ΦΥΣΙΚΗ.—Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der Diracschen Theorie des Elektrons*, *von A. Papapetrou*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. In der speziellen Relativitätstheorie hängen Drehimpuls- und Schwerpunktsatz eng miteinander zusammen, indem sie sich in *einem* tensoriellen Erhaltungssatz zusammenfassen lassen[1]:

$$J^{\mu\nu} = \text{const.} \tag{1}$$

Der räumliche Teil dieser Gleichung stellt den Drehimpulssatz dar, während der raumzeitliche Teil den Schwerpunktsatz zum Ausdruck bringt.

In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Betrachtungen für die Diracsche Theorie des Elektrons aufgestellt. Es wird sich dabei zeigen, dass man auch hier zu einer Gleichung der Form (1) gelangt, welche den Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in sich enthält. Ferner wird diesmal mit dem raumzeitlichen Teil von (1) noch der Satz über die Zitterbewegung des Wahrscheinlichkeitsmittelpunktes zusammenhängen.

2. Wir verwenden die reellen Koordinaten

$$x^\lambda = (x, y, z, ct), \tag{2}$$

mit dem in der speziellen Relativitätstheorie üblichen Fundamentaltensor

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = -1 \qquad (g_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k). \tag{3}$$

Dann lauten die kovarianten Komponenten des Energie-Impulsoperators in der Diracschen Theorie des Elektrons[2]:

$$p_\lambda = \left(-\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{c\partial t}\right), \qquad \mathbf{h} = \frac{h}{2\pi}; \tag{4}$$

und die kontravarianten wegen (3):

$$p^\lambda = \left(-\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{c\partial t}\right). \tag{4a}$$

Bekanntlich stellen in dieser Theorie die mit den drei ersten Diracschen Matrizen α_1, α_2, α_3 und der Einheitsmatrix gebildeten Grössen

$$-c\,\psi^*\alpha_1\psi, \quad -c\,\psi^*\alpha_2\psi, \quad -c\,\psi^*\alpha_3\psi, \quad +c\,\psi^*\psi$$

---

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ.—Κινητικὴ ῥοπὴ καὶ κέντρον βάρους εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ μαγνητικοῦ ἠλεκτρονίου (Dirac).

[1] Vgl. A. PAPAPETROU, *Praktika de l'Académie d'Athènes*, **14**, 1939, S. 540; im folgenden als A zitiert.

[2] Vgl. L. de BROGLIE, L'électron magnétique, Paris, Hermann & Cie, 1934.

einen kontravarianten Vektor, den Strom-Dichtevektor dar[1]. Dieser Tatsache entsprechend wollen wir den symbolischen Vierervektor

$$\alpha^{\lambda} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -1) \tag{5}$$

einführen, wodurch der Strom-Dichtevektor die einfache Form

$$S^{\lambda} = -c\,\psi^* \alpha^{\lambda} \psi \tag{6}$$

annimmt. Die vierte Diracsche Matrix wollen wir mit α_0 bezeichnen, und schreiben daher die Diracgleichung für den uns interessierenden kräftefreien Fall in der Form[2]:

$$(\alpha^{\lambda} p_{\lambda} + \alpha_0 m_0 c)\psi = 0. \tag{7}$$

3. Als «Materietensor» führen wir den Ausdruck

$$T^{\lambda\mu} = -c\,\psi^* \alpha^{\lambda} p^{\mu} \psi \tag{8}$$

ein, welcher weiter unten durch korrespondenzmässige Betrachtungen in § 10 gerechtfertigt wird. Man bestätigt leicht, dass es sich tatsächlich um die kontravarianten Komponenten eines Tensors 2. Stufe handelt. Ferner kann man durch Anwendung von (7) ohne Mühe zeigen, dass der so definierte Tensor den Gleichungen

$$\frac{\partial T^{\lambda\mu}}{\partial x^{\lambda}} = 0 \tag{9}$$

genügt[3]. Integriert man nun Gln. (9) auf einer Hyperebene $x^4 = ct = \text{const}$, so folgt daraus der Energie-Impulssatz: Die Erwartungswerte von Energie und Impuls sind von der Zeit unabhängig und bilden einen Vierervektor:

$$\frac{1}{c}\int T^{4\mu}\, dv = G^{\mu} = \text{const}; \qquad (G^1, G^2, G^3) = \vec{G}, \quad G^4 = \frac{E}{c}. \tag{10}$$

$T^{4\mu}$ ist im allgemeinen komplex; bei der Integration in (10) fällt aber der imaginäre Teil weg, so dass die Werte G^{μ} reell sind.

4. Im Gegensatz zur speziellen Relativitätstheorie ist der durch (8) definierte Tensor $T^{\lambda\mu}$ *nicht symmetrisch.* Daher lässt sich der Momentensatz (1) im vorliegenden Fall nicht durch einfache Wiederholung der in A gegebenen Beweisführung gewinnen. Man überlegt sich aber leicht, dass dieses Verhalten mit der Existenz des inneren Drehimpulses (Spin) des

[1] $\psi^*\alpha\psi$ wird als Abkürzung für $\Sigma_k \psi_k^* \alpha \psi_k$ verwendet.

[2] Summation über zweimal, oben und unten auftretende Tensorindizes.

