ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 15ΗΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1990

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΛΑΧΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ.— **Ἐπίπεδα προβλήματα τῆς θεωρίας ἐλαστικότητος, θερμοαγωγιμότητος καὶ θερμοελαστικότητος διὰ ρηγματωμένα ἰσότροπα καὶ ἀνισότροπα σώματα μὲ ἐνισχύσεις**, ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. *Περικλῆ Σ. Θεοχάρη*, ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τῶν *Δημοσθένη Μπαρτζώκα* καὶ *Βλαδιμήρου Ζ. Παρτόν**.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ πρόβλημα θραύσεως τῶν ὑλικῶν καὶ κατασκευῶν ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν ἐπικαίρων θεμάτων τῆς μηχανικῆς τοῦ παραμορφωσίμου στερεοῦ σώματος. Ἐν τούτοις, παρ' ὅλον ὅτι ὑπάρχει μεγάλη πληροφόρησις διὰ τὰ διάφορα φαινόμενα θραύσεως, ὁ μηχανισμὸς τοῦ φαινομένου δὲν ἔχει πλήρως μελετηθῆ καὶ ἀπαιτεῖ τὴν συνεργασίαν πολλῶν ἐπιστημόνων διαφόρων συγγενῶν κλάδων.

Ἂν καὶ ὁ μηχανισμὸς θραύσεως δὲν δύναται νὰ ἀναχθῆ μόνον εἰς τὸ φαινόμενον διαδόσεως τῶν ρωγμῶν, ἐν τούτοις ἡ ἐξέτασις τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ σῶμα ἀρχίζει νὰ δημιουργῆ ρωγμὴν ἢ καὶ σύστημα ρωγμῶν, αἱ ὁποῖαι ἐν συνεχείᾳ διαδίδονται εἰς αὐτό, ἀποτελεῖ μίαν ἐκ τῶν κυριωτέρων καὶ ἐνδιαφερουσῶν πλευρῶν τοῦ προβλήματος τῆς θραύσεως. Αὐτὴ ἡ πλευρὰ τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν μελέτην τῆς ἐντατικο-παραμορφωσιακῆς καταστάσεως τοῦ σώματος εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἰδιομόρφων σημείων του.

Ἓν ἐκ τῶν ἐνδιαφερόντων ἐπιστημονικο-παραγωγικῶν προβλημάτων εἶναι ἡ δημιουργία κατασκευαστικῶν ὑλικῶν, τὰ ὁποῖα παρέχουν τὴν δυνατότητα νὰ δια-

* P. S. THEOCARIS - D. BARDZOKAS - VL. PARTON, **Plane problems of the theory of elasticity, thermoelasticity and thermoconductivity for cracked isotropic or anisotropic bodies with reinforcements.**

κρίνωνται διὰ τὴν ὑψηλήν των ἀντοχήν, τὴν ἀνθεκτικότητα, τὴν ἀσφάλειαν, τὴν μακροῦ χρόνου λειτουργίαν των καὶ τὴν οἰκονομίαν. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τῶν κατασκευῶν προορίζονται νὰ λειτουργήσουν ὑπὸ συνθήκας ὑψηλῶν θερμοκρασιῶν καὶ πιέσεων, διαβρώσεως κλπ., συνεπείᾳ τῶν ὁποίων δημιουργοῦνται ἐντὸς τοῦ στερεοῦ προϋποθέσεις βοηθοῦσαι εἰς τὴν δημιουργίαν καὶ διάδοσιν ρωγμῶν καὶ ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὴν καταστροφήν των. Τὰ φαινόμενα αὐτὰ ἐπιτείνονται εἰς τὰ σημεῖα καὶ τὶς περιοχὲς τοῦ σώματος ὅπου ἐμφανίζονται ἀνομοιογένειαι τεχνολογικοῦ, κατασκευαστικοῦ καὶ δομικοῦ χαρακτῆρος, ὅπως π.χ. ρωγμαί, ἐγκλείσματα, κενά, ἐνισχύσεις, ράβδοι ἢ ραφαὶ συγκολλήσεων κλπ.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν βιομηχανίαν τῶν μετάλλων καὶ πλαστικῶν εἰς τὴν ἀεροπλοΐαν καὶ τὴν ναυσιπλοΐαν χρησιμοποιοῦνται εὐρέως αἱ πλάκες καὶ τὰ κελύφη ποὺ περιέχουν συγκολλημένας ράβδους καὶ ἐνισχύσεις. Ἡ μελέτη τοῦ προβλήματος τῶν ἐνισχυμένων πλακῶν καὶ κελυφῶν καθίσταται περισσότερον πολύπλοκη, ὅταν ἐντὸς τοῦ σώματος ὑπάρχουν ἀτέλειαι τῆς μορφῆς τῶν ὀπῶν, ρωγμῶν, ἐγκοπῶν, ἐγκλεισμάτων κλπ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀλληλοεπιδράσεως τῶν δύο ἀντιθέτων παραγόντων, ὅπως ἡ ἐνίσχυσις τοῦ σώματος καὶ ἡ ἐξασθένησίς του, ἔχει μεγάλην σημασίαν.

Τὰ τελευταῖα χρόνια εἰς τὴν σύγχρονον τεχνικὴν βρίσκουν μεγάλην ἐφαρμογὴν εἰς τὰς κατασκευὰς πλάκες ἀπὸ ἀνισότροπα ὑλικά, ἡ ἀντοχὴ καὶ ἡ ἀντίδρασις τῶν ὁποίων εἰς τὰς μηχανικὰς καὶ θερμικὰς ἰδιότητας εἶναι διάφορος διὰ διαφόρους προσανατολισμούς. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀντοχῆς καὶ ἀνθεκτικότητας τῶν ἀνισοτρόπων σωμάτων μὲ ἀτέλειες τῆς μορφῆς ρωγμῶν, ἐγκλεισμάτων, ὀπῶν κλπ. λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ θεωρία τῆς γραμμικῆς ἐλαστικότητος καὶ θερμοελαστικότητος τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου.

