάνομεν

$$\begin{bmatrix} [V_{ij}] - \mu^2 [\alpha_{ij}] & -\mu [c_{ij}] \\ \mu [c_{ij}] & [V_{ij}] - \mu^2 [\alpha_{ij}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Έπειδή $[c_{ij}]$ είναι θετικώς ήμιωρισμένο μητρώο το σύστημα αυτό ίκανοποιείται θέτοντας

$$x = \kappa y \quad (\kappa \neq 0) \quad (13)$$

όπου κ πραγματικός αριθμός [Kounadis (2004)]. Δηλαδή, το πραγματικό και φανταστικό μέρος x και y του ιδιοδιανύσματος r είναι γραμμικώς έξηρητημένα. Έτσι το ίδιο πραγματικό ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές $+\mu j$ και $-\mu j$.

Θεωρούμε τώρα την δεύτερη ύποπερίπτωση, όπου τόσο το $[c_{ij}]$, όσο και το $[V_{ij}(\lambda)]$ είναι θετικώς ήμιωρισμένα μητρώα. Έαν το πραγματικό μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο άνωμαλο μητρώο $[V_{ij}(\lambda_{(1)}^C)]$ (που καθορίζει την κρίσιμη κύρια διεύθυνση) συμβαίνει να είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του μητρώου $[c_{ij}]$, τότε η έξ. (8) έχει διπλή μηδενική ιδιοτιμή ($-\rho^2 = \mu^2 = 0$) με δείκτη (index)

ένα, ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Η ανισότητα (16) γίνεται τότε

$$0 < \lambda_H \equiv \lambda_{(1)}^C \quad (14)$$

Αντίθετα με την περίπτωση (συνήθους ή εκφυλισμένης) Hopf διακλάδωσης, το κρίσιμο φορτίο $\lambda_H \equiv \lambda_{(1)}^C$ είναι ανεξάρτητο του μητρώου $[a_{ij}(m_i)]$ (δηλαδή των μαζών m_i). Αυτή η διακλάδωση είναι συγχρόνως δυναμική αλλά και στατική (dynamic and divergence mode of instability), καλουμένη Arnold-Bogdanov διακλάδωση [Arnold (1983)], επαγομένη περιοδική κίνηση αλλά όχι όριακούς κύκλους [Huseyin (1986)], διότι εξαρτάται από μία παράμετρο [Jordan Block of order two (nullity one)].

Οι ανωτέρω δύο τύποι δυναμικών (τοπικών) διακλαδώσεων (που δεν οδηγούν σε όριακούς κύκλους αλλά απλώς σε περιοδική κίνηση) μπορούν επίσης να προσδιορισθούν με την βοήθεια των Routh-Hurwitz κριτηρίων ευσταθείας [Kounadis (2004)]. Οι δυο αυτές περιπτώσεις ως προς τους δρόμους των αντίστοιχων ιδιοτιμών στο ρ -μιαδικό επίπεδο, καθώς το λ αυξάνει βαθμιαίως, φαίνονται στα Σχ. 1b (εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf) και Σχ. 1c (διακλάδωση Arnold-Bogdanov).

Περίπτωση (γ): $[c_{ij}]$ άοριστο

Η περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανισθεί σε προβλήματα αεροδυναμικής αστάθειας [Thompson (1982), Sygulski (1996), Laneville and Mazouzi (1996)], καθώς και υδροδυναμικής αστάθειας [Misra, Wong, Paidoussis (2001)]. Για ένα τέτοιο μητρώο μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι κύριες ελάχιστες ορίζουσες του συμμετρικού μητρώου $[c_{ij}]$ είναι θετικές εκτός της τελευταίας (τάξεως n) που είναι αρνητική (δηλαδή $\det[c_{ij}] < 0$). Τότε όλες οι ιδιοτιμές ρ_i του $[c_{ij}]$ είναι θετικές, πλην μιας που είναι αρνητική, π.χ. ή $\rho_s < 0$. Σ' αυτή την περίπτωση ή τετραγωνική μορφή $\bar{\mathbf{r}}^T [V_{ij}(\lambda)] \mathbf{r}$ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, πράγμα που εξαρτάται από το διάνυσμα $\mathbf{r}(\lambda)$. Αλλά τότε για κάποια ώρισμένη τιμή, $\lambda = \lambda_H$, ή τετραγωνική αυτή μορφή μπορεί να μηδενισθεί. Η εξ. (11) είναι ακόμη εν ισχύει αλλά ο μηδενισμός της ποσότητας $\bar{\mathbf{r}}^T [c_{ij}] \mathbf{r}$ με $\det[c_{ij}] < 0$ μπορεί να γίνει μόνο μετά από κατάλληλη εκλογή του $\mathbf{r}(\lambda) \neq 0$. Εάν αυτό συμβεί για $\lambda = \lambda_H > 0$, τότε η εξ. (8) δίδει ένα ζεύγος συζυγών φανταστικών ριζών, που ικανοποιεί την συνθήκη εγκαρσιότητας (όπως ακολουθώντας αποδεικνύεται), ενώ όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές έχουν πραγματικά μέρη αρνητικά [Marsden and McCracken (1976)]. Το είδος της συνήθους αυτής διακλάδωσης

Hopf μπορεί να εύρεθει μόνο με εφαρμογή μη γραμμικής ανάλυσεως. Αυτή την περίπτωση μπορεί κανείς να μελετήσει ως ακολούθως:

Έπειδή $\rho = \pm j\mu$, διότι $v=0$ λόγω της εξ. (8), εισάγοντας τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{r} και $\bar{\mathbf{r}}$ από τις εξισώσεις (10) στις εξισώσεις (11) και (13) εύρισκομε

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{c}_{ij}] \mathbf{x} + \mathbf{y}^T [\mathbf{c}_{ij}] \mathbf{y} = 0, \quad \mu^2 = \frac{\mathbf{x}^T [\mathbf{V}_{ij}] \mathbf{x} + \mathbf{y}^T [\mathbf{V}_{ij}] \mathbf{y}}{\mathbf{x}^T [\alpha_{ij}] \mathbf{x} + \mathbf{y}^T [\alpha_{ij}] \mathbf{y}} \quad (15)$$

Η εξ. (12) πάλιν ισχύει, αλλά τα \mathbf{x} και \mathbf{y} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (δηλαδή $\mathbf{x} \neq k\mathbf{y}$). Το σύστημα των εξισώσεων (12) για μη μηδενική λύση μπορεί επίσης να γραφεί ως ακολούθως

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & (V_{nn} - \mu^2 \alpha_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ y_n \end{bmatrix} = 0, \quad (y_n \neq 0) \quad (16)$$

όπου A_{11} είναι συμμετρικό μητρώο διαστάσεως $(2n-1) \times (2n-1)$ προκύπτουν από την αναλυτική μορφή του τετραγωνικού μητρώου διαστάσεως $2n \times 2n$ της εξ. (17), μετά παράλειψη της τελευταίας γραμμής και στήλης. A_{12} και A_{21} είναι μητρώα γραμμής και στήλης διαστάσεων $1 \times (2n-1)$ και $(2n-1) \times 1$ αντιστοίχως, τα όποια αντιστοιχούν στην τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη του αρχικού μητρώου διαστάσεως $2n \times 2n$. Τέλος, $\mathbf{z} = (\mathbf{x} \quad y_{n-1})^T$, όπου $\mathbf{y}_{n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1})^T$.

Για γνωστά (δεδομένα) μητρώα $[\alpha_{ij}]$ και $[\mathbf{c}_{ij}]$, προφανώς είναι $A_{11} = A_{11}(\lambda, \mu^2)$, $A_{12} = A_{12}(\lambda, \mu^2)$ και $A_{21} = A_{21}(\lambda, \mu^2)$, και συνεπώς $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda, \mu^2)$ και $\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{y}_{n-1}(\lambda, \mu^2)$. Τα διανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y}_{n-1} είναι γραμμικές συναρτήσεις του στοιχείου $y_n \neq 0$. Εισάγοντες τα \mathbf{x} και \mathbf{y}_{n-1} στις σχέσεις (15), λαμβάνομε δύο εξισώσεις ως προς λ και μ^2 , τις όποιες μπορούμε εύκολα να επιλύσωμε. Η μικρότερη θετική τιμή $\lambda = \lambda(\mathbf{m}_i, \mathbf{c}_{ij})$ αντιστοιχεί στο διακλαδικό (κρίσιμο) φορτίο Hopf $\lambda = \lambda_H$.