[3] Vgl. H. TETRODE, *ZS. f. Phys.*, **49**, 1928, S. 858.

Elektrons zusammenhängt. Beim Pol-Dipol-Modell des Elektrons[1] ist nämlich der Drehimpuls nicht durch die dem Ausdruck (5) von A entsprechende einfache Formel

$$\vec{J} = [\vec{r}\ \vec{G}]$$

gegeben, sondern tritt daneben noch ein den Spin darstellender Zusatzterm ein:

$$\vec{J} = [\vec{r}\ \vec{G}] + c[\vec{\tau}\ \vec{u}].$$

Auch beim Spinelektron hat man also neben dem Ausdruck A, (5) für $F^{\lambda\mu\nu}$ noch einen Zusatzterm zu erwarten. Dieser Zusatzterm lässt sich durch korrespondenzmässige Übertragung der für das Pol-Dipol-Modell geltenden Formel bestimmen, wie wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit zeigen werden. Hier wollen wir uns mit der Angabe der endgültigen Formel für $F^{\lambda\mu\nu}$ begnügen:

$$F^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\mu} r^{\nu} - T^{\lambda\nu} r^{\mu} - \frac{hc}{4}\, \psi^{*} i\, \alpha^{\lambda} (\alpha_0 \alpha^{\mu} \alpha_0 \alpha^{\nu} - \alpha_0 \alpha^{\nu} \alpha_0 \alpha^{\mu}) \psi. \tag{11}$$

Dabei bedeutet r^{λ} den Radiusvektor vom gewählten Bezugspunkt ξ^{λ} bis zu der Stelle x^{λ}:

$$r^{\lambda} = x^{\lambda} - \xi^{\lambda}. \tag{12}$$

5. Der tensorielle Charakter ist bei den zwei ersten Termen von (11) unmittelbar ersichtlich. Dagegen ist beim letzten Term eine Nachprüfung notwendig. Wir bezeichnen diesen Term mit $f^{\lambda\mu\nu}$ und betrachten zunächst seinen reellen Teil $\underset{\mathrm{I}}{f}^{\lambda\mu\nu}$, welcher offenbar alle, und nur diejenigen Komponenten umfasst, die zu drei voneinander verschiedenen Indizes λ, μ, ν gehören:

$$\underset{\mathrm{I}}{f}^{\lambda\mu\nu} = f^{\lambda\mu\nu} \quad \text{für } \delta_{\lambda\mu} = \delta_{\mu\nu} = \delta_{\nu\lambda} = 0. \tag{13}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$(\mu) = g_{\mu\mu} = +1 \text{ für } \mu \neq 4, \qquad -1 \text{ für } \mu = 4 \tag{14}$$

ein, so gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{\lambda}\alpha^{\mu} = -(\lambda)(\mu)\,\alpha^{\mu}\alpha^{\lambda}, \text{ wenn } \lambda \neq \mu, \qquad \alpha^{\lambda}\alpha^{\mu} = \alpha^{\mu}\alpha^{\lambda}, \text{ wenn } \lambda = \mu; \\ \alpha_0 \alpha^{\mu} \alpha_0 = -(\mu)\,\alpha^{\mu}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

[1] Vgl. H. Hönl und A. Papapetrou, *ZS. f. Phys.*, **112**, 1939, S. 512; im folgenden als B zitiert. Insbesondere Formel (89).

wie man auf Grund der Vertauschungsrelationen

$$\alpha_\lambda \alpha_\mu + \alpha_\mu \alpha_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu}; \qquad \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{16}$$

unmittelbar verifiziert. Daher:

$$\alpha_0 \alpha^\mu \alpha_0 \alpha^\nu = -(\mu)\alpha^\mu \alpha^\nu, \; \alpha_0 \alpha^\nu \alpha_0 \alpha^\mu = -(\nu)\alpha^\nu \alpha^\mu = +(\mu)\alpha^\mu \alpha^\nu, \text{ wenn } \mu \neq \nu. \tag{17}$$

Dadurch vereinfacht sich (13) zu

$$\underset{\mathrm{I}}{f}^{\lambda\mu\nu} = \frac{hc}{2}(\mu)\psi^* i \alpha^\lambda \alpha^\mu \alpha^\nu \psi. \tag{18}$$

Man bestätigt nun unmittelbar, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (18) in bezug auf jedes Indizespaar schiefsymmetrisch ist. Andererseits sind die vier Grössen $f^{234}, f^{314}, f^{124}, f^{123}$ bis auf einen konstanten Faktor mit den Komponenten des Spinvektors σ^λ identisch:

$$\left.\begin{aligned} f^{234} = -\frac{hc}{2}\psi^* i \alpha_2 \alpha_3 \psi = -c\sigma^1, \; f^{314} = -c\sigma^2, \; f^{124} = -c\sigma^3, \\ f^{123} = \frac{hc}{2}\psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi = -c\sigma^4, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

welche bekanntlich einen kontravarianten Vierervektor bilden[1]. Daher stellt $\underset{\mathrm{I}}{f}^{\lambda\mu\nu}$ einen vollständig antisymmetrischen Tensor 3. Stufe dar[2].

