τῶν τριῶν ὡς ἄνω ὁμάδων λαβῶν καὶ ἡ κατάταξις αὐτῶν εἰς διαφόρους κατηγορίας ἀναλόγως τῶν χαρακτηριστικῶν αὐτῶν ὀρυκτῶν, ὧν παρατίθενται καὶ ὀπτικαὶ σταθεραί.

Διαπιστοῦται μεταξὺ τῶν ἄλλων ὀρυκτῶν καὶ ἡ παρουσία διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἑλληνικὰ ἐκρηξιγενῆ πετρώματα τοῦ σπανίου ὀρυκτοῦ σελαδονίτου.

Ἡ ἐργασία συνοδεύεται ἀπὸ πίνακα περιλαμβάνοντα ἓξ μικροφωτογραφίας, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζουσι περλιτικὸν ἱστὸν λιπαρίτου, ὑαλοπιλιτικὸν δακίτου, λίαν ἐνδιαφερούσας μαγματικὰς διαβρώσεις μαρμαρυγίου καὶ χαλαζίου, σχηματισμὸν μονοκλινοῦς αὐγίτου περὶ ὑπερσθενικὸν πυρῆνα καὶ σταυροειδῆ δίδυμον ὑπερσθενοῦς ἐν μέρει εὑρισκόμενον ἐν συμφύσει μετὰ μονοκλινοῦς αὐγίτου.

Εἰς προσεχῆ ἀνακοίνωσίν του ὁ συγγραφεὺς θὰ δώσῃ τὸ διάγραμμα τοῦ μαγματικοῦ διαφορισμοῦ τῆς ὑπ' αὐτοῦ μελετηθείσης πετρογραφικῆς ἐπαρχίας τῶν Φερρῶν καὶ σύγκρισιν τούτου πρὸς ἄλλας λάβας, ἰδίως ἑλληνικάς.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ. — **Ἐπὶ τοῦ διαμαγνητισμοῦ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ἀερίου***, ὑπὸ ***Ἀχ. Παπαπέτρου***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον δρᾷ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ἀερίου κατὰ δύο διαφόρους τρόπους. Ἡ πρώτη δρᾶσις ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει ἰδίαν μαγνητικὴν ῥοπήν, ἔχει δὲ ὡς συνέπειαν τὴν ἐμφάνισιν ἑνὸς ἀσθενοῦς *παραμαγνητισμοῦ* τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ἀερίου (Pauli). Τὸ δεύτερον μέρος ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν ἠλεκτρονίων, θεωρουμένων ἤδη ὡς ἁπλῶν ἠλεκτρικῶν σωματίων. Ὁ κυματομηχανικὸς ὑπολογισμὸς αὐτοῦ ἐδόθη κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸν Landau[1], ὁδηγεῖ δὲ εἰς ἕνα ἀσθενῆ *διαμαγνητισμόν*, ἴσον πρὸς τὸ $^1/_3$ τοῦ παραμαγνητισμοῦ τοῦ Pauli. Εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ Landau γίνεται παράλειψις ἑνὸς ἐπιφανειακοῦ ὅρου, ἡ ὁποία εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν φαίνεται ἐκ τῶν προτέρων ἐπιτρεπομένη. Ὁ ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς ἐδόθη εἰς δύο ἐργασίας τοῦ γράφοντος[2], ἐπιβεβαιῶν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Landau διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ περιέχον τὸ ἀέριον δοχεῖον ἔχει σχῆμα ἀπείρως ἐκτεινομένης ἐπιπέδου πλακός.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν δίδεται ὁ ὑπολογισμὸς διὰ κυλινδρικὸν περιέχον δοχεῖον ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου διευθυνομένου κατὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

2. Ἐκλέγομεν ὡς ἄξονα $0z$ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου:

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H,$$

* ACH. PAPAPETROU.— **Über den Diamagnetismus des Elektronengases.**

[1] *Zs. f. Phys.*, **64**, 629, 1930. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι εἰς τὴν κλασσικὴν μηχανικὴν τὸ συνολικὸν ἀποτέλεσμα τῆς δευτέρας αὐτῆς δράσεως ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

[2] *Z. f. Phys.*, **106**, 9, 1937 καὶ **107**, 387, 1937. Εἰς τὴν συνέχειαν θὰ ἀναφέρωνται ὡς l. c. I καὶ l. c. II.

