ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 15ης ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1942

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΕΞΑΡΧΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ὁ κ. ***Μαρῖνος Γερουλᾶνος*** παρουσιάζει τὴν ἐπιστημονικὴν μελέτην τοῦ κ. Ζ. Καΐρη «Ἡ θεραπεία τῶν γενικῶν χειρουργικῶν λοιμώξεων» καὶ ἐπαινεῖ αὐτὴν δι' ὀλίγων.

Ὁ κ. ***Δημ. Λαμπαδάριος*** παρουσιάζει τὴν μελέτην τοῦ κ. Γ. Κ. Βάλληνδα «Οἰκονομικὴ τεχνικὴ» καὶ ἀναπτύσσει δι' ὀλίγων τὸ περιεχόμενον αὐτῆς.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ. — Περὶ τοῦ μέτρου τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων*. *ὑπὸ* ***Θ. Βαροπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου.

1.- Ὁ P. Montel ἀπέδειξεν [1] ὅτι πᾶν πολυώνυμον

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_p x^p + \ldots + \ldots + a_n x^n$$

εἰς ὃ οἱ $p+1$ $(p+1<n)$ πρῶτοι συντελεσταὶ εἶναι οἱ αὐτοί, ἔχει p ῥίζας ἐντὸς κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς δὲν ὑπερβαίνει ἀριθμὸν Ω ἐξαρτώμενον ἐκ τῶν a_0, $a_1, \ldots,$ a_p καὶ τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου, δηλ. τὸ Ω δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ βαθμοῦ n τοῦ πολυωνύμου, ἐκτὸς ἂν τὸ f(x) δὲν ἔχει *κενά,* ἤτοι ἂν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $n+1$.

Εἶναι δύσκολος ὁ προσδιορισμὸς ἐν γένει τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου τοῦ μέτρου τῶν p ῥιζῶν [2] δηλ. τοῦ Ω.

* **TH. VAROPOULOS. Sur le module des zeros des polynômes.**

[1] *P. Montel;* Sur les modules des ȝéros des polynomes (Annales Scientifiques de l'Ecole normale Superieure, s. 3 t XL (1923) p 1 - 34).

[2] *Van Vleck:* On limits to the absolute values of the roots of a polynomial (Bulletin de la Societé mathématique de Franee t 53 (1925) p. 105 - 125.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην *ἀντικαθίστανται οἱ συντελεσταὶ* $a_0, a_1 \ldots, a_n$ *ὑπὸ ἄλλων ἀριθμῶν* καὶ ζητοῦνται συνθῆκαι ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι ὥστε αἱ ῥίζαι τῶν πολυωνύμων f(x) νὰ κεῖνται ἐντὸς κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ βαθμοῦ n.

Θεώρημα I. *Ἐὰν* r_n *εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τοῦ πολυωνύμου.*

$$-1 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots + c_n r^n$$

ὅπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, καὶ ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\quad a_i < c_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$

τότε ἀνώτερον ὅριον τοῦ μέτρου τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων f(x) *εἶναι* $\frac{1}{r_n}$, *τὸ δὲ* r_n *ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ* $\frac{1}{n}$

Θεώρημα II. *Ἔστω* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *καὶ ἡ σειρὰ*

$$(\Sigma) \qquad c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

ὅπου $\quad a_i < c_i$

Ἵνα αἱ ῥίζαι τῶν πολυωνύμων f(x) *κεῖνται ἐντὸς κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ n, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ σειρὰ (Σ) νὰ συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος* $\varrho > 0$.

Θεώρημα III. *Ἐὰν R εἶναι ἀνώτερον ὅριον τοῦ μέτρου τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων* $\quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + an$

ἡ σειρὰ $\quad c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

ὅπου $\quad a_i < c_i$

συγκλίνει ὁμαλῶς διὰ $\quad x < \frac{1}{R}$

αἱ ὡς ἄνω δύο προτάσεις δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν καὶ ὡς ἕπεται:

Θεώρημα. *Δι' ὅλα τὰ πολυώνυμα.*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n1} + \ldots + a_n$$

ὅπου $\quad a_i < c_i$

ὁ κῦκλος $\quad x < \frac{1}{R}$

Biernacki: Sur les equations algebriques contenant des paramètres arbitraives (Bulletin de l'Académie polonaise des Sciruees et des Lettres (1927) p. 541 - 685.