Der imaginäre Teil $\underset{\mathrm{II}}{f}^{\lambda\mu\nu}$ umfasst diejenigen Komponenten $f^{\lambda\mu\nu}$, bei welchen mindestens zwei Indizes gleich sind. Dabei verschwinden aber alle Komponenten mit $\mu = \nu$, so dass wir diesen Teil so schreiben dürfen:

$$\underset{\mathrm{II}}{f}^{\lambda\mu\nu} = f^{\lambda\mu\nu} \qquad \text{für } \delta_{\lambda\mu} \textit{ oder } \delta_{\lambda\nu} \neq 0. \tag{20}$$

Man bestätigt nun leicht, dass sich dieser Teil auch in der Form

$$\underset{\mathrm{II}}{f}^{\lambda\mu\nu} = -i\frac{h}{2}(g^{\lambda\mu}S^\nu - g^{\lambda\nu}S^\mu) \tag{21}$$

schreiben lässt, wobei S^μ die Bedeutung (6) hat. Gl. (21) zeigt, dass auch $\underset{\mathrm{II}}{f}^{\lambda\mu\nu}$ ein Tensor 3. Stufe ist. Dadurch ist der Beweis für den tensoriellen Charakter des gesamten $f^{\lambda\mu\nu}$ erledigt.

6. Wir haben nun den Beweis dafür zu erbringen, dass der durch (11) definierte Tensor $F^{\lambda\mu\nu}$ den Gleichungen A, (6) genügt. Dabei dürfen wir nur den Fall $\mu \neq \nu$ betrachten, da für $\mu = \nu$ alle Komponenten $F^{\lambda\mu\nu}$ ver-

[1] Vgl. L. DE BROGLIE, l. c., Kap. XVI.

[2] Vgl. M. v. LAUE, Die Relativitätstheorie, Vieweg 1921; 2, § 6.

schwinden, und Gln. A, (6) identisch erfüllt sind. Für $\mu \neq \nu$ nimmt aber (11) wegen (17) folgende Form an:

$$F^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\mu} r^{\nu} - T^{\lambda\nu} r^{\mu} + \frac{\mathbf{h}c}{2}(\mu)\,\psi^* i\,\alpha^{\lambda}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\psi. \tag{22}$$

Daraus folgt nun, wenn man (9) und (12) berücksichtigt:

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{h}c}{2}(\mu)\left[\psi^* i\,\alpha^{\lambda}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda}}\, i\,\alpha^{\lambda}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\psi\right]. \tag{23}$$

Wir berechnen zunächst die eckige Klammer auf der rechten Seite von (23). Durchläuft λ' die von μ und ν verschiedenen Werte λ, dagegen λ'' die Werte μ und ν, so wird diese Klammer:

$$[\ldots] = \psi^* i\left(\alpha^{\lambda'}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda'}} + \alpha^{\lambda''}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda''}}\right) + \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda'}}\, i\,\alpha^{\lambda'} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda''}}\, i\,\alpha^{\lambda''}\right)\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\psi.$$

Es folgt nun aus (15):

$$\alpha^{\lambda'}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = (\mu)(\nu)\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda'},\quad \alpha^{\lambda''}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = -(\mu)(\nu)\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda''}.$$

Und daher:

$$\left.\begin{aligned}[\ldots] = (\mu)(\nu)\Bigg[\psi^* i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\left(\alpha^{\lambda'}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda'}} - \alpha^{\lambda''}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda''}}\right) + \\ + \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda'}}\, i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda'} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda''}}\, i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda''}\right)\psi\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Wir schreiben nun die Diracgleichung (7) in der Form:

$$i\mathbf{h}\left(\alpha^{\lambda'}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda'}} + \alpha^{\lambda''}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda''}}\right) + \alpha_0 m_0 c\,\psi = 0,$$

und multiplizieren links mit $\psi^*\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}$:

$$\mathbf{h}\,\psi^* i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\left(\alpha^{\lambda'}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda'}} + \alpha^{\lambda''}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda''}}\right) + m_0 c\,\psi^*\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha_0\psi = 0. \tag{β}$$

Dann bilden wir die zu (β) konjugierte Gleichung[1]:

$$\mathbf{h}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda'}}\, i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda'} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\lambda''}}\, i\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda''}\right)\psi - m_0 c\,\psi^*\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha_0\psi = 0. \tag{γ}$$

Addieren wir (β) und (γ) und vergleichen mit (α), so folgt für die zu berech-

[1] Durch Verwendung der Beziehung $[f^*\alpha\,\varphi]^* = \varphi^*\alpha f$, welche für jede hermitische Matrix α gilt. In (β) sind hermitisch die Matrizen $i\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda'}$, $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\lambda''}$, $i\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha_0$.

nende Klammer der einfache Ausdruck:

$$[\ldots] = -2\,(\mu)\,(\nu)\,\psi^* i\,\alpha^\mu \alpha^\nu \alpha^{\lambda''} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\lambda''}}.$$

Damit wird (23), wenn wir die Summation über $\lambda'' = \mu$, ν explizite hinschreiben, und dabei noch (15) berücksichtigen:

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} - (\mu)\frac{\mathbf{h}\,c}{i}\,\psi^* \alpha^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + (\nu)\frac{\mathbf{h}\,c}{i}\,\psi^* \alpha^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu}. \qquad \text{a)}$$