Αντίθετα προς την ανωτέρω περίπτωση (6), η τελευταία διακλάδωση είναι ή τυπική (συνήθης) διακλάδωση Hopf, διότι ικανοποιείται η συνθήκη έγκαρσιότητας, δηλαδή $dv/d\lambda|_{\lambda=\lambda_H} \neq 0$, με ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{r}(\lambda)$, το όποιο είναι μιγαδικό [δηλαδή $\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda) + j\mathbf{y}(\lambda)$]. Πράγματι, μέσω των μετασχηματισμών $\mathbf{x} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{y} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{y}}$, όπου $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}$ (μοναδιαίο μητρώο) προκύπτει:

$\bar{\mathbf{r}}^T(\lambda) [\mathbf{c}_{ij}] \mathbf{r}(\lambda) = \rho_1 \tilde{r}_1^2 + \rho_2 \tilde{r}_2^2 + \dots + \rho_n \tilde{r}_n^2$, όπου ως ανωτέρω δηλώθηκε, $\rho_s < 0$ και $\rho_i > 0$ για όλα τα $i \neq s$, ενώ $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Τότε, η τελευταία τετραγωνική μορφή, η όποια

μηδενίζεται για $\mathbf{r}(\lambda_H) \neq 0$, έχει γενικώς μη μηδενική παράγωγο ως προς λ για $\lambda = \lambda_H$ (τυπική περίπτωση διακλάδωσης Hopf). Υπενθυμίζεται ότι τόσο η έκφυλισμένη, όσο και η τυπική διακλάδωση Hopf συνδέονται με περιοδικές κινήσεις αλλά ειδικότερα η τυπική διακλάδωση Hopf οδηγεί σε όριακούς κύκλους που διακλαδίζονται από τον τετριμμένο δρόμο ισορροπίας, $\mathbf{q} = 0$, για $\lambda = \lambda_H$. Η συνθήκη έγκαρσιότητας μπορεί ν' αποδειχθεί (αν και δυσκολότερα) και μέσω των Routh-Hurwitz κριτηρίων ευσταθείας [Kounadis (2004)].

Στό Σχ. 1d φαίνεται η διαδρομή του (κρισίμου) ζεύγους ιδιοτιμών στο ρ -μιγαδικό επίπεδο, καθώς το λ αυξάνεται βαθμιαίως. Το ζεύγος αυτό ιδιοτιμών κόβει τον φανταστικό άξονα με μη μηδενική κλίση (δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη έγκαρσιότητας). Αυτή είναι μία τυπική δυναμική διακλάδωση Hopf που οδηγεί σε όριακούς κύκλους, τέτοια ώστε για λ ελάχιστα μεγαλύτερο του λ_H το ζεύγος αυτό των συζυγών φανταστικών ιδιοτιμών να μετατρέπεται σε ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών με πραγματικό μέρος θετικό. Ακολουθως, για $\lambda = \lambda_{(1)}^C (> \lambda_H)$, όπως προκύπτει από την εξ. (8), ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών μετασχηματίζεται σε μία μηδενική ιδιοτιμή και μία αρνητική ιδιοτιμή. Τέλος, καθώς το φορτίο λ αυξάνεται πάνω από το $\lambda_{(1)}^C$, η πρώτη ιδιοτιμή γίνεται θετική και η δεύτερη ιδιοτιμή αρνητική, αμφότερες κινούμενες σ' αντίθετες κατευθύνσεις κατά μήκος του πραγματικού άξονος.

Ανωτέρω δείξαμε ότι γραμμικές αναλύσεις μπορούν να προσφέρουν πολύτιμες πληροφορίες για την φύση των λύσεων μη γραμμικών συστημάτων στην περιοχή γνωστών λύσεων. Βεβαίως, η καθολική ευστάθεια (δηλαδή η μακράς διάρκειας συμπεριφορά) μπορεί να προσδιορισθεί μόνο μέσω μη γραμμικής δυναμικής αναλύσεως. Όλα τα εύρηματα της παρούσης μελέτης ελέγχθησαν μέσω του αριθμητικού σχήματος Runge-Kutta.

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Θεωρούμε τον δύο βαθμών έλευθερίας πρόβολο του Ziegler υπό θλιπτικό φορτίο στο έλευθερο άκρο του. Οι μη γραμμικές εξισώσεις κινήσεως του τελείου διακλαδικού συστήματος, ειλημμένες από την βιβλιογραφική αναφορά [9], αφού προηγουμένως τεθεῖ $\gamma = 0$ και $\eta = 1$, έχουν ως ακολούθως

$$\left. \begin{aligned} (1+m)\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + c_{11}\dot{\theta}_1 + c_{12}\dot{\theta}_2 + 2\theta_1 - \theta_2 - \lambda \sin \theta_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + c_{12}\dot{\theta}_1 + c_{22}\dot{\theta}_2 - \theta_1 + \theta_2 - \lambda \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

όπου m είναι ο λόγος τῶν δύο μαζῶν καὶ λ τὸ θλιπτικὸ φορτίο στὸ ἄκρο τοῦ προβόλου.

Γραμμικοποιώντας τὶς τελευταῖες ἐξισώσεις, ἀφοῦ θέσωμεν

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = e^{\rho t} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = e^{\rho t} \Phi \quad (18)$$

λαμβάνομεν

$$([\alpha_{ij}]\rho^2 + [c_{ij}]\rho + [V_{ij}]\Phi = 0 \quad (19)$$

$$\text{ὅπου } [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad [V_{ij}] = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωση προκύπτουσα ἀπὸ τὴν ἐξ. (5) εἶναι

$$\rho^4 + \alpha_1 \rho^3 + \alpha_2 \rho^2 + \alpha_3 \rho + \alpha_4 = 0 \quad (21)$$

ὅπου

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{m}(\alpha_{11}c_{22} + \alpha_{22}c_{11} - 2\alpha_{12}c_{12}), & \alpha_2 &= \frac{1}{m}(\alpha_{11}V_{22} + \alpha_{22}V_{11} - 2V_{12}\alpha_{12} + |c_{ij}|) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{m}(c_{11}V_{22} + c_{22}V_{11} - 2V_{12}c_{12}), & \alpha_4 &= \frac{1}{m}(V_{11}V_{22} - V_{12}^2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ἡ ἐξίσωση λυγισμοῦ $\det[V_{ij}(\lambda)] = 0$ δίδει $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ ἀπὸ τὴν ὁποία λαμβάνομε

$$\lambda_{(1)}^c = 0,5(3 - \sqrt{5}) = 0,381966011, \quad \lambda_{(2)}^c = 0,5(3 + \sqrt{5}) = 2,618033989 \quad (23)$$

Ἀκολούθως θεωροῦμε πρότυπα πού ἀντιστοιχοῦν στοὺς ἀκολουθούς τρεῖς διαφορετικούς τύπους τοῦ μητρώου ἀποσβέσεως $[c_{ij}]$:

$$\begin{aligned} [c_{ij}] &= \begin{bmatrix} 0,01 & 0,002 \\ 0,002 & 0,0004 \end{bmatrix}, & [c_{ij}] &= \begin{bmatrix} 0,080 & 0,0494427 \\ 0,0494427 & 0,0305572572 \end{bmatrix} \\ [c_{ij}] &= \begin{bmatrix} 0,01 & 0,0325 \\ 0,0325 & 0,012 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Τὰ δύο πρῶτα μητρώα ἀπόσβεσης εἶναι θετικῶς ἡμιωρισμένα (δηλ. $\det[c_{ij}] = |c_{ij}| = 0$), ἐνῶ τὸ τρίτο μητρῶο εἶναι ἀόριστο (δηλ. $\det[c_{ij}] = -9,3625 \times 10^{-4} < 0$).

Περίπτωση 1: $[c_{ij}]$ θετικῶς ἡμιωρισμένο

Θεωρούμε δύο υποπεριπτώσεις: Μία εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf ($[V_{ij}]$ είναι θετικῶς ὠρισμένος) καὶ μία διακλάδωση διπλῆς μηδενικῆς ιδιοτιμῆς ($\det[V_{ij}]=0$).

Ἐκφυλισμένη διακλάδωση Hopf ($m=10$)

Ἐν προκειμένῳ ἔχομε [Kounadis (2004)]

$$[c_{ij}]\varphi=0, ([\alpha_{ij}]\rho^2+[V_{ij}(\lambda)])\varphi=0 \quad (25)$$

Ἀπὸ τὴν πρώτη αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων λαμβάνομε

$$0,01\varphi_1+0,002\varphi_2=0 \quad \eta \quad \varphi_1/\varphi_2=-0,20 \quad (26)$$

ἐνῶ ἀπὸ τὴν δεύτερη εὐρίσκομε

$$\rho^2 = \frac{1-(2-\lambda)(\varphi_1/\varphi_2)}{\alpha_{11}(\varphi_1/\varphi_2)+\alpha_{12}} = \frac{\varphi_1/\varphi_2 - 1 + \lambda}{\alpha_{12}(\varphi_1/\varphi_2)+\alpha_{22}} \quad (27)$$

Εἰσάγοντες στὶς ὡς ἄνω ἐξισώσεις $\alpha_{11}=11$, $\alpha_{12}=\alpha_{22}=1$ καὶ $\varphi_1/\varphi_2=-0,20$ λαμβάνομε

$$\lambda_H = \frac{0,32}{1,04} = 0,307692307 < \lambda_{(1)}^C = 0,381966011. \quad (28)$$

Ἀπὸ τὴν προτελευταία ἐξίσωση ἐπίσης εὐρίσκομε $\mu^2=-\rho^2=1,115384615$ καὶ $\mu=1,056117709$. Τὸ ἀντίστοιχο δὲ ζεῦγος φανταστικῶν ριζῶν εἶναι $\rho_{3,4}=\pm 1,056117709j$, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες συζυγεῖς μιγαδικές ρίζες εἶναι $\rho_{1,2}=-0,00052\pm 0,124034j$.