Συνεπῶς ἡ μελέτη τῆς ἐντατικο-παραμορφωσιακῆς καταστάσεως εἰς τὰς περιοχὰς τῶν ἀτελειῶν καὶ ἀνωμαλιῶν, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν στατικῆς φορτίσεως καὶ σταθεροῦ θερμικοῦ πεδίου, θεωρεῖται ἐπίκαιρος καὶ παρουσιάζει μέγα θεωρητικὸν καὶ πρακτικὸν ἐνδιαφέρον.

1. ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΘΕΡΜΟΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Διὰ τὴν κατάστρωσιν τῆς μαθηματικῆς θεωρίας διὰ τὴν ἀντοχὴν καὶ ἀνθεκτικότητα τῶν ἰσοτρόπων καὶ ἀνισοτρόπων ὑλικῶν, μὲ ἀτέλειες τῆς μορφῆς ρωγμῶν, ὀπῶν, ἐγκλεισμάτων κλπ., ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μηχανικῶν καὶ θερμικῶν πεδίων θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ πρότυπον τοῦ γραμμικοῦ θερμοελαστικοῦ σώματος.

Ἡ γενικὴ θεωρία τοῦ μοντέλου αὐτοῦ προϋποθέτει ὅτι:

α) Οἱ συνιστῶσες τῶν παραμορφώσεων θεωροῦνται μικρές,

β) μεταξὺ τῶν συνιστωσῶν τάσεων καὶ παραμορφώσεων ἰσχύει ὁ γραμμικὸς γενικευμένος νόμος τοῦ Hooke, καὶ

γ) οἱ ἐλαστικὲς καὶ οἱ θερμικὲς ἰδιότητες τοῦ σώματος εἶναι διάφοροι πρὸς διαφόρους κατευθύνσεις, ἀλλ' ὅμως εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς θερμοκρασίας καὶ τῶν τάσεων.

Ἐπίσης διὰ τὰ ἀνισότροπα ὑλικὰ θεωροῦμεν ὅτι σ' ὁποιοδήποτε σημεῖον τοῦ σώματος ὑπάρχει ἐπίπεδον ἐλαστικῆς καὶ θερμικῆς συμμετρίας.

Διὰ τὴν θερμοκρασίαν T ἐντὸς ἀνισοτρόπου μέσου, δεχόμεθα ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θεωρουμένης θέσεως καὶ τοῦ χρόνου t. Ἐπὶ πλέον, τὸ σῶμα ἀναφέρεται εἰς καρτεσιανὸν ἢ καμπυλόγραμμον σύστημα συντεταγμένων μὲ μοναδιαῖα διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Ἀπομονώνουμε σὲ τυχαῖον σημεῖον τοῦ σώματος στοιχειώδη ἐπιφάνειαν μὲ κάθετον διάνυσμα πρὸς αὐτὴν $\mathbf{n}$. Ὁρίζομεν τὸ $\mathbf{K}_n$ διάνυσμα θερμοαγωγιμότητος στὸ ἐξεταζόμενον σημεῖον τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν στοιχειώδη ἐπιφάνειαν μὲ κάθετον διάνυσμα $\mathbf{n}$ ὡς ἀκολούθως:

$$\mathbf{K}_n = a_1 k_{11}\mathbf{i} + a_2 k_{22}\mathbf{j} + a_3 k_{33}\mathbf{k} \qquad (1)$$

ὅπου k_{ii} ἐκφράζουν τοὺς συντελεστὰς θερμοαγωγιμότητος καὶ a_i τὰ διευθύνοντα συνημίτονα μεταξὺ τοῦ διανύσματος $\mathbf{n}$ καὶ τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Αἱ ἐπιφάνειαι ὅπου τὸ διάνυσμα τῆς θερμοαγωγιμότητος $\mathbf{K}_n$ συμπίπτει μὲ τὸ κάθετον διάνυσμα $\mathbf{n}$, ὀνομάζονται κύριαι ἐπιφάνειαι θερμοαγωγιμότητος, καὶ οἱ κάθετοι διευθύνσεις πρὸς αὐτὰς καλοῦνται κύριαι διευθύνσεις θερμοαγωγιμότητος.

Ἀντιστοίχως ὀνομάζομεν τὴν ἔκφρασιν:

$$q_n = -(\mathbf{K}_n \cdot \mathrm{grad}T) \qquad (2)$$

ὡς πυκνότητα τῆς θερμικῆς ροῆς ποὺ διαπερνᾷ τὴν στοιχειώδη ἐπιφάνειαν μὲ κάθετον διεύθυνσιν $\mathbf{n}$.

Ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν διαπερνᾷ ἡ θερμικὴ ροὴ μεγίστης πυκνότητος ὀνομάζεται κυρία ἐπιφάνεια θερμικῆς ροῆς καὶ ἡ κάθετος διεύθυνσις πρὸς αὐτὴν καλεῖται κυρία διεύθυνσις θερμικῆς ροῆς στὸ ὑπ' ὄψιν σημεῖον.