Ferner gilt aber nach (8), unter Beachtung von (4) und (14):

$$T^{\nu\mu} = (\mu)\frac{\mathbf{h}\,c}{i}\,\psi^* \alpha^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \qquad T^{\mu\nu} = (\nu)\frac{\mathbf{h}\,c}{i}\,\psi^* \alpha^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu}.$$

Daher liefert (23 a) den zu beweisenden Satz:

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0. \qquad (24)$$

Integriert man (24) auf einer Hyperebene $x^4 = ct = \text{const}$, so folgt daraus, dass die Volumintegrale von $F^{4\mu\nu}$ von der Zeit unabhängig sind, und einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe bilden. Also formelmässig:

$$\frac{1}{c}\int F^{4\mu\nu}\,dv = J^{\mu\nu} = \text{const}. \qquad (25)$$

Wir wenden uns sogleich der Diskussion über die physikalische Bedeutung dieser letzten Gleichung zu.

7. Wir betrachten zunächst eine räumliche Komponente von $J^{\mu\nu}$, z. B. J^{12}. Es ist nach (11):

$$J^{12} = \frac{1}{c}\int\left[T^{41} r^2 - T^{42} r^1 - \frac{\mathbf{h}\,c}{4}\,\psi^* i\,\alpha^4 (\alpha_0 \alpha^1 \alpha_0 \alpha^2 - \alpha_0 \alpha^2 \alpha_0 \alpha^1)\psi\right] dv.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich bei Berücksichtigung von (8), (5) und (16) zu

$$J^{12} = -\int \psi^* \left(r^1 p^2 - r^2 p^1 + \frac{\mathbf{h}\,i}{2}\,\alpha_1 \alpha_2\right)\psi\,dv. \qquad (26)$$

J^{12} ist also bis auf ein Minuszeichen mit der z-Komponente des Drehimpulses identisch. Folglich *bringt der räumliche Teil von* (25) *den Drehimpulssatz zum Ausdruck:*

$$(-J^{23}, -J^{31}, -J^{12}) = \vec{J} = \text{const}. \qquad (27)$$

Es ist zu bemerken, dass die Integrale (26) reell ausfallen, obwohl der Integrand im allgemeinen komplex ist.

Sei nun eine raumzeitliche Komponente $J^{\mu\nu}$ betrachtet, z. B. J^{14}:

$$J^{14}=\frac{1}{c}\int\left[T^{41}r^4-T^{44}r^1-\frac{hc}{4}\psi^* i\alpha^4(\alpha_0\alpha^1\alpha_0\alpha^4-\alpha_0\alpha^4\alpha_0\alpha^1)\psi\right]dv. \quad (28a)$$

Diese Formel lässt sich ähnlich wie J^{12} vereinfachen und ergibt:

$$J^{14}=-\int\psi^*\left(r^1p^4-r^4p^1-\frac{hi}{2}\alpha_1\right)\psi dv. \quad (28)$$

Wir zerlegen nun die rechte Seite von (28a) bzw. (28) in ihren reellen und imaginären Teil. Zunächst T^{44}:

$$T^{44}=\frac{hc}{4}\psi^*\frac{\partial\psi}{c\partial t}=\frac{hc}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{c\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\psi\right)+\frac{hc}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{c\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\psi\right).$$

Der erste Term stellt die «Energiedichte» dar, die wir mit μc^2 bezeichnen wollen; während der zweite mit der Ableitung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho=\psi^*\psi$ nach der Zeit zusammenhängt:

$$T^{44}=\mu c^2+\frac{hc}{2i}\frac{\partial\varrho}{c\partial t}.$$

Dagegen hat man T^{41} einfach mit der mit c multiplizierten x-Komponente der «Impulsdichte» zu identifizieren:

$$T^{41}=cg^1,$$

da bei der Integration der imaginäre Teil verschwindet (r^4 ist dabei als Konstante zu behandeln). Es ergibt sich also aus (28):

$$J^{14}=\int(r^4g^1-r^1\mu c)\,dv+i\frac{h}{2}\int\left(r^1\frac{\partial\varrho}{c\partial t}+\psi^*\alpha_1\psi\right)dv.$$

Berücksichtigen wir noch, dass

$$\int g^1 dv=G^1,\quad \int\mu c\,dv=\frac{E}{c},\quad \int\varrho\,dv=1,$$

und führen dann den Schwerpunkt, oder besser den Energiemittelpunkt s^λ und den Wahrscheinlichkeitsmittelpunkt w^λ ein:

$$s^\lambda=\frac{c^2}{E}\int\mu x^\lambda dv,\qquad w^\lambda=\int\varrho x^\lambda dv, \quad (29)$$

so folgt schliesslich:

$$J^{14}=\left[G^1(s^4-\xi^4)-(s^1-\xi^1)G^4\right]+i\frac{h}{2}\left[\frac{dw^1}{c\partial t}+\int\psi^*\alpha_1\psi dv\right]. \quad (30)$$