Dieudonné Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes (Annales Scientifiques de l'Ecole N.S. s. 3, t XLVIII, p. 247 - 358 (1931).

ὅπου R εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = 1$$

περιλαμβάνει τὰς ῥίζας τῶν $f(x)$.

2. – Ἐφαρμόζοντες τὸ προηγούμενον θεώρημα, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας σχέσεις:

1ον) διὰ $Cn = N, \; n = 1, 2, \ldots$

ἔχομεν $N(x + x^2 + \ldots) = 1$ ἢ $\frac{N}{1-x} = 1 + N, \; R = \frac{1}{1+N}$

δηλ. *τὸ κλασσικὸν θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας.*

2ον διὰ $Cn = \frac{1}{n}$ ἔχομεν

$$x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = 1$$

δηλ. $\log \frac{1}{1-x} = 1$, ἤτοι $R = \frac{e-1}{e}$.

τουτέστι τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Ὅλων τῶν πολυωνύμων (οἱουδήποτε βαθμοῦ)

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

δι' ἃ $a_i < \frac{1}{i} \qquad i = 1, 2, \ldots$

αἱ ῥίζαι κεῖνται ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος

$$\frac{e}{e-1} = \underline{1{,}51}.$$

3ον) Διὰ $c_n = \frac{1}{n!}$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $e^x - 1 = 1$ καὶ δίδει

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\log 2} < 1{,}45$$

τουτέστιν.

Τὰ πολυώνυμα $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$

δι' ἃ $a_i < \frac{1}{i!}, \qquad i = 1, 2, \ldots$

ἔχουσιν τὰς ῥίζας των ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος 1,45.

4ον) *Τὰ πολυώνυμα*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

δι' ἃ $a_i < i$

ἔχουσιν τὰς ῥίζας των ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 2{,}6$

3. – *Ὅταν ἡ σειρὰ* $(\Sigma) \qquad c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

ἀποκλίνει, τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{R}$ *αὐξάνει ἀπεριορίστως.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ: $c_n = n^n$

ἡ σειρὰ $\sigma(x) = x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^n x^n + \ldots$

ἀποκλίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Τὸ R διὰ τὴν $\sigma(x) = 1$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν διότι $R < \frac{1}{n}$.

RÉSUMÉ

M. P. Montel à montré que tout polynome $a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + + \ldots + a_n n^n$, pour lequel les $p+1$ premièrs coefficients sont fixes admet p zéros dont les modules ne depassent pas un nombre, qui ne depend que des cœfficieuts fixés, et du nombre des termes figurant effectivement dans le polynome.

Dans cet ordre d'idées nous considerons une suite infinie de nombres positifs $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, tels que

$$a_i \leqslant c_i \qquad i = 1, 2 \ldots$$

et nous cherchons les conditions pour lesquelles les zéros des polynomes

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

aient leurs modules bornés.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ· **Le calcul des ponts suspendus à tablier rigide par l'ellipse d'élasticité***. *Note de Athan. Broïkos*. Présentée par C. Maltezos.

Un système constitué par un cable appuyé sur deux pylônes A_0 et B_0 amarré à ses deux extremités A_1 et B_1 et auquel est suspendu uue poutre triangulée quelquonque à deux appuis simples, dénommée tablier rigide, est ce qu'on appelle un pont suspendu à tablier rigide (fig. 1). Par la présente note je me propose de montrer comment on peut arriver au calcul complet et rigoureux d'un pareil système au moyen de l'ellipse d'élasticité dont nous avons montré ailleurs [1] les proprietés essentielles et la féconde utilité. Rappellons tout d'abord brièvement quelques notions préliminaires.

Le système ci-haut defini est hyperstatique d'ordre $k = b + l - 2n$, où b

---

* ΑΘΑΝ. ΜΠΡΟΪΚΟΣ. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν δι' ἀκάμπτων φορέων κρεμαστῶν γεφυρῶν διὰ τῆς ἐλλείψεως ἐλαστικότητος.

[1] Cf. «Le calcul des arcs continus sur appuis élastiques» ΠΡΑΚΤΙΚΑ 1941.

β') Ἡ ἔλλειψις ἐλαστικότητος καὶ αἱ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὑπερστ. συστημάτων ΤΕΧΝ. ΧΡΟΝΙΚΑ.