Ἐὰν οἱ ἄξονες τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς συμπίπτουν μὲ τὶς κύριες διευθύνσεις τῆς θερμοαγωγιμότητος, τὸ θερμικὸν πεδίον περιγράφεται μὲ τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν θερμοαγωγιμότητος:

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\varrho\frac{\partial T}{\partial t} - Q \quad (3)$$

ὅπου c παριστᾷ τὴν εἰδικὴν θερμοχωρητικότητα τοῦ σώματος, ϱ ἐκφράζει τὴν πυκνότητά του, Q τὴν ποσότητα θερμότητος ποὺ ἐκπέμπει ἡ μονὰς ὄγκου ἀνὰ μονάδα χρόνου.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν συγκεκριμένης λύσεως τῆς ἐξισώσεως θερμοαγωγιμότητος (3) πρέπει ὑποχρεωτικῶς νὰ δίδωνται αἱ ἀρχικαὶ καὶ αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος. Αἱ συνοριακαὶ συνθῆκαι θερμοαγωγιμότητος ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν πρᾶξιν εἶναι:

α) Ὁριακαὶ συνθῆκαι πρώτου εἴδους, ὅταν ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος δίδωνται αἱ τιμαὶ τῆς θερμοκρασίας:

$$T = f_1(x, y, z, t) \quad (4)$$

β) Ὁριακαὶ συνθῆκαι δευτέρου εἴδους, ὅταν ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος δίδωνται αἱ τιμαὶ τῆς πυκνότητος τῆς θερμικῆς ροῆς:

$$(\mathbf{K}_n \cdot \mathrm{grad}T) = f_2(x, y, z, t) \quad (5)$$

γ) Ὁριακαὶ συνθῆκαι τρίτου εἴδους, ὅταν ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος δίδωνται αἱ συνθῆκαι θερμομεταβολισμοῦ μὲ τὸ περιβάλλον, ἡ θερμοκρασία τοῦ ὁποίου εἶναι T_0.

$$(\mathbf{K}_n \cdot \mathrm{grad}T) = \lambda(T - T_0) \quad (6)$$

ὅπου λ παριστᾷ τὸν συντελεστὴν θερμομεταβολισμοῦ.

Θεωρήσωμεν κυλινδρικὸν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ γενέτειρα τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας του εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ αἱ βάσεις τοῦ κυλινδρικοῦ σώματος θεωροῦνται θερμομονωτικαί. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος σὲ οἱονδήποτε σημεῖον του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς συντεταγμένας x καὶ y, καὶ ὅτι τὸ σῶμα παρουσιάζει εὐθύγραμμον θερμικὴν ἀνισοτροπία, ὥστε σὲ οἱονδήποτε σημεῖον του μία ἐκ τῶν κυρίων διευθύνσεων θερμοαγωγιμότητος νὰ εἶναι κάθετος τοῦ xOy-ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἐντὸς αὐτοῦ δὲν ὑπάρχουν πηγαὶ θερμότητος, ἡ ἐξίσωσις (3) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + \lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

ὅπου:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= k_{11}\cos^2 a + k_{22}\sin^2 a \\ \lambda_{22} &= k_{11}\sin^2 a + k_{22}\cos^2 a \\ \lambda_{12} &= (k_{11} - k_{22})\sin a \cos a \end{aligned} \quad (8)$$

Εἰς τὰς σχέσεις (8) a παριστᾶ τὴν γωνίαν μεταξὺ τοῦ Ox-ἄξονος καὶ μιᾶς κυρίας διευθύνσεως τῆς θερμοαγωγιμότητος, ἐνῶ τὰ μεγέθη k_{ii}, λ_{ij}, θεωροῦνται σταθερά.

Ἡ γενικὴ λύσις της (7) δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν [4]:

$$T = F(z_3) + \overline{F(z_3)} \tag{9}$$

ἔνθα ἡ $F(z_3)$-συνάρτησις θεωρεῖται ἀναλυτικὴ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z_3, μ_3 παριστᾶ μίαν ἐκ τῶν ριζῶν τῆς χαρακτηριστικῆς τῆς ἐξισώσεως:

$$\lambda_{22}\mu^2 + 2\lambda_{12}\mu + \lambda_{11} = 0 \tag{10}$$

ὅπου :

$$\mu_3 = -\lambda_{12} + i(k_{11}\, k_{22})^{1/2} / \lambda_{22}$$

Ἡ θερμικὴ ροὴ συναρτήσει τῆς $F(z_3)$ ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν β_1, β_2-συνημιτόνων κατευθύνσεως μεταξὺ τῆς καθέτου **n** καὶ τοῦ στοιχείου ds ὡς ἀκολούθως:

$$\mathbf{K}_n \operatorname{grad}T = \left(\lambda_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\beta_1 + \left(\lambda_{12}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\beta_2 \tag{11}$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (9) ἡ ἔκφρασις δύναται νὰ γραφῇ:

$$\mathbf{K}_n \operatorname{grad}T = A_1{}^* F'(z_3) + \overline{A_1{}^* F'(z_3)} \tag{12}$$

ὅπου :

$$A_1{}^* = (\lambda_{12} + \mu_3\lambda_{22})\,(-\beta_2 + \mu_3\beta_1)$$

Οἱ σχέσεις (9) καὶ (12) δίδουν τὴν δυνατότητα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν καὶ τὴν θερμικὴν ροὴν σὲ ὁποιοδήποτε σημεῖον τοῦ σώματος, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ θερμικοῦ δυναμικοῦ $F(z_3)$.