Nun gilt aber nach dem Satz über die Zitterbewegung des Wahrscheinlichkeitsmittelpunktes[1]:

$$\frac{dw^\lambda}{dt} = -c\int \psi^* \alpha_\lambda \psi dv, \qquad \lambda = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Daher verschwindet der imaginäre Teil von (30). Fordert man dagegen die Realität von $J^{\mu\nu}$ von vornherein, *so bringt der raumzeitliche Teil von* (25) *zunächst die Zitterbewegung zum Ausdruck.* Ferner ergibt der reelle Teil von (30), in (25) eingesetzt, eine lineare Beziehung zwischen $s^4 = ct$ und s^1: *Der Energiemittelpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig.* Der raumzeitliche Teil von (25) *bringt also auch den Schwerpunktsatz,* in seiner klassischen Formulierung, *zum Ausdruck.*

Es dürfte noch bemerkt werden, dass in die Definition (29) des Energiemittelpunktes die raumzeitliche «Energieverteilung» μc^2 eintritt, welche in der Quantenmechanik keine unmittelbare physikalische Bedeutung besitzt. Physikalisch bedeutet also Gl. (25) nur so viel, dass der übliche dreidimensionale Drehimpulssatz

$$r^\mu p^\nu - r^\nu p^\mu + i\,\frac{h}{2}\,\alpha^\mu \alpha^\nu = \text{const}; \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3; \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \tag{32}$$

zu dem vierdimensionalen *Momentensatz*

$$r^\mu p^\nu - r^\nu p^\mu + i\,\frac{h}{2}\,\alpha^\mu \alpha^\nu = \text{const}; \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \tag{33}$$

erweitert werden soll. Dabei bilden die Erwartungswerte dieser Grössen einen antisymmetrischen Tensor.

8. Die folgenden Ergebnisse lassen sich aus (25) genau wie in der speziellen Relativitätstheorie ableiten und dürfen deshalb ohne ausführliche Beweisführung erwähnt werden. Der Energiemittelpunkt bewegt sich auf einer dem Vierervektor G^μ parallelen Gerade, die wir als *Schwerpunktslinie* bezeichnen. Die charakteristische Eigenschaft dieser Gerade ist, dass in bezug auf einen beliebigen Punkt von ihr *die raumzeitlichen Komponenten* $J^{\mu\nu}$ *verschwinden.* Diese Eigenschaft liefert eine *vom Energiemittelpunkt unabhängige Definition* der Schwerpunktslinie, welche deshalb sowohl für die Quantenmechanik, als auch für die spezielle Relativitätstheorie von besonderem Interesse ist. Den Drehimpuls in bezug auf einen beliebigen Punkt der Schwerpunktslinie wollen wir den *inneren Drehimpuls* nennen.

[1] Vgl. L. de Broglie, l. c., Kap. XXI.

Die Schwerpunktslinie ist mit keiner im vierdimensionalen Raum wohldefinierten Weltlinie identisch, sondern hängt vom Koordinatensystem ab. Sind nämlich für einen gegebenen Bezugspunkt bei einem Koordinatensystem die raumzeitlichen Komponenten $J^{\mu 4}$ gleich Null, so werden sie nach einer Lorentztransformation im allgemeinen nicht mehr verschwinden: Beim ersten Koordinatensystem geht die Schwerpunktslinie durch diesen Punkt, beim zweiten dagegen nicht. Wie sich die Schwerpunktslinie bei Koordinatentransformationen bewegt, kann man sehr deutlich dadurch verfolgen, dass man von demjenigen Koordinatensystem (x_0) ausgeht, in welchem der Impuls verschwindet:

$$G^1_0 = G^2_0 = G^3_0 = 0, \qquad G^4_0 = \frac{E_0}{c}.$$

Ist ferner $\vec{J}_0$ der innere Drehimpuls in (x_0), so ergibt sich für die Verschiebung der Schwerpunktslinie beim Übergang zu einem gegen (x_0) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Koordinatensystem (x) der Wert:

$$\delta \vec{s} = \frac{1}{E_0} [\vec{v} \vec{J}_0]. \tag{34}$$

Interessant ist noch das Verhalten des inneren Drehimpulses beim Übergang von (x_0) zu (x). Zerlegt man nämlich in Komponenten senkrecht und parallel zu $\vec{v}$, so gilt der einfache Satz:

$$J_{\parallel} = J_{0\parallel}, \qquad J_{\perp} = J_{0\perp} \sqrt{1-\beta^2} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right). \tag{35}$$

9. Es sei noch in Kürze eine zweite Ableitung des Momentensatzes (25) angedeutet. Der Tensor $T^{\lambda\mu}$ ist in der Diracschen Theorie nicht eindeutig bestimmt: Man kann statt (8) noch andere Ausdrücke, insbesondere auch eine symmetrische Form dafür wählen[1]. Diese lautet:

$$T'^{\lambda\mu} = \frac{1}{4} [(T^{\lambda\mu} + T^{\mu\lambda}) + (T^{\lambda\mu} + T^{\mu\lambda})^*]. \tag{36}$$

Es gelten nämlich wieder die Beziehungen:

$$\frac{\partial T'^{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda} = 0, \qquad \frac{1}{c} \int T'^{4\mu} \, dv = G^\mu, \tag{37}$$

wobei die G^μ dieselben Werte wie in (10) haben.