γράφομεν δὲ τὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν $\vec{A}$ ὑπὸ μορφὴν κυλινδρικῶς συμμετρικήν:

$$A_x = -\frac{Hy}{2}, \quad A_y = +\frac{Hx}{2}, \quad A_z = 0. \tag{1}$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Schrödinger

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta\psi - \frac{ieh}{2\pi\mu c}\left(\vec{A}\,\mathrm{grad}\,\psi\right) + \left(E - \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2\right)\psi = 0$$

δύναται τότε νὰ γραφῇ ἀμέσως διὰ κυλινδρικὰς συντεταγμένας. Εἶναι πράγματι:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\left(\vec{A}\,\mathrm{grad}\,\psi\right) = \frac{H}{2}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{H}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

καὶ ἑπομένως:

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{iehH}{4\pi\mu c}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(E - \frac{e^2H^2r^2}{8\mu c^2}\right)\psi = 0. \tag{2}$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν μ παριστᾷ τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου, ἐνῷ τὸ φορτίον αὐτοῦ ἐτέθη ἴσον μὲ $-e$.

3. Διὰ τὴν λύσιν τῆς (2) θέτομεν[1]:

$$\psi = e^{2\pi ikz/h}\,\upsilon(r,\varphi), \tag{3α}$$

$$\upsilon(r,\varphi) = e^{im\varphi}.\,f(r), \qquad m \text{ ἀκέραιος}, \tag{3β}$$

εἰσάγομεν δὲ διὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ἓν μῆκος περιόδου C:

$$k = \frac{h}{C}K, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Διὰ τὴν συνάρτησιν υ προκύπτει ἐκ τῆς (2) ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου ταλαντωτοῦ:

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\varphi^2}\right) + \left(E'' - \frac{e^2H^2r^2}{8\mu c^2}\right)\upsilon = 0, \tag{5}$$

$$E'' = E' + \frac{heHm}{4\pi\mu c}, \quad E' = E - \frac{k^2}{2\mu}. \tag{6}$$

Ζητοῦνται δὲ αἱ λύσεις τῆς (5) ὑπὸ τὴν μορφὴν (3β). Θέτομεν χάριν συντομίας:

$$\frac{8\pi^2\mu E''}{h^2} = \lambda, \quad \frac{\pi eH}{hc} = \alpha. \tag{7}$$

Εἰσάγομεν ἤδη τὴν (3β) εἰς τὴν (5), ὁπότε προκύπτει διὰ τὴν f(r) ἡ ἐξίσωσις:

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(\lambda - \alpha^2r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0. \tag{8}$$

[1] Βλ. C. G. DARWIN, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **27**, 86, 1931.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εἰσάγομεν τὴν γνωστὴν μορφὴν

$$f = \Pi(r).\ e^{-\alpha r^2/2}, \tag{9}$$

ὁπότε προκύπτει διὰ τοὺς συντελεστὰς c_q τοῦ πολυωνύμου Π ὁ ἀναδρομικὸς τύπος:

$$[(q+2)^2 - m^2]\, c_{q+2} = (2\alpha q + 2\alpha - \lambda)\, c_q\,. \tag{10}$$

Ἔστω n ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου Π. Προκύπτει τότε ἀπὸ τὴν (10):

$$\lambda = 2\alpha(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Ἐπίσης προκύπτει διὰ τὴν μορφὴν τοῦ Π, παραλειπομένου τοῦ παράγοντος κανονισμοῦ:

$$\Pi_n^m = r^n + c_{n-2} r^{n-2} + \cdots + c_{|m|} r^{|m|}. \tag{12}$$

Εἶναι δηλαδή:

$$|m| \leqslant n, \quad n - m \text{ ἄρτιον.} \tag{13}$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (6), (7) καὶ (11) προκύπτει:

$$E_n'^m = \frac{ehH}{4\pi\mu c}(n - m + 1)\cdot \tag{14}$$

θέτομεν ἀκόμη

$$n - m = 2N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

ὁπότε εἶναι:

$$E' = \frac{ehH}{4\pi\mu c}(2N+1). \tag{16}$$

Προκύπτουν δηλαδὴ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ κυλίνδρου αἱ τιμαὶ ἐνεργείας τοῦ Landau, ἐφ' ὅσον βεβαίως παραμεληθῇ ἡ δρᾶσις τῆς ὁριακῆς ἐπιφανείας.

4. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφόρων τοῦ μηδενὸς ριζῶν r^2 τοῦ πολυωνύμου

$$\Pi_n^m \equiv \Pi_n^{-m}$$

εἶναι κατὰ τὴν (12):

$$\frac{n - |m|}{2},$$

καὶ τὸ ἄθροισμά των κατὰ τὰς (10) καὶ (11):

$$c_{n-2} = \frac{n^2 - m^2}{4\alpha} = \frac{(n - |m|)(n + |m|)}{4\alpha}.$$

Ἰσχύει δηλαδὴ διὰ τὸ «κέντρον βάρους» r_s^2 τῶν ριζῶν αὐτῶν ἡ σχέσις:

$$\alpha r_s^2 = \frac{n + |m|}{2}. \tag{17}$$

5. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν:

$$\frac{N}{n} \ll 1. \tag{18}$$

Εἶναι τότε προφανῶς:

$$|m| = m \approx n \gg 1,$$

ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ N, καὶ τὸ κέντρον βάρους αὐτῶν

$$\alpha r_s^2 \quad n \quad N. \tag{17α}$$

Εἶναι δὲ προσέτι εὔκολον νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ N ρίζαι εὑρίσκονται πολὺ πλησίον τοῦ r_s.

Θέτομεν:

$$r = r_s + x, \tag{19}$$

εἰσάγομεν δὲ συμφώνως μὲ τὴν τελευταίαν παρατήρησιν τὴν παραδοχὴν ὅτι ἡ συνάρτησις f λαμβάνει ἀξιολόγους τιμὰς μόνον εἰς μίαν μικρὰν περιοχὴν πέριξ τοῦ r_s:

$$\frac{x}{r_s} \ll 1, \tag{20}$$

ἐνῷ εἰς μεγαλυτέρας ἀποστάσεις x εἶναι πρακτικῶς ἴση πρὸς μηδέν. Προκύπτει τότε ἀπὸ τὰς (8) καὶ (11) μετὰ παράλειψιν τῶν ὅρων ἀνωτέρας τάξεως:

$$\frac{d^2 f_n^m}{dx^2} + [(2N+1)\alpha_1 - \alpha_1^2 x^2] f_n^m = 0, \qquad \alpha_1 \quad 2\alpha. \tag{21}$$

Ὥστε, ἐφόσον πληροῦται ἡ συνθήκη (18), ἡ συνάρτησις f_n^m ταυτίζεται μὲ τὴν συνάρτησιν f_N ἑνὸς γραμμικοῦ ταλαντωτοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ θέσις ἰσορροπίας εἶναι r_s:

$$f_n^m = f_{N, r_s}, \tag{22}$$

ἡ δὲ συχνότης κατὰ τὴν δευτέραν τῶν σχέσεων (21) εἶναι διπλασία τῆς συχνότητος τοῦ ὑπ' ὄψιν ἐπιπέδου ταλαντωτοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τοῦ ἀποτελέσματος (22) ἐπιβεβαιοῦται ἐκ τῶν ὑστέρων τὸ ὀρθὸν τῆς παραδοχῆς (20)[1].

6. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐνεργείας τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ἀερίου θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον μίαν μικρὰν τιμὴν τοῦ N. Ἂν καὶ τὸ n εἶναι μικρόν, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ συνάρτησις f λαμβάνει ἀξιολόγους τιμὰς μόνον πολὺ πλησίον τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου. Ἂν ἀντιθέτως τὸ n ἔχει μεγάλην τιμήν, τότε πληροῦται ἡ συνθήκη (18), καὶ ἡ συνάρτησις f περιορίζεται εἰς μικρὰν περιοχὴν περὶ τὴν ἀπόστασιν r_s, τὴν ὁριζομένην διὰ τῆς σχέσεως (17α). Κατὰ συνέπειαν ἡ δρᾶσις τῆς ὁριακῆς ἐπιφανείας ἀρχίζει νὰ γίνεται σημαντικὴ διὰ τιμὰς n πλησιαζούσας τὴν τιμὴν

$$n_0 \quad \alpha R^2, \tag{23}$$

[1] Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ὁδηγεῖ ἐπίσης εἰς τὴν φυσικὴν ἐξήγησιν τῆς ὑπολογισθείσης ἤδη περιπτώσεως τῆς ἀπεράντου πλακός: Ἡ ἀπέραντος πλὰξ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς κυλινδρικὸς δακτύλιος ἀπείρως μεγάλης ἀκτῖνος.

ὅπου R παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου. Διὰ τιμὰς $n \ll n_o$ ἔχομεν κατὰ τὴν (16) τὰς εὐθείας τοῦ Landau:

$$E' = \frac{ehH}{4\pi\mu c}(2N+1),$$

αἱ ὁποῖαι διὰ μεγαλυτέρας τιμὰς τοῦ n μεταπίπτουν εἰς ἀνερχομένας καμπύλας λόγῳ τῆς δράσεως τῆς ὁριακῆς ἐπιφανείας[1].

Ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ N εἶναι κατὰ τὴν (16):

$$N_{max} = \frac{2\pi\mu c}{eH} \cdot \frac{\zeta}{H},$$

ὅπου ζ ἡ ὁριακὴ ἐνέργεια τῶν ἠλεκτρονίων. Εἶναι ἑπομένως:

$$\frac{N_{max}}{n_o} = \frac{2\mu\zeta c^2}{e^2R^2H^2}.$$

Κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν τὴν παραδοχήν:

$$\frac{N_{max}}{n_o} \ll 1, \tag{24}$$

ἡ ὁποία προφανῶς πληροῦται, ὅταν τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρόν[2], καὶ ἡ ὁποία σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν καταστάσεις πληροῦσαι τὴν συνθήκην (18) διὰ πᾶσαν δυνατὴν τιμὴν τοῦ N. Ἀλλὰ τότε ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ n διὰ τυχὸν N εἶναι εἰς τὴν προσέγγισιν τοῦ Landau κατὰ τὴν (17α):

$$n_{max} = \alpha R^2 + N,$$

ἐνῷ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ ἀντιστοιχεῖ προφανῶς εἰς τὴν κατάστασιν $n = -m = N$:

$$n_{min} = N.$$

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν καταστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ N, ἢ κατὰ τὴν (16) εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς ἐνεργείας E′ εἶναι:

$$n_{max} - n_{min} = \alpha R^2,$$

ἤτοι κατὰ τὴν (7), ἂν παραστήσωμεν μὲ s τὴν διατομὴν τοῦ κυλίνδρου:

$$n_{max} - n_{min} = \frac{eHs}{hc}. \tag{25}$$

Προκύπτει δηλαδὴ ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς καταστάσεων, ὁ ὁποῖος εὑρέθη κατὰ τὸν ὑπο-

[1] Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι διὰ $n < 2N$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῆς f εἶναι διάφορος τοῦ N.

[2] Ἐπὶ παραδείγματι διὰ 10^{22} ἠλεκτρόνια ἀνὰ cm^3 καὶ R = 1 cm προκύπτει ἤδη διὰ H = 100 gauss:

$$N_{max}/n_o \approx 1/500.$$

λογισμὸν τῆς περιπτώσεως τῆς ἐπιπέδου πλακός[1]. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν (16) αἱ τιμαὶ E' παρέμειναν ἐπίσης ἀμετάβλητοι, ἕπεται ὅτι εἰς τὴν προσέγγισιν τοῦ Landau θὰ προκύψῃ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ κυλίνδρου τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα, ὅπως καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον πλάκα.

7. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ προσθέτου ὅρου, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν δρᾶσιν τῆς ὁριακῆς ἐπιφανείας, πρέπει νὰ ἀναφέρωμεν τὰς καμπύλας $E'_{N=\sigma\tau\alpha\vartheta}$ εἰς τὴν νέαν τετμημένην:

$$r_s = \sqrt{\frac{n\ N}{\alpha}}\,. \tag{26}$$

Αἱ ἀποκλίσεις τῶν καμπυλῶν αὐτῶν ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ Landau περιορίζονται τότε εἰς μίαν μικρὰν περιοχὴν περὶ τὴν θέσιν r_s R. Ἐπὶ πλέον ὅμως κατὰ τὴν (22) αἱ καμπύλαι $E'_{N=\sigma\tau\alpha\vartheta}$ ἔχουν περὶ τὴν θέσιν r_s R ἀκριβῶς τὴν μορφήν, τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ ἀντίστοιχοι καμπύλαι τῆς ἐπιπέδου πλακὸς περὶ ἓν τῶν τοιχωμάτων αὐτῆς. Ὥστε προκύπτει τελικῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κυλίνδρου ἀνύψωσις τῶν εὐθειῶν τοῦ Landau πλησίον τῆς ὁριακῆς ἐπιφανείας ἐπὶ μηκῶν, τὰ ὁποῖα θὰ καθορίζωνται ἐπίσης διὰ τῶν παραβολῶν Π καὶ Π′ τῶν κατασκευασθεισῶν διὰ τὴν ἐπίπεδον πλάκα[2].

Παριστῶμεν μὲ y τὸ μῆκος τῆς ἀνυψώσεως αὐτῆς διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν E' τῆς ἐνεργείας, παρατηροῦμεν δὲ ἀπὸ τὴν (24), ὅτι δι' ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς E' εἶναι

$$\frac{y}{R} \ll 1.$$

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν καταστάσεων, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ μήκους y θὰ εἶναι κατὰ τὴν (26):

$$2\alpha R y \quad \alpha R^2.\ \frac{2y}{R} = \frac{eHs}{hc}\cdot\frac{2y}{R}\,. \tag{27α}$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἰς ἐπίπεδον πλάκα πάχους B εἶναι[3]:

$$\frac{eHs}{hc}\cdot\frac{2y}{B}\,. \tag{27β}$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο σχέσεων (27) προκύπτει ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν σχέσιν (25) ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑψωμένων καταστάσεων πρὸς τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν καταστάσεων ἐνεργείας E' ἔχει εἰς τὸν κύλινδρον τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς τιμήν, ὅπως εἰς πλάκα πάχους B R. Κατὰ συνέπειαν ὁ πρόσθετος ὅρος τῆς ἐνεργείας διὰ τὸν κύλιν-

[1] Βλ. l. c. I, σχέσεις (6) καὶ (10).

[2] Βλ. σχ. 3 εἰς l. c. I.

[3] Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν (6) καὶ (10) εἰς l. c. I, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὴν πλάκα ὑπάρχει ὕψωσις ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν τοιχωμάτων.

δρον θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον τῆς πλακός[1], ὅταν τεθῇ $B = R$:

$$\Delta E = \frac{\pi \mu \zeta^2}{h^2} \cdot \frac{V}{R} \cdot \qquad (28)$$

8. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιπέδου πλακὸς ἔχει ἤδη δειχθῇ ἀπ᾽ εὐθείας[2], ὅτι ὁ πρόσθετος αὐτὸς ὅρος παριστᾷ ἐπιφανειακὴν ἐνέργειαν ἀνεξάρτητον τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, καὶ ἑπομένως εἶναι ἄνευ σημασίας διὰ τὰς μαγνητικὰς ἰδιότητας τοῦ ἀερίου. Ἂν παρασταθῇ μὲ S ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς πλακὸς τοῦ ἔχοντος ὄγκον V, ληφθῇ δὲ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι εἶναι

$$\frac{V}{B} = \frac{S}{2},$$

ὁ πρόσθετος ὅρος λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\Delta E = \frac{\pi \mu \zeta^2 . S}{2h^2} \cdot \qquad (29)$$