Διὰ τὸ ὁμογενὲς ἀνισότροπον σῶμα εἰς κατάστασιν ἐπιπέδου παραμορφώσεως ὑπάρχει σὲ κάθε σημεῖον του ἐπίπεδον ἐλαστικῆς συμμετρίας, κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα z ποὺ συμπίπτει μὲ μίαν ἐκ τῶν κυρίων διευθύνσεων θερμοαγωγιμότητος. Ὁ γενικευμένος νόμος τοῦ Hooke διὰ τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}T \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy} + \beta_{22}T \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy} - 2\beta_{66}T \\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy} + \beta_{33}T = 0 \\
\gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} = 0 \\
\gamma_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

ἤ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{16}\tau_{xy} + a_1 T \\ \varepsilon_y &= c_{12}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{26}\tau_{xy} + a_2 T \\ \gamma_{xy} &= c_{16}\sigma_x + c_{26}\sigma_y + c_{66}\tau_{xy} - 2a_6 T \end{aligned} \tag{14}$$

ὅπου a_{ij}, c_{ij} ἐκφράζουν τοὺς συντελεστὰς ἐλαστικότητος, διὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$c_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}\, a_{j3}}{a_{33}} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 6 \tag{15a}$$

Περαιτέρω β_{ii} παριστάνουν τοὺς συντελεστάς των προσδιορίζοντας τὰς συνιστώσας τοῦ τανυστοῦ παραμορφώσεων στοιχείου τοῦ σώματος, ἐλευθέρου ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, κατὰ τὴν διάρκειαν μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας κατὰ ἕνα βαθμόν.

Διὰ τοὺς συντελεστὰς αὐτοὺς ἰσχύουν περαιτέρω αἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_i &= \beta_{ii} - \beta_{33}\, a_{i3}/a_{33} \ (i = 1, 2) \\ a_6 &= \beta_{66} + \beta_{33}\, a_{36}/2a_{33} \end{aligned} \tag{15b}$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι οἱ συντελεσταὶ c_{ij}, a_j, λ_{ij} παραμένουν ἀμετάβλητοι καὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν μεταβολῶν τῶν συνιστωσῶν τῶν τάσεων καὶ θερμοκρασίας τοῦ σώματος, αἱ σχέσεις αἱ δίδουσαι τὰς συνιστώσας τῶν τάσεων καὶ μετατοπίσεων ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ καὶ $F(z_3)$ δίδονται ὡς ἑξῆς [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^2\, \Phi(z_1) + \mu_2^2\, \Psi(z_2) + \eta_0\mu_3\, F(z_3)] \\ \sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}[\Phi(z_1) + \Psi(z_2) + \eta_0\, F(z_3)] \\ \tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}[\mu_1\, \Phi(z_1) + \mu_2\, \Psi(z_2) + \eta_0\mu_3\, F(z_3)] \\ u &= 2\,\mathrm{Re}[p_1\, \varphi(z_1) + p_2\, \psi(z_2) + p_*\psi(z_3)] \\ v &= 2\,\mathrm{Re}[q_1\, \varphi(z_1) + q_2\, \psi(z_2) + q_*\psi(z_3)] \end{aligned} \tag{16}$$

ὅπου :

$$\begin{aligned} p_j &= c_{11}\mu_j^2 + c_{12} - c_{16}\mu_j \\ \mu_j q_j &= c_{12}\mu_j^2 + c_{22} - c_{26}\mu_j \qquad j = 1, 2 \end{aligned}$$

καί :

$$\begin{aligned} p_* &= a_1 + \eta_0(c_{11}\mu_3^2 - c_{16}\mu_3 + c_{12}) \\ \mu_3 p_* &= a_2 + \eta_0(c_{11}\mu_3^2 - c_{26}\mu_3 + c_{22}) \\ \eta_0 &= -(a_1\mu_3^2 + 2a_6\mu_3 + a_2)/\Delta(\mu_3) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\Delta(\mu_3) = c_{11}(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \overline{\mu_1})(\mu_3 - \overline{\mu_2})$$

$$\Phi(z_1) = \varphi'(z_1), \quad \Psi(z_2) = \psi'(z_2), \quad F(z_3) = \psi'(z_3)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ ὑπὸ μελέτην σῶμα εἶναι ἐγκαρσίως-ἰσότροπον, ἢ γενικῶς ἰσότροπον, ὁ νόμος τοῦ Hooke διὰ τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου παραμορφώσεως ἁπλοποιεῖται ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z + \beta_{11}T \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z + \beta_{11}T \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_z}{E_z}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E}\sigma_z + \beta_{33}T = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{18}$$

καί:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + aT \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + aT \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{19}$$

καὶ αἱ σχέσεις διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τανυστοῦ τάσεων καὶ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος τῶν μετατοπίσεων ἁπλοποιοῦνται εἰς τὰς ἑξῆς σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\
&(\sigma_y - \sigma_x) + 2i\tau_{xy} = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)] \\
&2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\,\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta\int f(z)dz \\
&T(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)
\end{aligned} \tag{20}$$

Εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς οἱ συντελεσταὶ β_{11} καὶ β_{33} εἶναι ἀντιστοίχως οἱ θερμικοὶ συντελεσταὶ γραμμικῆς διαστολῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον ἰσοτροπίας (παράλληλον πρὸς τὸ καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων xOy) καὶ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἰσοτροπίας, ἐνῶ οἱ συντελεσταὶ $\varkappa$ καὶ β προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\varkappa = 1 + \frac{2E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu_z^2}{E_z}\right)$$

$$\beta = \frac{2E}{1+\nu}(\beta_{11} + \nu_z\beta_{33})$$

Ἀντιστοίχως διὰ τὸ ἰσότροπον μέσον ἔχομεν τὴν ποσότητα α ἐκφράζουσαν τὸν θερμικὸν συντελεστὴν γραμμικῆς διαστολῆς καὶ τὰς ποσότητας $\varkappa$ καὶ β διδομένας ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\varkappa = (3-4\nu), \qquad \beta = \alpha E$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου ἐντατικῆς καταστάσεως ἔχομεν ἀντιστοίχως:

α) διὰ τὸ ἐγκαρσίως - ἰσότροπον μέσον:

$$\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \beta = \frac{2E\beta_{11}}{1+\nu}$$

β) διὰ τὸ ἰσότροπον μέσον:

$$\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \beta = \frac{\alpha E}{1+\nu}$$

Ἐὰν ἐντὸς τοῦ ὀρθοτρόπου μέσου στὸ σημεῖον (x_0, y_0) ἔχωμεν πηγὴν θερμότητος ἰσχύος q_0, τὰ μιγαδικὰ δυναμικὰ στὴν περιοχὴν αὐτοῦ τοῦ σημείου λαμβάνουν τὴν μορφὴν [4]:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= a_0'(z_1-t_1)\ln(z_1-t_1) \\ \psi(z_2) &= \beta_0'(z_2-t_2)\ln(z_2-t_2) \\ \psi(z_3) &= m_0(z_3-t_3)\ln(z_3-t_3) \end{aligned} \qquad (21)$$

Ἐνταῦθα αἱ ποσότητες m_0 καὶ t_j ἐκφράζονται ὡς:

$$m_0 = -\frac{q_0}{4\pi\sqrt{k_{11}k_{22}}}$$

$$t_j = x_0 + \mu_j y_0, \qquad j = \overline{1,3}$$

καὶ οἱ συντελεσταὶ a_0', β_0' ὑπολογίζονται ἀπὸ τὰς κατωτέρω σχέσεις:

$$a_0' = \frac{m-n\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \qquad \beta_0' = -\frac{m-n\mu_1}{\mu_1-\mu_2}$$

$$\operatorname{Im}[m(\mu_1+\mu_2) - n\mu_1\mu_2 - m\lambda_0/c_{11}] = 0$$

$$\operatorname{Im}[m\mu_1\mu_2 + n\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) - m_0(a_1\mu_3 - \lambda_0(\mu_3-\mu_1-\mu_2))/c_{11}] = 0$$

ὅπου :

$$\lambda_0 = \frac{(a_1\mu_3^2 + 2a_6\mu_3 + a_2)}{(\mu_3-\overline{\mu_1})\ (\mu_3-\overline{\mu_2})}$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἐγκαρσίως ἰσοτρόπου ἢ γενικῶς ἰσοτρόπου μέσου τὰ ἀντίστοιχα μιγαδικὰ δυναμικὰ λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$\Phi(z) = A_0 \ln(z-z_0)$$

$$\Psi(z) = -\frac{A_0 \bar{z}_0}{z - z_0} \tag{22}$$

$$F(z) = m_0 \ln(z - z_0)$$

ὅπου :

$$A_0 = -\frac{\beta m_0}{1 + \varkappa}, \qquad m_0 = -\frac{q_0}{4\pi\lambda}$$

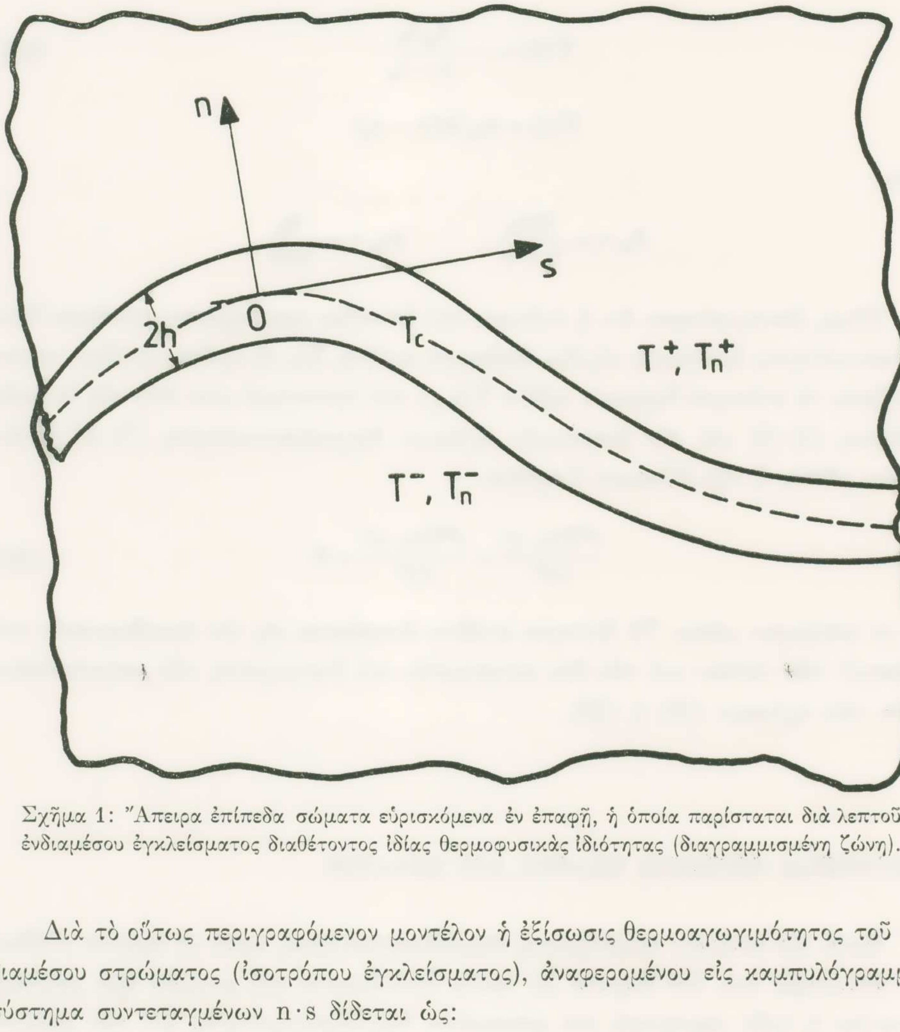
Τέλος, ἐπισημαίνομεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἐπιπέδου προβλήματος στασίμου θερμοελαστικότητος ἐκτελεῖται εἰς δύο διαδοχικὰ στάδια. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον προσδιορίζεται τὸ στάσιμον θερμικὸν πεδίον T(x,y) ποὺ ἱκανοποιεῖ μίαν ἀπὸ τὰς ὁριακὰς συνθήκας (4)-(6) καὶ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν θερμοελαστικότητος (7) δι' ἀνισότροπον μέσον, ἢ τὴν ἐξίσωσιν Laplace:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