[1] Vgl. H. TETRODE, l. c.

Die Symmetrie von $T'^{\lambda\mu}$ gestattet nun, dass wir die in A gegebene Beweisführung hier ohne jede Änderung übernehmen. Wir führen also den Tensor

$$F'^{\lambda\mu\nu} = T'^{\lambda\mu} r^{\nu} - T'^{\lambda\nu} r^{\mu} \tag{38}$$

ein, und finden dann genau wie in A:

$$\frac{\partial F'^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0, \qquad J^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int F'^{4\mu\nu} dv = \text{const.} \tag{39}$$

Wir haben in der letzten Gleichung die Bezeichnung $J^{\mu\nu}$ wie in (25) eingeführt, weil diese Integralkonstanten mit den aus $F^{\lambda\mu\nu}$ folgenden Werten (25) identisch sind, wie man durch eine einfache Rechnung auf Grund von (7) bestätigen kann.

Geht man also von dem symmetrischen Tensor (36) aus, so hat der zu dem Momentensatz führende Tensor $F'^{\lambda\mu\nu}$ die einfache Form (38): Der Spin ist in dieser Formel mit enthalten, ohne dass ein zusätzlicher Term nach dem Beispiel von (11) nötig sei. Dabei gelangt man natürlich durch die beiden Methoden zu denselben Werten für die Integralkonstanten G^{μ} und $J^{\mu\nu}$. Es sei aber bemerkt, dass bei der zweiten Methode die Zuordnung von Energie und Impuls zu den Energie-Impulsoperatoren (4a) nicht mehr direkt ersichtlich ist; ferner ist durch den *reellen* Ansatz (38) auch der Zusammenhang der Zitterbewegung mit dem Momentensatz (25) unterdrückt.

10. Wir werden noch einige korrespondenzmässige Betrachtungen hinzufügen, wodurch insbesondere die Aufstellung der Formel (11) erläutert wird. Wir gehen dabei von der Energiefunktion des Pol-Dipol-Modells aus[1]:

$$E = v_x G_x + v_y G_y + v_z G_z + \frac{u_0}{u_4} m_0 c^2, \tag{40}$$

die wir mit der Hamiltonfunktion der Diracschen Theorie

$$H = -c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_0 m_0 c) \tag{41}$$

vergleichen. Dieser Vergleich führt zu der Zuordnung:

$$\frac{v_x}{c} \rightarrow -\alpha_1, \quad \frac{v_y}{c} \rightarrow -\alpha_2, \quad \frac{v_z}{c} \rightarrow -\alpha_3, \quad \frac{u_0}{u_4} \rightarrow -\alpha_0. \tag{42}$$

Dabei stellt u^{λ} die vierdimensionale Geschwindigkeit des Teilchens dar:

$$u^{\lambda} = \frac{dx^{\lambda}}{ds};$$

---

[1] Vgl. B, Formel (70).

s ist die Eigenzeit. Daher bedeutet die letzte der Gln. (42):

$$u_4 = \frac{d(ct)}{ds} \rightarrow -u_o \alpha_o. \tag{43}$$

Nun gilt für irgendeine Grösse f(s):

$$\dot{f} = \frac{df}{ds} = \frac{df}{cdt} \cdot \frac{d(ct)}{ds} = u_4 \frac{df}{cdt}. \tag{44}$$

Wenden wir diese Beziehung für $f = x, y, z$ an, so ergibt sich[1]:

$$u_x = \frac{dx}{ds} = u_4 \frac{dx}{cdt} = u_4 \frac{v_x}{c} \rightarrow u_o \alpha_o \alpha_1,\ u_y \rightarrow u_o \alpha_o \alpha_2,\ u_z \rightarrow u_o \alpha_o \alpha_3. \tag{45}$$

Also, wenn wir (43) und (45) zusammenfassen:

$$u^\lambda \rightarrow u_o \alpha_o \alpha^\lambda. \tag{46}$$

Der Faktor u_o tritt in diese Formeln ein, ohne dass er sich näher bestimmen lässt; er wird aus allen folgenden Ergebnissen herausfallen.

Wir werden in der Fortsetzung noch den Vektor des Dipolmomentes benötigen, den wir, um eine Verwechselung mit dem Energie-Impulsoperator zu vermeiden, mit π^λ bezeichnen wollen. Wie wir am folgenden Beispiel bestätigen, gilt für ihn die Zuordnung:

$$\pi^\lambda \rightarrow -\frac{i h}{2 c u_o} \cdot \alpha_o \alpha^\lambda. \tag{47}$$

Der Energie-Impulsvektor des Pol-Dipol-Modells ist durch folgende Formel gegeben[2]:

$$G^\mu = \frac{m_o}{u_o} c u^\mu + c \dot{\pi}^\mu. \tag{48}$$

Diese Formel gilt bei den Zuordnungen (46) und (47) auch in der Diracschen Theorie ohne jede Änderung. Berechnen wir nämlich $\dot{\pi}^1$ in der Diracschen Theorie, so ergibt sich zunächst aus (44) und (43):

$$\dot{\pi}^1 \rightarrow -u_o \alpha_o \frac{d\pi^1}{cdt} = \frac{i h}{2c} \alpha_o \frac{d(\alpha_o \alpha_1)}{cdt}.$$

Ferner gilt:

$$\frac{d(\alpha_o \alpha_1)}{cdt} = \frac{i}{h} \left(\alpha_o \alpha_1 \frac{H}{c} - \frac{H}{c} \alpha_o \alpha_1 \right) = \frac{2i}{h} (-p^1 \alpha_o + \alpha^1 m_o c).$$

---

[1] Wir müssen $u_x \rightarrow u_o \alpha_o \alpha_1$ und nicht $u_o \alpha_1 \alpha_o$ setzen, um zu der Formel (11) zu gelangen.