Αὐτὴ εἶναι μία εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf, διότι ἡ συνθήκη ἐγκαρσιότητος παραβιάζεται. Πράγματι, ἀπὸ τὴν ἐξ. (32), θέτοντες $\varphi=\varphi_1/\varphi_2$ εὐρίσκομε

$$\frac{\varphi+\lambda-1}{\varphi+1} = \rho^2 = -1,115384615 \quad \eta \quad \varphi = -\frac{\lambda+0,115384615}{2,115384615} \quad (29)$$

Βάσει τοῦ 1ου μητρώου (24)

$$\varphi^T [c_{ij}] \varphi = 0,01\varphi^2 + 0,004\varphi + 0,0004 \quad (30)$$

Δοθέντος ὅτι τὸ μητρώο $[\alpha_{ij}]$ εἶναι θετικῶς ὠρισμένο καὶ ὅτι

$$v = -0,5\varphi^T [c_{ij}] \varphi / \varphi^T [\alpha_{ij}] \varphi$$

εὐρίσκομε

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} [-\Phi^T [c_{ij}] \Phi] = - \left[0,02\Phi \frac{d\Phi}{d\lambda} + 0,004 \frac{d\Phi}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_H} = 0 \\ \text{και συνεπώς} & \frac{d^2}{d\lambda^2} [-\Phi^T [c_{ij}] \Phi] = -0,02 \left(\frac{d\Phi}{d\lambda} \right)^2 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Δηλαδή, αυτή είναι μία εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf στο μεμονωμένο σημείο $\lambda=\lambda_H$, ενώ για $0 < \lambda < \lambda_H < \lambda_{(1)}^C$ ή τετριμμένη κατάσταση $\mathbf{q}=0$ είναι ασυμπτωτικώς ευσταθής. Τα Σχ. 2 και 3 δείχνουν για $\lambda=0,29 < \lambda_H$ και $\lambda=0,33 > \lambda_H$ τις αντίστοιχες εικόνες (portraits) στο επίπεδο φάσεως, οι οποίες αντιστοιχούν σε μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Και στις δύο περιπτώσεις (έπιλυθείσες με εφαρμογή μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης) το σύστημα εκδηλώνει σημειακό έλκκη. Το Σχ. 4a δείχνει την εικόνα στο επίπεδο φάσεως μιας (μεμονωμένης) εκφυλισμένης διακλάδωσης Hopf για $\lambda=\lambda_H$ (που οδηγεί σε άπλη περιοδική κίνηση). Στο Σχ. 4b φαίνονται σαφέστερα οι πολύ μικρού εύρους κλειστές τροχιές περι την αρχική θέση ισοροπίας, οι οποίες εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Στο Σχ. 5 παρατηρούμε την εκ του λ εξαρτώμενη διαδρομή της κρίσιμης μιγαδικής ρίζας (2^ο ζεύγος ιδιοτιμών) στο ρ -μιγαδικό επίπεδο, ή οποία όταν $\lambda=\lambda_H$ μετασχηματίζεται σ' ένα ζεύγος καθαρως φανταστικών ριζών που εφάπτονται στον φανταστικό άξονα. Το 1^ο ζεύγος για $\lambda=\lambda_{(1)}^C$ οδηγεί σε στατική αστάθεια, όπως φαίνεται στο Σχ. 6.

Διακλάδωση διπλής μηδενικής ιδιοτιμής (ανεξάρτητη του m)

Σ' αυτή την περίπτωση, όπου τα μητρώα $[c_{ij}]$ και $[V_{ij}(\lambda)]$ είναι θετικώς ήμιωρισμένα, για $n=2$ εύρισκομε $\alpha_3=\alpha_4=0$. Το Σχ. 7 δείχνει την εκ του λ εξαρτώμενη διαδρομή της κρίσιμης μιγαδικής ρίζας (2ο ζεύγος ιδιοτιμών) για $\lambda < \lambda_{(1)}^C$. Για $\lambda=\lambda_{(1)}^C$ αμφότερες οι ιδιοτιμές διέρχονται από την αρχή των συντεταγμένων, ενώ για $\lambda > \lambda_{(1)}^C$ κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις επί του πραγματικού άξονος. Οι αντίστοιχες διαδρομές του 1^{ου} ζεύγους ιδιοτιμών που συνδέεται με το 2^ο φορτίο λυγισμού φαίνονται στο Σχ. 8. Το Σχ. 9 δείχνει στο επίπεδο φάσεως την περιοδική κίνηση έλλειψοειδούς μορφής για $\lambda=\lambda_{(1)}^C$ (που δεν οδηγεί σε οριακούς κύκλους), της οποίας η τελική τροχιά εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Έν τούτοις, για $\lambda=0,384093 > \lambda_{(1)}^C$ ή εξ. (5) της γραμμικής ανάλυσεως έχει μία θετική ρίζα, οδηγούσα σε μη φραγμένη κίνηση (Σχ. 10a), και έτσι η τετριμμένη κατάσταση είναι τοπικώς ασταθής. Όμως, ή μη γραμμική δυναμική ανάλυση,

δείχνει ότι το σύστημα (μετά από κάποιες προσωρινά πραγματοποιούμενες μεγάλου εύρους ταλαντώσεις που διέρχονται από την αρχή των συντεταγμένων, σχήματος οκτώ), τελικώς τείνει ασυμπτωτικώς σε μία από τις δύο ευσταθείς θέσεις ισορροπίας (Σχ. 10b, c) του προβόλου. Αυτός ο σημειακός έλκτης μπορεί να προσδιορισθεί και μέσω μη γραμμικής (μεταλυσιμικής) στατικής ανάλυσεως.

Περίπτωση 2: $[c_{ij}]$ άοριστο

Η τυπική δυναμική διακλάδωση Hopf συνδέεται με το τρίτο των μητρώων άποσβέσεως των εξ. (24), όπου $m=10$.

Hopf διακλάδωση ($m=10$)

Θέτοντες $\mathbf{q}=\mathbf{w}+j\boldsymbol{\psi}$, όπου $\mathbf{w}=(\omega_1, \omega_2)^T$ και $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1, \psi_2)^T$ ή εξ. (12) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda-\alpha_{11}\mu^2 & -1-\alpha_{12}\mu^2 & -\mu c_{11} & \vdots & -\mu c_{12} \\ -1-\alpha_{12}\mu^2 & 1-\lambda-\alpha_{22}\mu^2 & -\mu c_{12} & \vdots & -\mu c_{22} \\ \mu c_{11} & \mu c_{12} & 2-\lambda-\alpha_{11}\mu^2 & \vdots & -1-\alpha_{12}\mu^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu c_{12} & \mu c_{22} & -1-\alpha_{12}\mu^2 & \vdots & 1-\lambda-\alpha_{22}\mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \psi_1 \\ \dots \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

όπου α_{ij} και c_{ij} δίδονται από την εξ. (25) και την τρίτη των εξ. (24).

Με την βοήθεια της τελευταίας εξίσωσης εύρισκομε τὰ ω_1, ω_2 και ψ_1 ως γραμμικές συναρτήσεις του ψ_2 , τὰ ὁποῖα ἀκολουθῶς εἰσάγονται στὴν εξ. (15). Ἀντικαθιστῶντες τὸ \mathbf{x} μὲ τὸ \mathbf{w} καὶ τὸ \mathbf{y} μὲ τὸ $\boldsymbol{\psi}$, λαμβάνομε δύο εξισώσεις ὡς πρὸς λ καὶ μ^2 , ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῶν ὁποίων εύρισκομε

$$\lambda_H = 0,193698381 < \lambda_{(1)}^C, \mu = 1,109221303 \quad (33)$$

Τὰ λ καὶ μ μπορούμε νὰ προσδιορίσουμε γιὰ $n=2$ μέσω τῆς εξίσωσης

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix} = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_4 = 0 \quad (34)$$

Ἡ μικρότερη θετική τιμὴ τοῦ λ ἀντιστοιχεῖ στὸ διακλαδικὸ (κρίσιμο) φορτίο Hopf $\lambda=\lambda_H$.

Αὐτὴ ἡ δυναμικὴ διακλάδωση εἶναι τυπικὴ διακλάδωση Hopf, πὺ ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκη ἐγκαρσιότητος, $dn/d\lambda|_{\lambda=\lambda_H} \neq 0$ ἢ ἀκόμη λόγω τῆς εξ. (15)

$d(\mathbf{x}^T[c_{ij}]\mathbf{x} + \mathbf{y}^T[c_{ij}]\mathbf{y})/d\lambda|_{\lambda=\lambda_H} \neq 0$. Πράγματι ἡ εξ. (12) δίδει

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{1}{\mu} [\mathbf{c}_{ij}]^{-1} ([\mathbf{V}_{ij}] - \mu^2 [\boldsymbol{\alpha}_{ij}]) \mathbf{x} \\ \mathbf{B} \mathbf{x} &= 0 \\ \text{όπου } \mathbf{B} &= \mu^2 [\mathbf{c}_{ij}] + ([\mathbf{V}_{ij}] - \mu^2 [\boldsymbol{\alpha}_{ij}]) [\mathbf{c}_{ij}]^{-1} ([\mathbf{V}_{ij}] - \mu^2 [\boldsymbol{\alpha}_{ij}]) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Δυνάμει τῶν τελευταίων ἐξισώσεων προσδιορίζομε τὰ *ιδιοδιανύσματα* $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\lambda)$ καὶ $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\lambda)$ γιὰ τὰ ἀνωτέρω μητρῶα $[\mathbf{V}_{ij}(\lambda)]$, $[\mathbf{c}_{ij}]$, $[\boldsymbol{\alpha}_{ij}]$ καὶ $\mu=1,109221303$, εὐρίσκοντες ὅτι:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 34,71295060\lambda^2 + 355,969942689\lambda - 70,2532001365 \\ x_2 &= 12,817089453\lambda^2 + 140,8213702609\lambda - 27,7577490896 \\ y_1 &= 293,743611521\lambda - 56,897412884 \\ y_2 &= 962,919468665\lambda^2 + 9784,041222154\lambda - 1931,280889747 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων λαμβάνομε

$$f(\lambda) = \mathbf{x}^T [\mathbf{c}_{ij}] \mathbf{x} + \mathbf{y}^T [\mathbf{c}_{ij}] \mathbf{y} = 0$$

$$\text{ἢ } f(\lambda) = 11169,5\lambda^4 + 245400\lambda^3 + 1,29279 \cdot 10^6 \lambda^2 - 528770\lambda + 52118,4 = 0 \quad (37)$$

ὅπου $f(\lambda_H) = -1,01863 \cdot 10^{-9} \approx 0$, ἐνῶ $df(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_H} = 0,13736 \neq 0$ (δηλαδή ἡ συνθήκη ἐγκαρσιότητας ικανοποιεῖται).