διὰ τὸ ἰσότροπον μέσον. Τὸ δεύτερον στάδιον ἀναφέρεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων καὶ τῶν δύο συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος τῶν μετατοπίσεων βάσει τῶν σχέσεων (16) ἢ (20).

2. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΕΠΑΦΗΣ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλήματος θερμοελαστικότητος, κατὰ τὸ πρῶτον στάδιον τῆς ἐπιλύσεώς του, διὰ σώματα μὲ λεπτὰ ἐγκλείσματα καὶ ρωγμὰς ἔχει μεγάλην σημασίαν ἡ ὀρθὴ περιγραφὴ τοῦ φαινομένου θερμοαγωγιμότητος ἐπὶ τῶν χειλέων τῆς ρωγμῆς καὶ τῶν συνόρων ἐπαφῆς τοῦ λεπτοῦ ἐγκλείσματος μὲ τὸ σῶμα, δηλαδὴ ἡ ὀρθὴ ἐπιλογὴ τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ ὑπολογιστικοῦ μοντέλου θερμικῆς ἐπαφῆς σωμάτων μὲ διαφόρους ἐλαστικὰς καὶ θερμικὰς σταθεράς. Διὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ μοντέλου ποὺ περιγράφει τὴν συνθήκην θερμικῆς ἐπαφῆς, ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἐφαπτομένων σωμάτων χωρίζονται μὲ λεπτὸν ἐνδιάμεσον στρῶμα (ἔγκλεισμα) διαθέτον ἰδίας θερμοφυσικὰς παραμέτρους (Σχ. 1). Ἐὰν αἱ παράμετροι αὐταὶ θεωροῦνται σταθεραὶ καὶ τὸ πάχος τοῦ ἐνδιαμέσου στρώματος (ἐγκλείσματος) τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, θὰ προκύψῃ φυσικὴ ἐπιφάνεια διαχωρισμοῦ τῶν σωμάτων καὶ αἱ ἀντίστοιχοι συνοριακαὶ συνθῆκαι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αἱ ἀνταποκρινόμεναι στὴν πραγματικὴν κατάστασιν ἐπαφῆς τῶν σωμάτων.



Σχῆμα 1: Ἄπειρα ἐπίπεδα σώματα εὑρισκόμενα ἐν ἐπαφῇ, ἡ ὁποία παρίσταται διὰ λεπτοῦ ἐνδιαμέσου ἐγκλείσματος διαθέτοντος ἰδίας θερμοφυσικὰς ἰδιότητας (διαγραμμισμένη ζώνη).

Διὰ τὸ οὕτως περιγραφόμενον μοντέλον ἡ ἐξίσωσις θερμοαγωγιμότητος τοῦ ἐνδιαμέσου στρώματος (ἰσοτρόπου ἐγκλείσματος), ἀναφερομένου εἰς καμπυλόγραμμον σύστημα συντεταγμένων $n \cdot s$ δίδεται ὡς:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial s^2} = 0 \tag{24}$$

Εἰς τὴν διαχωριστικὴν ἐπιφάνειαν $n = \pm h$ τοῦ ἰσοτρόπου ἐγκλείσματος καὶ ἀνισοτρόπου μέσου πληροῦνται αἱ συνθῆκαι ἰδανικῆς θερμικῆς ἐπαφῆς:

$$T_c(s, \pm h) = T^{\pm} \tag{25}$$

$$-\lambda \frac{\partial T_c}{\partial n}\bigg|_{n = \pm h} = T_n{}^{\pm} \tag{26}$$

ὅπου:

$$T_n{}^{\pm} = -(\mathbf{K}_n \cdot \mathrm{grad} T)^{\pm}$$

ἔνθα $T^{\pm}$, $T_n^{\pm}$ ἐκφράζουν τὰς ὁριακὰς τιμὰς θερμοκρασίας καὶ θερμικῆς ροῆς ἐπὶ τοῦ συνόρου $n = \pm h$ τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου.

Ἐν συνεχείᾳ, εἰσάγομεν τὰ ὁλοκληρώματα:

$$T_c^* = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} T_c\, dn \tag{27}$$

$$T_c^{**} = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} T_c\, n\, dn \tag{28}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (24) ἐπὶ 1/2h καὶ ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς n ἀπὸ (-h, h), λαμβάνοντες ἐπίσης ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς σχέσεις (25), (26), λαμβάνομεν τὴν ἀκόλουθον σχέσιν:

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^*}{\partial s^2} + (T_n^+ - T_n^-) = 0 \tag{29}$$

ὅπου:

$$\lambda_s = 2\lambda h$$

(λ ἐκφράζουν τοὺς συντελεστὰς θερμοαγωγιμότητος τοῦ ἐγκλείσματος).