[2] Vgl. B, Gleichungen (46), (49) und (50).

Daher:

$$c\dot{\pi}^1 \to p^1 - m_0 c \alpha_0 \alpha^1,$$

wodurch dann aus (48) die zu fordernde Zuordnung

$$G^1 \to \frac{m_0}{u_0} c u_0 \alpha_0 \alpha^1 + p^1 - m_0 c \alpha_0 \alpha^1 = p^1 \tag{49a}$$

richtig herauskommt. Ähnlich wird:

$$c\dot{\pi}^4 \to -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3), \qquad G^4 \to -\frac{H}{c} = p^4. \tag{49b}$$

Gln. (48) führen, also zusammen mit (46) und (47), zu der richtigen Zuordnung

$$G^\mu \to p^\mu. \tag{49}$$

Es ist noch zu beachten, dass dem Tensor $T^{\lambda\mu}$, Gl. (8), folgender Operator entspricht:

$$T^{\lambda\mu} \to -c\alpha^\lambda p^\mu. \tag{50}$$

Daher die Regel: Multipliziert man den Operator der Integralkonstanten G^μ mit $-c\alpha^\lambda$, so ergibt sich daraus der Operator des zu diesen Integralkonstaten führenden Tensors $T^{\lambda\mu}$.

11. Wir betrachten nun den Drehimpuls, für welchen beim Pol-Dipol-Modell folgende Formel gilt[1]:

$$\vec{J} = c[\vec{\pi}\vec{u}] + [\vec{r}\vec{G}]. \tag{51}$$

(Der Pfeil bedeutet dreidimensionale Vektoren.) Versuchen wir diese Formel auf die Diracsche Theorie zu übertragen, so wird dabei eine bemerkenswerte Änderung notwendig. Den Ausdruck für den Drehimpuls hat man nämlich in der Quantenmechanik so zu wählen, dass er eine Konstante der Bewegung ist. Betrachten wir zunächst den zweiten Term von (51), so hat man in der Diracschen Theorie $\vec{G}$ nach (49) durch $\vec{p}$ zu ersetzen. Man findet dann, weil $\vec{p}$ konstant ist:

$$\frac{d}{ds}[\vec{r}\vec{G}] \to \frac{d}{ds}[\vec{r}\vec{p}] = [\vec{u}\vec{p}]. \tag{52}$$

Für den ersten Term von (51) ergibt sich mit (46) und (47):

$$c[\vec{\pi}\vec{u}] \to \frac{ih}{2}[\vec{\alpha}\vec{\alpha}], \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \tag{53}$$

[1] Vgl. B, Formel (89).

Daraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$\frac{d}{ds}\left(c[\vec{\pi}\vec{u}]\right) \rightarrow \frac{ih}{2}\frac{d}{ds}[\vec{\alpha}\vec{\alpha}] = -2[\vec{u}\vec{p}]. \tag{54}$$

Während also der Ausdruck (51) beim Modell eine Konstante darstellt, wird dies in der Diracschen Theorie erst dann der Fall, wenn man den ersten Term mit $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\vec{J} \rightarrow \frac{1}{2}c[\vec{\pi}\vec{u}] + [\vec{r}\vec{p}]. \tag{55}$$

Wir schreiben dieses Ergebnis in Tensorform, unter Berücksichtigung von (46) und (47), und erhalten:

$$J^{\mu\nu} \rightarrow -r^{\mu}p^{\nu} + r^{\nu}p^{\mu} + \frac{ih}{4}(\alpha_0\alpha^{\mu}\alpha_0\alpha^{\nu} - \alpha_0\alpha^{\nu}\alpha_0\alpha^{\mu}). \tag{56}$$

Multiplizieren wir nun diesen Operator, dem Übergang von Gl. (49) zu (50) entsprechend, mit $-c\alpha^{\lambda}$ links[1], so ergibt sich der zu $F^{\lambda\mu\nu}$ entsprechende Operator:

$$F^{\lambda\mu\nu} \rightarrow c r^{\mu}\alpha^{\lambda}p^{\nu} - c r^{\nu}\alpha^{\lambda}p^{\mu} - \frac{ihc}{4}\alpha^{\lambda}(\alpha_0\alpha^{\mu}\alpha_0\alpha^{\nu} - \alpha_0\alpha^{\nu}\alpha_0\alpha^{\mu}), \tag{57}$$

was genau zu Gl. (11) führt.