Τὸ Σχ. 11 δείχνει τὴν συναρτήση τοῦ λ διαδρομὴ τοῦ κρίσιμου ζεύγους ιδιοτιμῶν, ἣ ὁποία τέμνει τὸν φανταστικὸ ἄξονα (τυπικὴ διακλάδωση Hopf). Γιὰ $\lambda > \lambda_H$ ($< \lambda_{(1)}^C$) αὐτὸ τὸ ζεύγος ιδιοτιμῶν ἀποκτᾶ πραγματικὸ μέρος θετικό. Τότε τὸ σύστημα ἐκδηλώνει εὐσταθεῖς ὀριακοὺς κύκλους (περιοδικὸς ἔλικτης). Τὸ Σχ. 12 δείχνει τὴν διαδρομὴ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τοῦ 1^{ου} ζεύγους ιδιοτιμῶν ποὺ συνδέεται μὲ στατικὴ ἀστάθεια γιὰ $\lambda = \lambda_{(1)}^C > \lambda_H$. Στὸ Σχ. 13a, b βλέπουμε τὴν συμπεριφορὰ τοῦ συστήματος στὸ ἐπίπεδο φάσεως.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τὰ κυριώτερα συμπεράσματα τῆς παρούσης δυναμικῆς τοπικῆς εὐστάθειας αὐτόνομων συμμετρικῶν συστημάτων μὲ πολὺ μικρὴ απόσβεση εἶναι:

1. Τὰ συστήματα αὐτὰ κάτω ἀπὸ ὀρισμένες συνθήκες μπορεῖ νὰ ἐκδηλώσουν δυναμικῆς μορφῆς ἀστάθεια γιὰ φορτίο μικρότερο τοῦ στατικοῦ λόγου: (α) μεμονωμένης δυναμικῆς διακλάδωσης Hopf (ἐκφυλισμένης ἢ τυπικῆς) καὶ (β) δυναμικῆς διακλάδωσης διπλῆς μηδενικῆς ιδιοτιμῆς.

2. Ἐκτός τῆς περιπτώσεως τυπικῆς διακλάδωσης Hopf (πού ὀδηγεῖ σέ ὀριακούς κύκλους), οἱ δυό ἄλλες περιπτώσεις ὀδηγοῦν σέ ἀπλές περιοδικές κινήσεις, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τίς ἀρχικές συνθήκες.
3. Ἐκφυλισμένη διακλάδωση Hopf ἔχομε, ὅταν τὸ μητρῶο ἀποσβέσεως εἶναι θετικῶς ἡμιωρισμένο καὶ τὸ μητρῶο ἀκαμψίας θετικῶς ὠρισμένο.
4. Δυναμικὴ διακλάδωση διπλῆς μηδενικῆς ιδιοτιμῆς ἔχομε, ὅταν τόσο τὸ μητρῶο ἀποσβέσεως, ὅσο καὶ τὸ μητρῶο ἀκαμψίας εἶναι θετικῶς ἡμιωρισμένα μὲ κοινὸ πραγματικὸ ἰδιοδιάνυσμα.
5. Τυπικὴ δυναμικὴ διακλάδωση Hopf μπορεῖ νὰ συμβεῖ, ὅταν τὸ μητρῶο ἀποσβέσεως εἶναι ἀόριστο. Ἀπὸ πρακτικῆς πλευρᾶς ἔχει ἰδιαιτέρο ἐνδιαφέρον, ὅταν τόσο ἡ τυπικὴ, ὅσο καὶ ἡ ἐκφυλισμένη διακλάδωση Hopf συμβαίνουν γιὰ φορτίο λ μικρότερο τοῦ στατικοῦ κρίσιμου φορτίου.
6. Τὸ ἰδιοδιάνυσμα ἐκφυλισμένης διακλάδωσης Hopf εἶναι πραγματικό, ἐνῶ ἐκεῖνο τῆς τυπικῆς διακλάδωσης Hopf μιγαδικό.
7. Ἡ ἐφαρμογὴ γραμμικῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως ὀδηγεῖ σέ μὴ φραγμένη κίνηση, ἐνῶ ἡ μὴ γραμμικὴ δυναμικὴ ἀνάλυση δείχνει ὅτι τὸ σύστημα εἶναι εὐσταθές, ἐκδηλώνοντας σημειακὸ ἔλκκη.

REFERENCES

1. Ziegler, H., "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik", Ing. Arch., 20, 49-56 (1952).
2. Nemat-Nasser, S. and Herrmann, G., "Some general Considerations Concerning the Destabilizing Effect in Nonconservative Systems", ZAMP 17, 305-313 (1966).
3. Crandall, S. H., "The Role of Damping in Vibration Theory", J. Sound Vibr. 11(1), 3-18 (1970).
4. Huseyin, K., "Multiple-Parameter Stability Theory and its Applications", Oxford Eng. Sciences, Series 18, Clarendon Press, Oxford (1986).
5. Zajak, E. E., "The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions", J. Aeronaut. Sci. 11, 46-49 (1964).
6. Zajak, E. E., "Comments on Stability of Damped Mechanical Systems, and a Further Extension", AIAA J., 3, 1749-1750 (1965).
7. Huseyin, K., "Vibrations and Stability of Multiple-Parameter Systems", Sijthoff & Noordhoff Intern. Publishing, Netherlands (1978).
8. Kounadis, A. N., "A Geometric Approach for Establishing Dynamic

- Buckling Loads of Autonomous Potential Two-DOF Systems", *J. Appl. Mech.*, ASME, 66, 55-61 (1999).
9. Kounadis, A. N., "On the Failure of Static Stability Analyses of Nonconservative Systems in Regions of Divergence Instability", *Int. J. Solids & Structures* 31, No 15, 2099-2120 (1994).
 10. Kounadis, A. N., "Non-Potential Dissipative Systems Exhibiting Periodic Attractors in Region of Divergence", *Chaos, Solitons & Fractals*, 8, No 4, 583-612 (1997)₁.
 11. Kounadis, A. N., "Criteria for the Occurrence of Flutter Instability Before Buckling in Nonconservative Dissipative Systems", *AIAA J.*, 35(3), 509-518, (1997)₂.
 12. Bolotin, V. V., Grishko, A. V. and Petrovsky, A. V., "Secondary Bifurcations and Global Instability of an Aeroelastic Nonlinear System in the Divergence Domain", *J. Sound and Vibration*, 191(3), 431-451 (1996).
 13. Gantmacher, E. R., "The Theory of Matrices", Chelsea, New York (1959).
 14. Kounadis, A. N., "Hamiltonian Weakly Damped Autonomous Systems Exhibiting Periodic Attractors", *ZAMP* (to be published 2004).
 15. Lancaster, P., "Theory of Matrices", Academic Press, New York (1969).
 16. Golubitsky, M. and Langford, W. F., "Classification and Unfoldings of Degenerate Hopf Bifurcations", *J. Diff. Eqns*, 41, 375-415 (1981).
 17. Arnold, V. I., "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", Springer-Verlag, New York (1983).
 18. Thompson, J. M. T., "Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering", John Wiley and Sons, New York (1982).
 19. Sygulski, R., "Dynamic Stability of Pneumatic Structures in Wind: Theory and Experiment", *J. of Fluids and Structures* 10, 945-963 (1996).
 20. Laneville A. and Mazouzi A., "Wind-Induced Owalling Oscillations of Cylindrical Shells: Critical Onset Velocity and Mode Prediction", *J. of Fluids and Structures* 10, 691-704 (1996).
 21. Misra A. K., Wong S. S. T. and Paidoussis M. P., "Dynamics and Stability of Pinned-Clamped and Clamped-Pinned Cylindrical Shells Conveying Fluid", *J. of Fluids and Structures* 15, 1153-1166 (2001).
 22. Marsden, J. E. and McCracken, M., "The Hopf Bifurcation and its Applications", *Appl. Math. Sciences*, Vol. 19, Springer-Verlag, New York (1976).