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (24) ἐπὶ $3n/2h^2$ καὶ ὁλοκληροῦντες ὡς πρὸς n ἀπὸ (-h, h), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^{**}}{\partial s^2} + 3\lambda(T_n^+ + T_n^-) - 6\lambda_n(T^+ - T^-) = 0 \tag{30}$$

ὅπου:

$$\lambda_n = \lambda/2h$$

Διὰ τὴν ἔκφρασιν τῶν ποσοστήτων T_c^*, T_c^{**} συναρτήσει τῶν ὁριακῶν τιμῶν θερμοκρασίας $T^{\pm}$ τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου, χρησιμοποιοῦμεν τὴν τελεστικὴν ἔκφρασιν τῆς λύσεως (24), γράφοντες αὐτὴν ὡς ἀκολούθως:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + p^2 T_c = 0 \qquad \left(p^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \tag{31}$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν συνθήκην (25), ἡ ἔκφρασις (31) δίδει τὴν παρακάτω λύσιν:

$$T_c = \frac{(T^+ + T^-)}{2\cos ph}\cos pn + \frac{(T^+ + T^-)}{2\sin ph}\sin pn \tag{32}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (32) στὶς (27) καὶ (28) λαμβάνομεν:

$$T_c^* = \frac{T^+ + T^-}{2ph} \, \mathrm{tgph} \tag{33}$$

$$T_c^{**} = \frac{3}{2p^2h} (T^+ + T^-) \, (1 - ph\mathrm{ctgph})$$

Εἰσάγοντες τώρα τὶς (33) καὶ στὶς (29) καὶ (30), διὰ $h \to 0$, λαμβάνομεν τὰς κατωτέρω σχέσεις:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ + T^-) + 2 [(\mathbf{K}_n \, \mathrm{grad}T)^+ - (\mathbf{K}_n \, \mathrm{grad}T)^-] = 0 \tag{34}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ - T^-) + 6 [(\mathbf{K}_n \, \mathrm{grad}T)^+ + (\mathbf{K}_n \, \mathrm{grad}T)^-] - 12\lambda_n (T^+ - T^-) = 0$$

Αἱ σχέσεις αὐταὶ παριστάνουν τὰς συνθήκας μ ὴ ἰ δ α ν ι κ ῆ ς θ ε ρ μ ι κ ῆ ς ἐ π α φ ῆ ς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου.

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἰσοτρόπου μέσου ἡ σχέσις (34) μετατρέπεται εἰς τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ + T^-) + 2\lambda^* \left[\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^- \right] = 0 \tag{35}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^+ - T^-) + 6\lambda^* \left[\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^- \right] - 12\lambda_n (T^+ - T^-) = 0$$

ὅπου λ^* παριστᾶ τὸν συντελεστὴν θερμοαγωγιμότητος τοῦ ἰσοτρόπου μέσου.

Ὅταν εἰς τὴν θέσιν τοῦ λεπτοῦ ἐγκλείσματος ἔχωμεν ρωγμήν, αἱ τιμαὶ λ_s καὶ λ_n χαρακτηρίζουν τὴν θερμοαγωγιμότητά της πρὸς τὴν διαμήκη καὶ ἐγκαρσίαν κατεύθυνσιν ἀντιστοίχως.

Ὡς πρὸς τὴν θερμοαγωγιμότητα διακρίνονται τρεῖς κατηγορίαι ρωγμῶν:

α) Διὰ $\lambda_s \neq 0$, $\lambda_n \neq 0$ ἔχομεν θερμοαγώγιμον ρωγμήν.

β) Διὰ $\lambda_s = 0$, $\lambda_n \neq 0$ ἔχομεν διαμήκη θερμομονωτικὴν ρωγμὴν καὶ

γ) διὰ $\lambda_s = \lambda_n = 0$ λαμβάνομεν θερμομονωτικὴν ρωγμήν.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος θερμοαγωγιμότητος ρηγματωμένων σωμάτων μὲ ἐγκλείσματα, τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν $T(x, y)$ ἐκφράζομεν ὡς:

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T_*(x, y) \tag{36}$$

ὅπου:

$T_0(x, y)$ παριστᾷ τὸ ἐπιβαλλόμενον θερμικὸν πεδίον εἰς τὸ συνεχόμενον μέσον καὶ θεωρεῖται γνωστόν, καὶ

$T_*(x, y)$ παριστᾷ τὸ διαταρασσόμενον θερμικὸν πεδίον τὸ ἐμφανιζόμενον λόγῳ ὑπάρξεως ἀτελειῶν εἰς τὸ σῶμα.

Ἀναλόγως τῶν συνθηκῶν θερμικῆς ἐπαφῆς ποὺ ἐπιβάλλονται ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος εἰς τὰ σύνορα τῆς ρωγμῆς καὶ τοῦ λεπτοῦ ἐγκλείσματος, ἔχομεν μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς σχέσεις:

$$T_*^{\pm} = f^{\pm}(t) - T_0(t) \tag{37}$$

$$(\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_*)^{\pm} = Q^{\pm} - (\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_0) \tag{38}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^+ + T_*^-) + 2[(\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_*)^+ - (\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T^*)^-] = -2\lambda_s \frac{\partial^2 T_0}{\partial s^2}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^+ - T_*^-) + 6[(\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_*)^+ + (\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_*)^-] - 12\lambda_n(T_*^+ - T_*^-) =$$
$$= -12(\mathbf{K}_n \operatorname{grad} T_0) \tag{39}$$