Es ist bemerkenswert, wie der beim Drehimpuls des Modells fehlende Faktor $\frac{1}{2}$ durch die Einführung der Diracschen Matrizen richtiggestellt wird. Auch die andere Schwierigkeit des Modells, nämlich das verkehrte Vorzeichen des Drehimpulses[2], lässt sich formell beseitigen, wenn man Gl. (51) so schreibt:

$$\vec{J} = [\vec{r}\vec{G}] - c[\vec{u}\vec{\pi}]. \tag{51'}$$

Dagegen bleibt der erste Term von (55) bei einer Vertauschung der Faktoren unverändert, vgl. (46) und (47):

$$\vec{J} \rightarrow [\vec{r}\vec{p}] + \frac{1}{2}c[\vec{u}\vec{\pi}]. \tag{55'}$$

Diesmal soll man also den klassischen Spinausdruck beim Übergang zu den Diracschen Matrizen mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ multiplizieren. Daher ist das beim Modell auftretende Vorzeichen des Spinausdrucks *unwesentlich;* und dadurch ist auch diese zweite Schwierigkeit des Modells entkräftet.

[1] In (50) war die Reihenfolge der Faktoren belanglos.

[2] Vgl. B, Abschnitt 4, § 4.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐν συνεχείᾳ προηγουμένης ἐργασίας τοῦ γράφοντος[1] ἐρευνῶνται οἱ νόμοι τῆς διατηρήσεως τῆς κινητικῆς ροπῆς καὶ τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ μαγνητικοῦ ἠλεκτρονίου (Dirac). Προκύπτουν ἀποτελέσματα ἀνάλογα πρὸς τὰ εὑρεθέντα εἰς τὴν εἰδικὴν σχετικότητα:

Ὅταν δὲν ὑπάρχουν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις (*μεμονωμένον* σύστημα), ὑπάρχει εἷς ἀντισυμμετρικὸς *τανυστὴς ροπῶν* $J^{\mu\nu}$, ὁ ὁποῖος παραμένει σταθερὸς ἐν τῷ χρόνῳ. Αἱ τρεῖς χωρικαὶ συνιστῶσαι τοῦ τανυστοῦ αὐτοῦ ταυτίζονται μὲ τὰς συνιστώσας τῆς κινητικῆς ροπῆς, ἐνῷ αἱ μικταὶ συνιστῶσαι ὁδηγοῦν εἰς τὸν νόμον τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους. Τὸ κέντρον βάρους καὶ ἡ ἐσωτερικὴ κινητικὴ ροπὴ μεταβάλλονται μετὰ τοῦ συστήματος συντεταγμένων ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν εἰδικὴν σχετικότητα.

Τὰ εὑρεθέντα ἀποτελέσματα εὑρίσκονται εἰς στενὴν σχέσιν μὲ τὰ ἰσχύοντα διὰ τὸ πολοδιπολικὸν πρότυπον τοῦ μαγνητικοῦ ἠλεκτρονίου, προκύπτοντα ἐκ τῶν τελευταίων δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀντιστοιχίας.

ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑ. – **Φαινόμενα βορείου σέλαος ἐν Ἑλλάδι τῇ 24ῃ καὶ 29ῃ Μαρτίου 1940,*** *ὑπὸ* ***Στ. Πλακίδου, Ἀλ. Χρυσάνθη καὶ Μιχ. Ἀναστασιάδου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

Τὴν 24ην παρελθόντος Μαρτίου παρετηρήθησαν ἐν Ἑλλάδι φαινόμενα βορείου σέλαος (ὀπτικά, γεωμαγνητικὰ καὶ ἠλεκτρομαγνητικά), τὴν δὲ 29ην τοῦ αὐτοῦ μηνὸς παρετηρήθησαν ἐπίσης ἀντίστοιχα φαινόμενα, πλὴν τῶν ὀπτικῶν. Τὰς παρατηρήσεις ταύτας λαμβάνομεν τὴν τιμὴν νὰ ἀνακοινώσωμεν κατωτέρω:

Α΄ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(Ἀνακοίνωσις τοῦ καθηγητοῦ Σταύρου Πλακίδου).

Ἡ κατὰ τὴν ἑσπέραν τῆς 24ης Μαρτίου 1940 σημειωθεῖσα ἐμφάνισις βορείου σέλαος εἶναι ἡ δευτέρα ἐντὸς τῶν τελευταίων ἐτῶν, μετὰ τὴν παρατηρηθεῖσαν τὴν 25ην Ἰανουαρίου 1938[2].

Τὸ φαινόμενον τοῦτο, ὅπερ, ὡς γνωστόν, σπανίως εἶναι ὁρατὸν ἀπὸ τὰ ἡμέτερα πλάτη, παρετηρήθη καὶ κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν εὐρύτατα καθ' ἅπασαν τὴν Ἑλλάδα ἀπὸ τῆς Θράκης μέχρι τῆς Κρήτης. Εἰς τοῦτο συνέβαλον τόσον ἡ

---

[1] *Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν*, 14, 1939, σ. 540.

* ST. PLAKIDIS, AL. CHRYSANTHIS ET MICH. ANASTASIADIS. — **Phenomènes d'aurore boréale en Grèce le 24 et le 29 Mars 1940.**

[2] C. MALTEZOS, l' Aurore boréale du 25 - 26 Janvier 1938, *Praktika de l' Académie d'Athènes*, 1938, 13, p. 269.