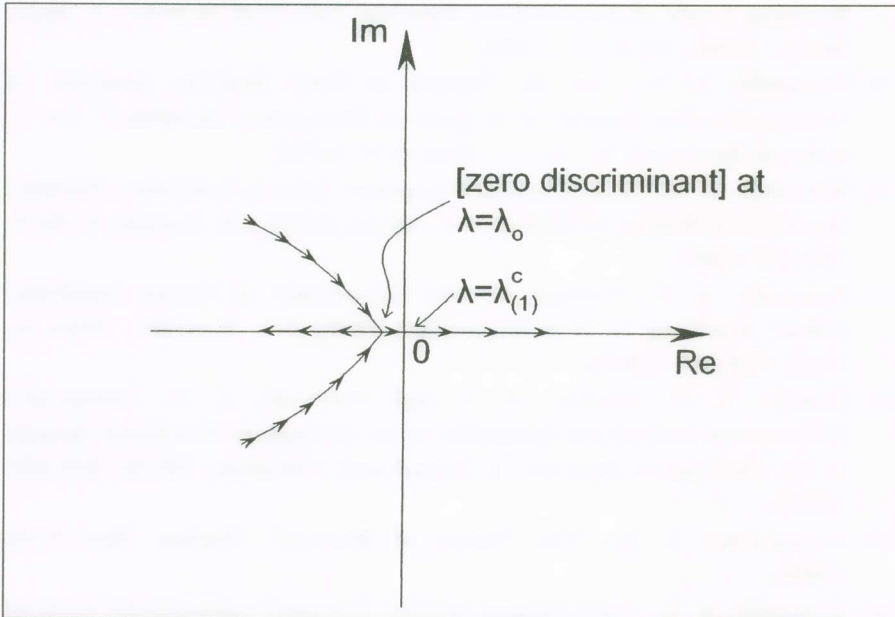


Fig. 1a

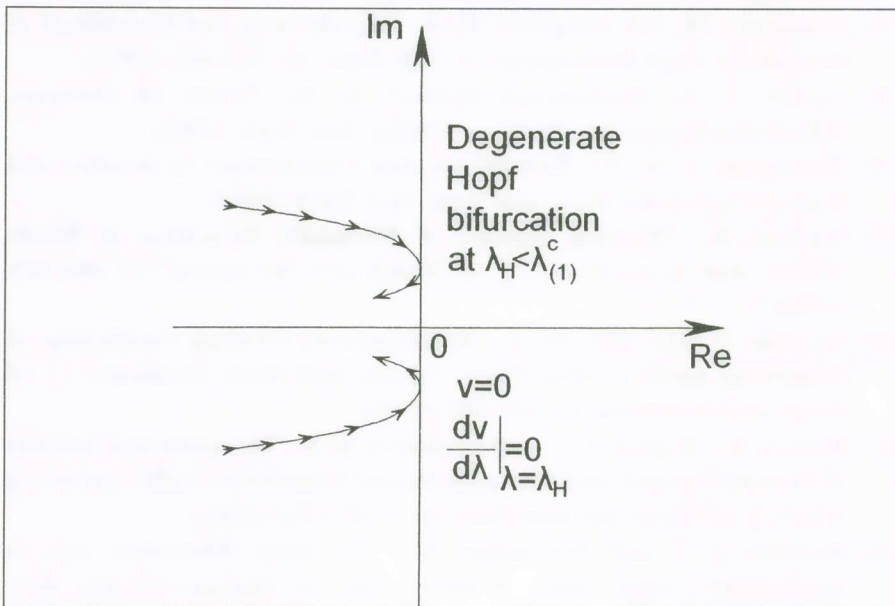


Fig. 1b

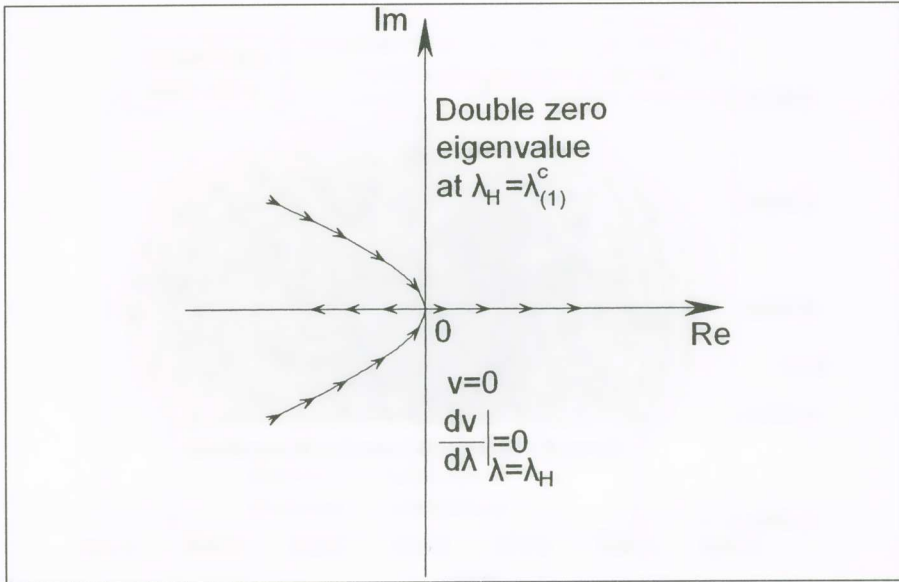


Fig. 1c

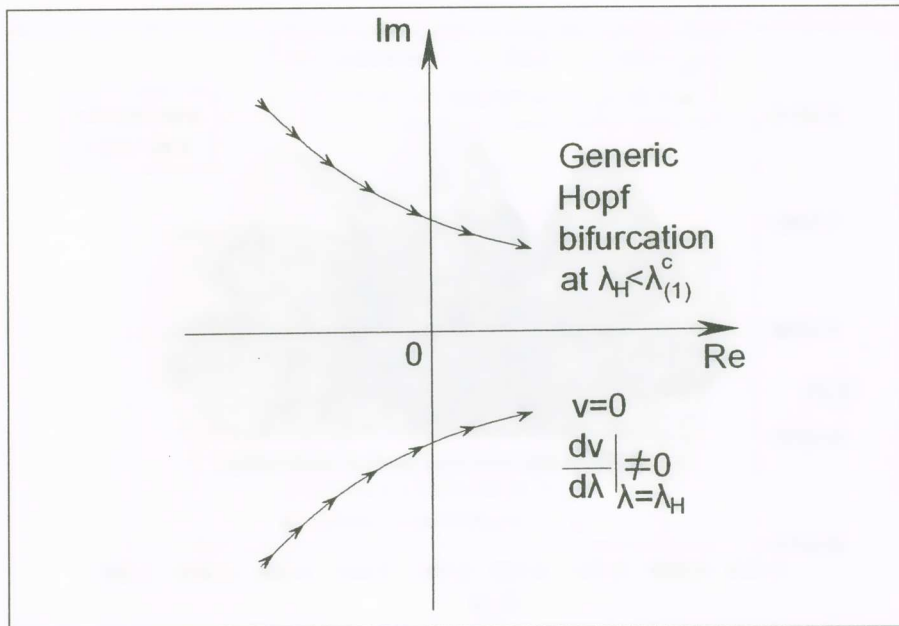


Fig. 1d

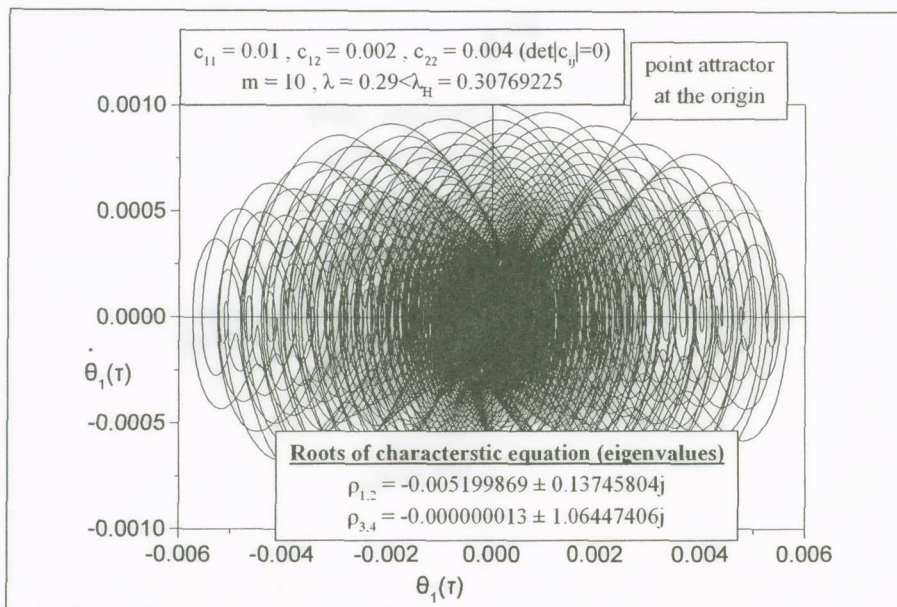


Fig. 2

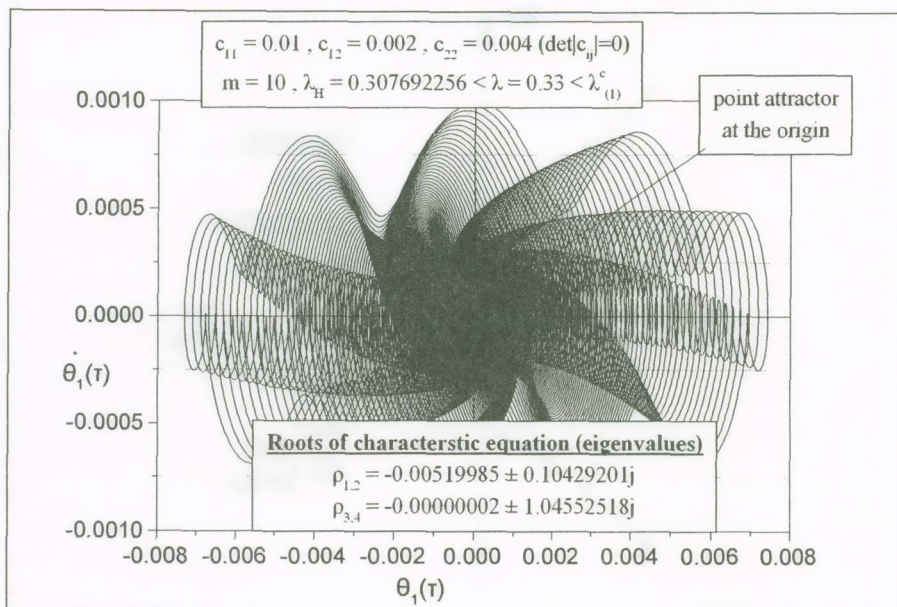


Fig. 3

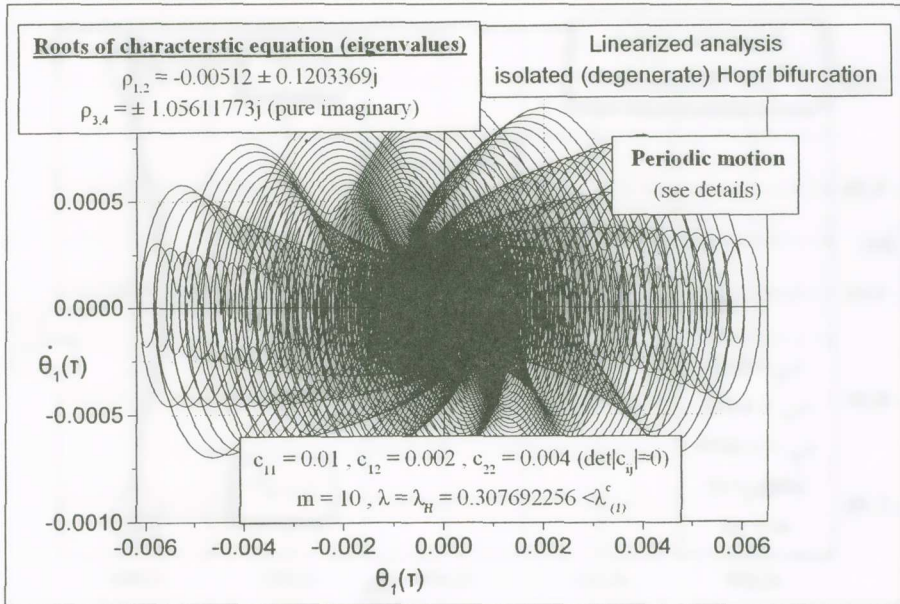


Fig. 4a

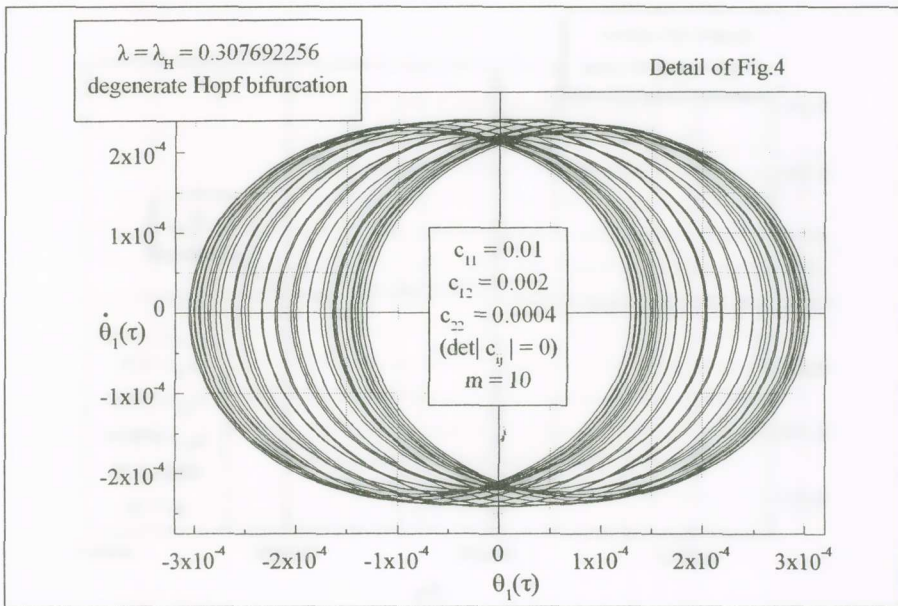


Fig. 4b

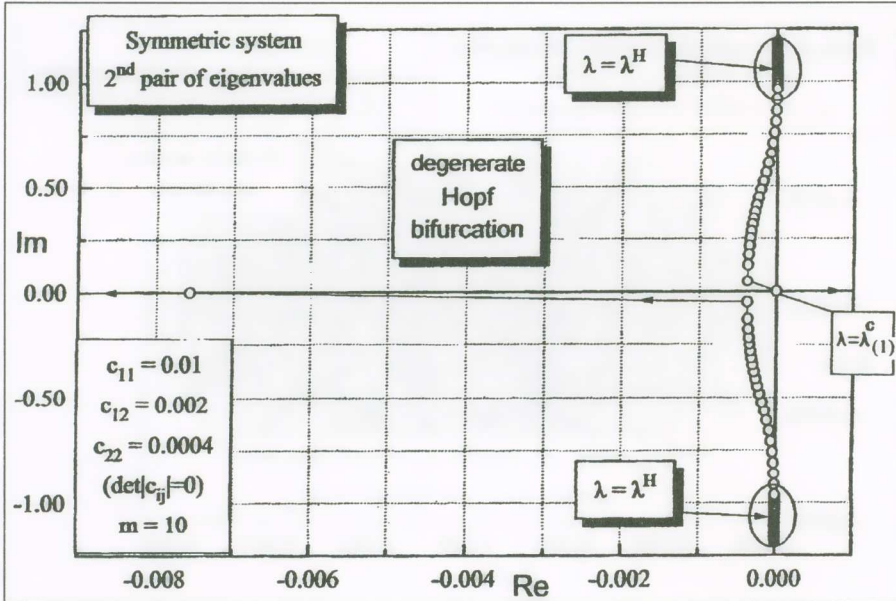


Fig. 5

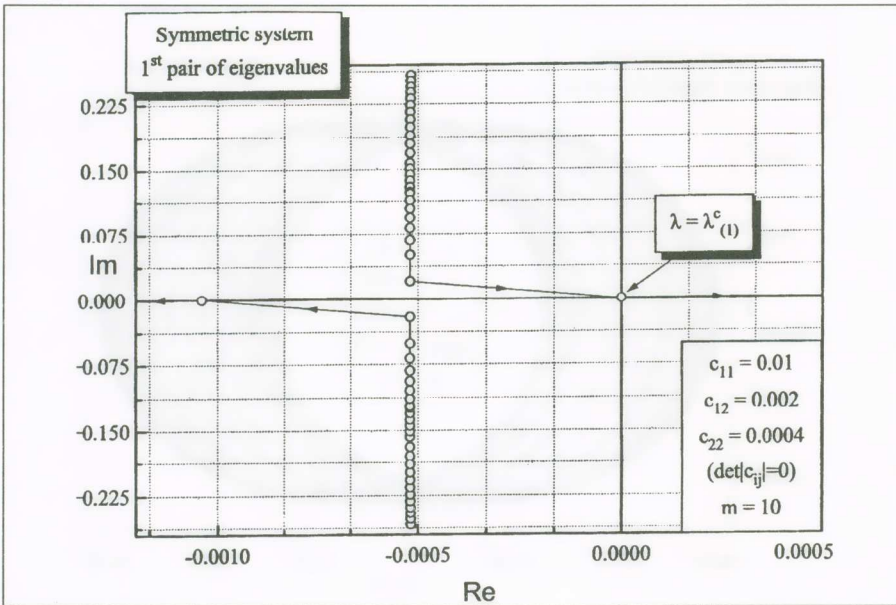


Fig. 6

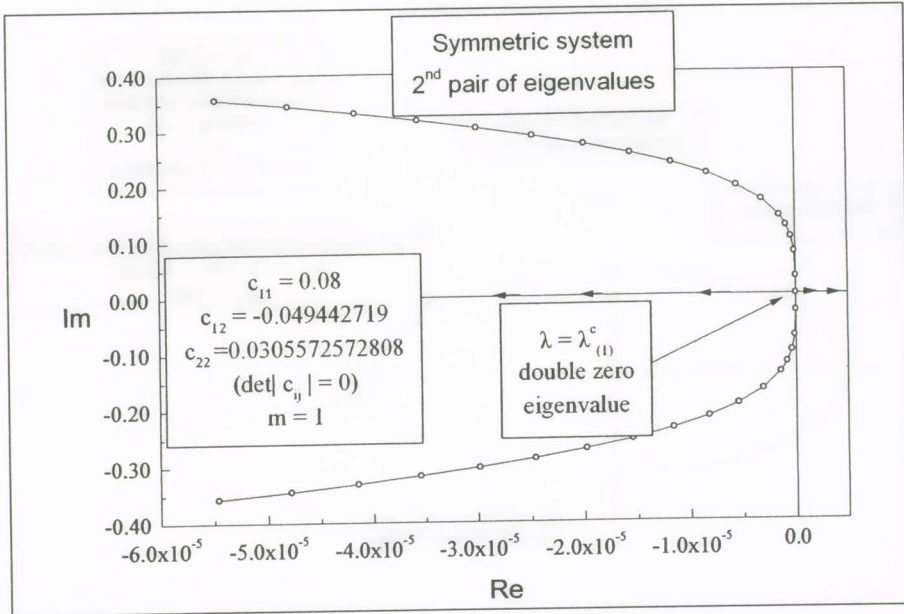


Fig. 7

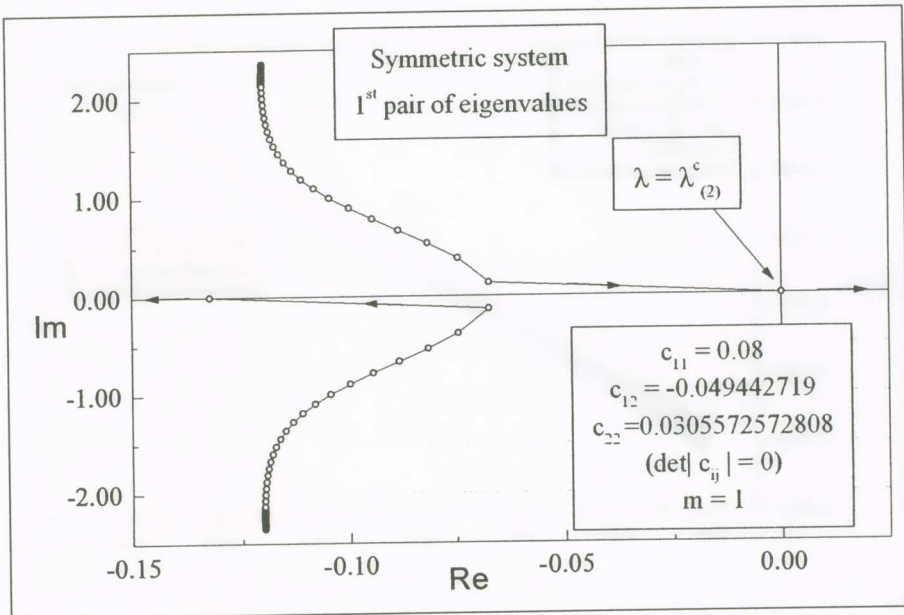


Fig. 8