Ὥστε ἡ πυκνότης τῆς ἐπιφανειακῆς ἐνεργείας εἶναι:

$$\sigma = \frac{\pi \mu \zeta^2}{2h^2} \cdot \qquad (30)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\frac{V}{R} = \frac{\pi R^2 C}{R} = \frac{S}{2} \cdot$$

Ἑπομένως ἡ σχέσις (28) μεταπίπτει καὶ πάλιν εἰς τὴν μορφὴν (29). Καθίσταται τοιουτοτρόπως φανερόν, ὅτι ὁ ὅρος ΔE παριστᾷ καὶ πάλιν ἐπιφανειακὴν ἐνέργειαν τοῦ ἀερίου. Ἀλλὰ ἡ ἄμεσος δι᾽ ὑπολογισμοῦ ἀπόδειξις, ὅτι ἡ ἐνέργεια ΔE εἶναι ἄσχετος πρὸς τὸ μαγνητικὸν πεδίον, φαίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μᾶλλον πολύπλοκος. Μία ποιοτικὴ ἁπλῶς ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν ἀκόλουθον γενικὴν παρατήρησιν.

9. Εἰς τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Schrödinger ἐπεβλήθη ἡ συνθήκη τῆς μηδενικῆς τιμῆς ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ περιέχοντος δοχείου[3]. Ἑπομένως ἡ πυκνότης ἠλεκτρονίων ἔχει ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τὴν τιμὴν μηδέν, ἀνερχομένη εἰς τὴν τελικήν της τιμὴν βαθμιαίως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν ὡρισμένην *μείωσιν* τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιπέδου πλακός, ὅπου αἱ συναρτήσεις ψ ἔχουν μορφὴν ἡμιτονοειδῆ, δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι ἡ μείωσις αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸν ὄγκον ἐπιφανειακοῦ στρώματος πάχους $\lambda/4$, ἂν λ τὸ

1 Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων (20), (26) καὶ (27) εἰς l. c. I.

2 Βλ. § 3 εἰς l. c. II.

3 Βλ. σχέσιν (9) εἰς l. c. I.

μῆκος κύματος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν κατάστασιν μὲ τὴν ὁριακὴν ἐνέργειαν ζ:

$$\Delta V \approx S\frac{\lambda}{4}, \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\mu\zeta}}. \tag{31}$$

Ἰσχύει δὲ αὐτὸ κατὰ προσέγγισιν καὶ διὰ τυχὸν σχῆμα δοχείου, ἀρκεῖ ἡ ἐπιφάνειά του νὰ εἶναι ἐπὶ ἐκτάσεως μήκους λ σχεδὸν ἐπίπεδος, δηλαδὴ πρακτικῶς εἰς πᾶσαν περίπτωσιν μακροσκοπικῶν διαστάσεων.

Ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀερίου εἶναι:

$$E = \frac{8\pi V(2\mu\zeta)^{3/2}.\zeta}{5h^3}, \qquad \zeta = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{2\mu}. \tag{32}$$

Ἑπομένως ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου ἔχει ὡς συνέπειαν μεταβολὴν τῆς ἐνεργείας:

$$\Delta E = \frac{2}{3}E.\frac{\Delta V}{V}.$$

Προκύπτει τελικῶς ἀπὸ τὰς (31) καὶ (32):

$$\Delta E \approx \frac{8\pi\mu\zeta^2 S}{15h^2},$$

ἤτοι κατὰ προσέγγισιν ἡ σχέσις (29). Ἐπιβεβαιοῦται τοιουτοτρόπως ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ ἐνέργεια (29) εἶναι ἄσχετος πρὸς τὸ μαγνητικὸν πεδίον, συγχρόνως δὲ ὅτι αἱ σχέσεις (29) καὶ (30) εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος καὶ γενικῶς ἰσχυραί.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Anschluss an frühere Rechnungen[1] wurde hier die Energie des Elektronengases für den Fall eines zylindrischen Kastens im longitudinalen Magnetfeld untersucht. Den Erwartungen gemäss lässt sich die Rechnung bei genügend starken Feldern ohne Verwendung der Eigenwerte der Besselschen Funktionen, nur mit den Eigenwerten des ebenen, sowie des linearen Oszillators erledigen. Aus der Rechnung ergibt sich zunächst der Landausche Wert der Suszeptibilität. Ferner ergibt sich im Energieausdruck ein Zusatzglied, welches auch hier, wie im Falle des planparallelen Kastens, eine Oberflächenenergie darstellt. Dieses Zusatzglied ist:

$$\Delta E = \frac{\pi\mu\zeta^2 S}{2h^2},$$

was mit dem entsprechenden Ausdruck für den planparallelen Kasten genau übereinstimmt. Folglich hat die Oberflächenspannung in beiden Fällen denselben Wert:

$$\sigma = \frac{\pi\mu\zeta^2}{2h^2}.$$

[1] *Zs. f. Phys.*, **106**, 9, 1937 und **107**, 387, 1937.

Das Zusatzglied ΔE lässt sich qualitativ dadurch erklären, dass die Eigenfunktionen der Elektronen an der Kastenoberfläche verschwinden müssen; die Elektronendichte soll also an der Oberfläche bis zu Null abfallen, was offenbar einer Verminderung des Kastenvolumens gleichwertig ist. Aus der Diskussion dieser Annahme folgt, dass der oben angegebene σ – Wert bei makroskopischen Kastendimensionen von der Form unabhängig und allgemein gültig sein soll.

ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΓΡΑΦΙΑ.— **Vergleichende röntgenographische Untersuchung von Arsenaten und Selenaten.** (Skorodit, Strengit, Cadmiumselenat-Dihydrat und Manganoselenat-Dihydrat),* *von* ***Peter Kokkoros***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

1. *Arsenaten.*—Skorodit ($FeAsO_4 . 2H_2O$) und Strengit ($FePO_4 . 2H_2O$) kristallisieren rhombisch holoedrisch, und sind einander isomorph. Die am häufigsten auftretenden Formen auf Kristallen beider Mineralien sind die (111), (120) und (100). Die für die Achsenverhältnisse bei Skorodit in der Literatur angegebenen Daten weichen ziemlich von einander ab. Es ist gefunden[1]:

Skorodit a : b : c	= 0,86785	: 1 :	0,96785	(n. Tschirma)
	= 0,865	: 1 :	0,972	(n. Ito u. Schiga)
	= 0,865783	: 1 :	0,954138	(n. Buttgenbach)
	= 0,8687	: 1 :	0,9536	(n. Slavik)
	= 0,8694	: 1 :	0,96970	(n. Laspeyres)
Strengit[2] a : b : c	= 0,8663	: 1 :	0,9776	(n. Laubmann und Steinmetz).

Weitere Angaben über die Feinstruktur dieser Mineralien sind, soweit uns aus der Literatur bekannt ist, nicht vorhanden. Vorliegender Bericht enthält die vorläufigen Ergebnisse einer Röntgenuntersuchung, welche zwecks Strukturbestimmung dieser Substanzen unternommen wurde. Es wurde dazu ein kleiner, gut ausgebildeter Kristall von Skorodit benutzt, dessen durchschnittliche Dicke nach den drei kristallographischen Richtungen 0,7-0,4 mm betrug. Die Stufe aus der dieser Kristall genommen wurde, stammt aus dem Vorkommen von Callington in Cornwall und wurde vom Mineralienkontor von W. Maucher geliefert. Die äussere Form des Kri-

* Π. ΚΟΚΚΟΡΟΥ.—Συγκριτικὴ ἀκτινογραφικὴ ἔρευνα σεληνικῶν καὶ ἀρσενικικῶν ἀλάτων (σκοροδίτου στρεγγίτου, δὶς ἐνύδρου σεληνικοῦ καδμίου καὶ δὶς ἐνύδρου σεληνικοῦ μαγγανίου).

[1] Hintze, Handbuch der Mineralogie, BI, S. 1829.

[2] Zt. Krist., 55 (1920), 523.