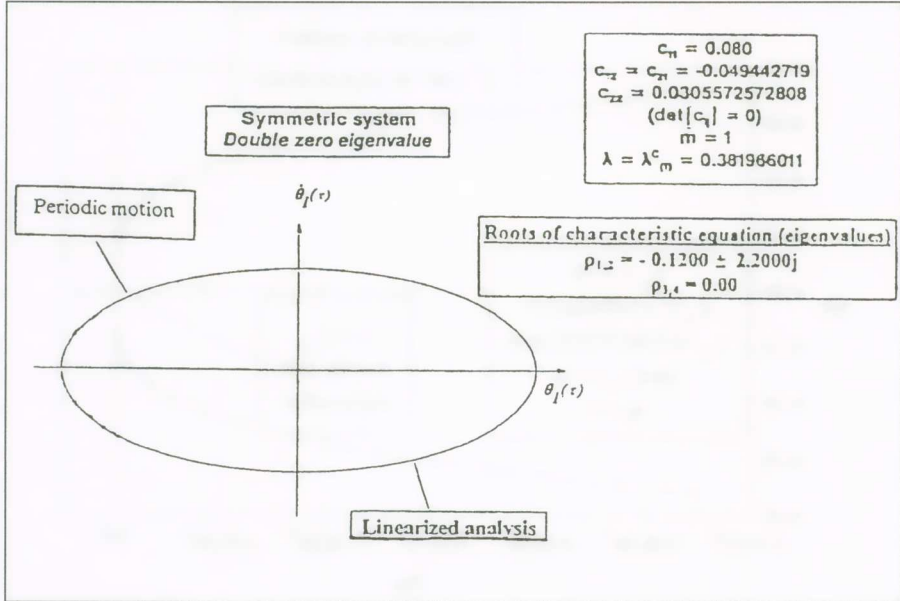


Fig. 9

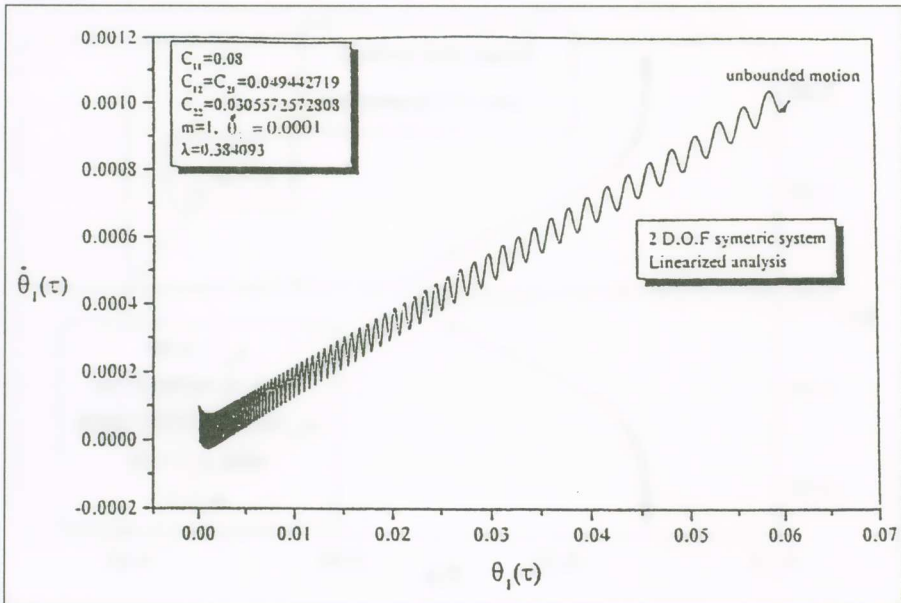


Fig. 10a

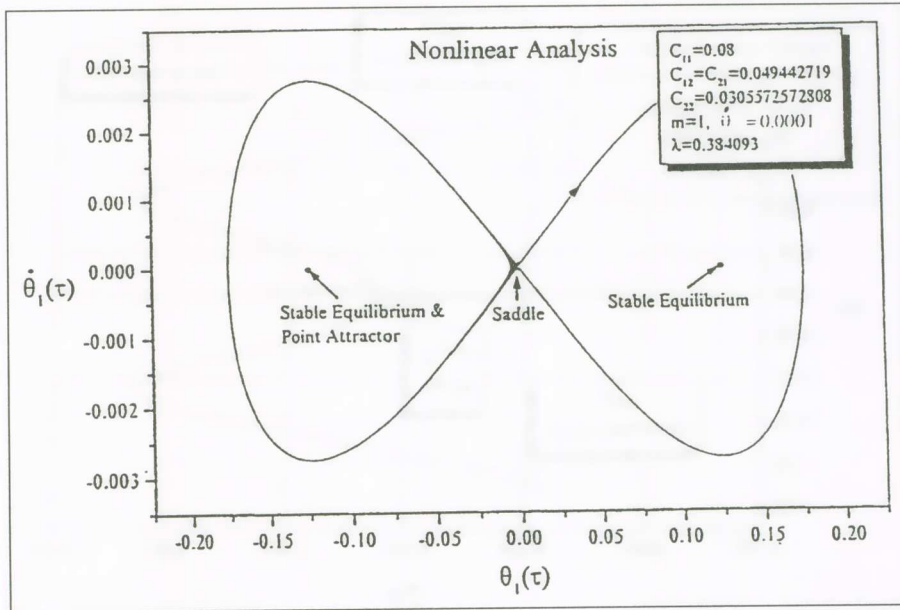


Fig. 10b

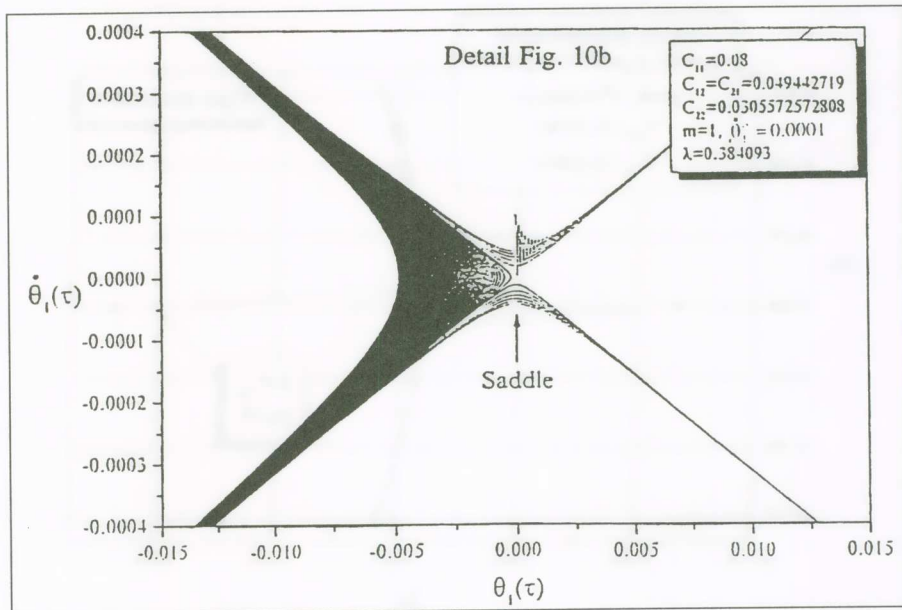


Fig. 10c

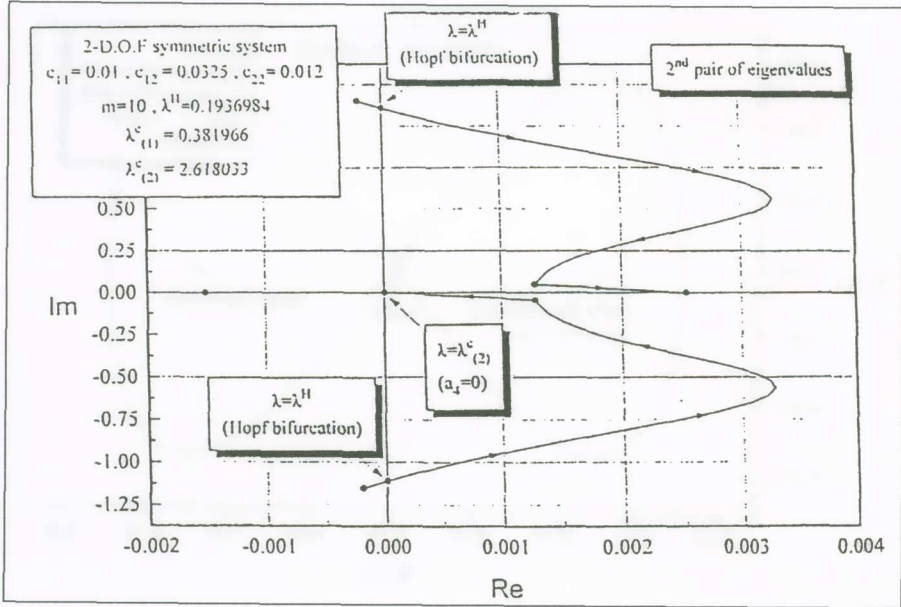


Fig. 11

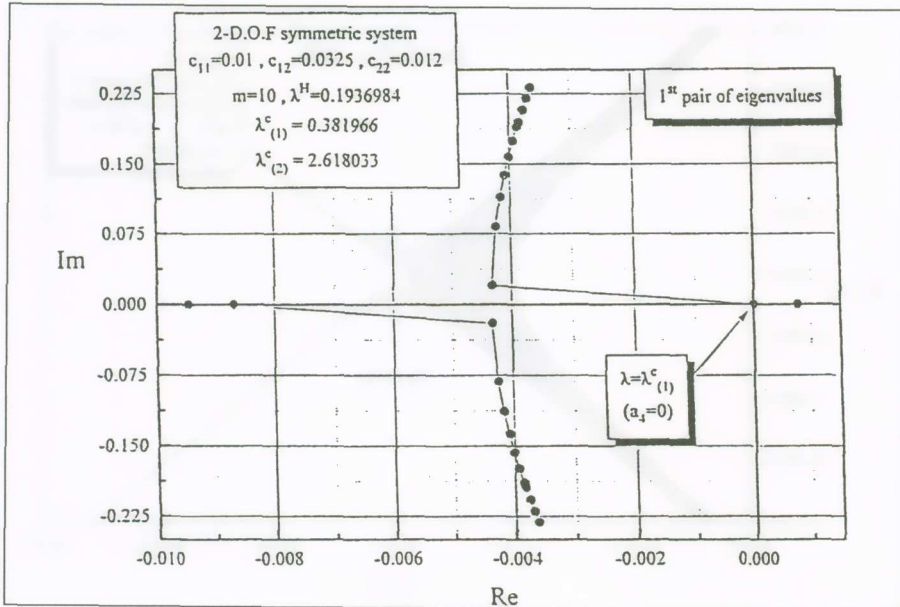


Fig. 12

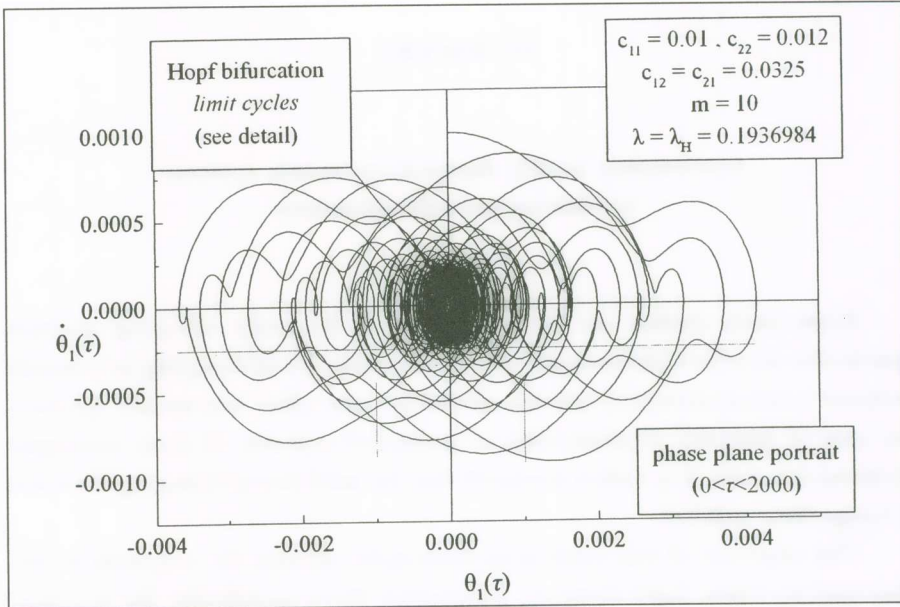


Fig. 13a

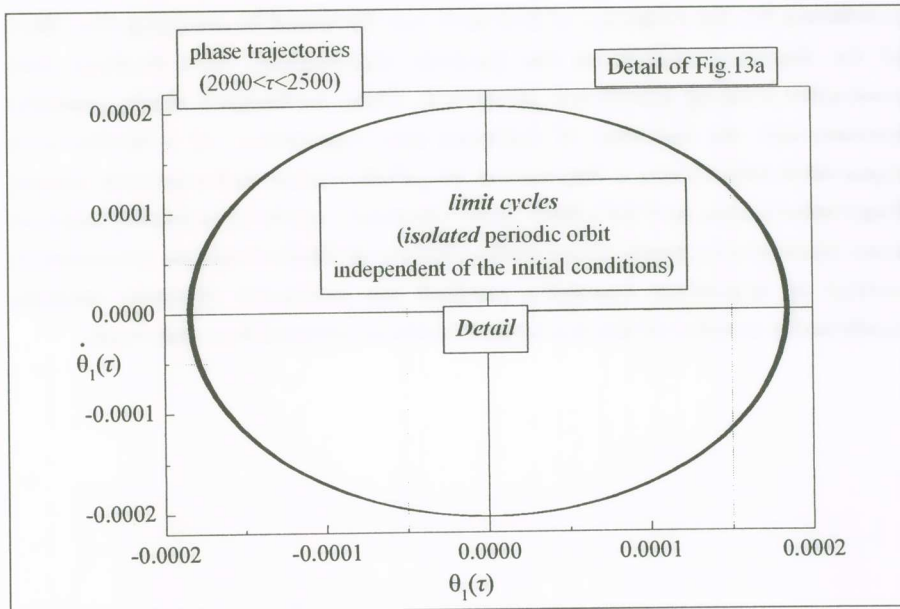


Fig. 13b

SUMMARY

**Autonomous weakly damped symmetric systems
exhibiting periodic attractors**

From early studies on elastic stability of flexurally vibrating systems particular attention has been given to the importance of damping in non-self adjoint (nonconservative) systems. However, this effect was usually ignored in case of *symmetric* (Hamiltonian or potential) systems. If these *undamped* systems are *stable*, it is widely accepted that the addition of damping does not change their stability.

The objective of this work is to thoroughly discuss the response of the last systems when slight damping is included. More specifically, the dynamic local stability of autonomous symmetric, weakly damped, lumped-mass (discrete) systems is reconsidered. For such potential (conservative) systems conditions for the existence of *limit cycles* are discussed by studying the effect of the damping matrix on the Jacobian eigenvalues. New findings that contradict existing results are presented. Thus, undamped stable *symmetric* systems with the inclusion of damping may experience: (a) a double zero eigenvalue bifurcation, a degenerate Hopf bifurcation and a generic (usual) Hopf bifurcation, and (b) a limit cycle (dynamic) mode of instability prior to static (divergence) mode of instability (failure of Ziegler's kinetic criterion). A variety of numerical examples verified via nonlinear dynamic analysis confirm the validity of the theoretical findings presented in this work.