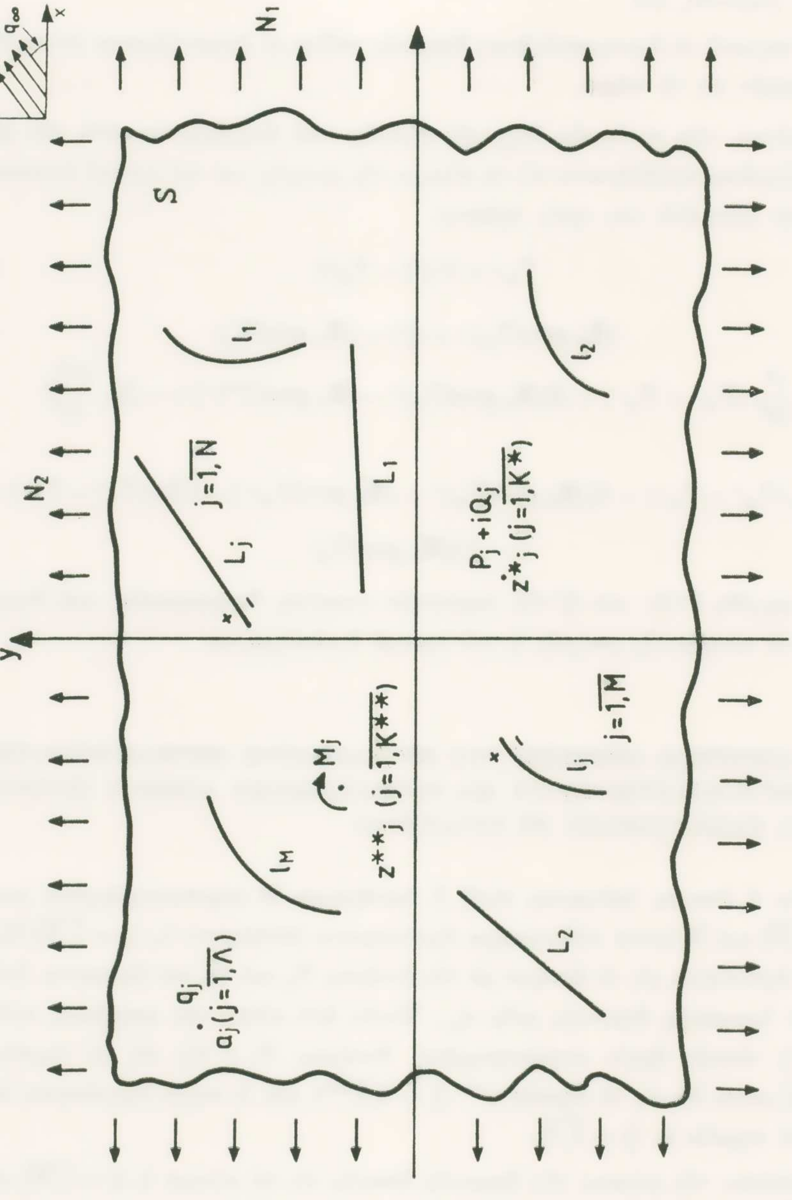
ὅπου τὰ μεγέθη $f^{\pm}(t)$ καὶ $Q^{\pm}(t)$ παριστοῦν γνωστὰς θερμοκρασίας καὶ θερμικὰς ροὰς εἰς τὰ σύνορα τῆς ρωγμῆς ἢ τοῦ λεπτοῦ ἐγκλείσματος.

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΟΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΔΙΑ ΡΩΓΜΑΤΩΜΕΝΗΝ ΑΠΕΙΡΟΝ ΙΣΟΤΡΟΠΟΝ ΠΛΑΚΑ ΕΝΙΣΧΥΟΜΕΝΗΝ ΜΕ ΕΝΤΑΤΗΡΑΣ

Ἔστω ἡ ἄπειρος ἰσότροπος πλὰξ S περιέχουσα M καμπυλογράμμους ρωγμὰς l_j $(j = \overline{1,M})$ καὶ N λεπτὰ εὐθύγραμμα ἐγκλείσματα (stringers) L_j $(j = \overline{1,N})$ (Σχ. 2). Ἡ πλὰξ ἐφελκύεται εἰς τὸ ἄπειρον μὲ τὰς ἐντάσεις N_1 καὶ N_2 καὶ βρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὁμογενοῦς θερμικῆς ροῆς q_∞. Ἐκτὸς ἀπὸ αὐτὰς τὰς φορτίσεις, στὸ ἐπίπεδον τῆς πλακὸς δροῦν συγκεντρωμέναι δυνάμεις $P_j + iQ_j$ εἰς τὰ σημεῖα z_j^* $(j = \overline{1,K})$ ροπαὶ M_j εἰς τὰ σημεῖα z_j^{**} $(j = \overline{1,K^{**}})$ καὶ Λ πηγαὶ θερμότητος ἰσχύος q_j, εἰς τὰ σημεῖα a_j $(j = \overline{1,\Lambda})$.

Ἀναλόγως τῆς φύσεως τῆς θερμικῆς ἐπαφῆς εἰς τὰ σύνορα l_j $(j = \overline{1,M})$ καὶ L_j $(j = \overline{1,N})$ διαμορφώνομεν τὰς κατωτέρω γνωστὰς ἀπὸ τὴν προηγουμένην παράγραφον θερμικὰς ὁριακὰς συνθήκας:

$$T_*^{\pm} = f_j^{\pm} - T_0(t) \qquad j = \overline{1, n_1} \tag{40}$$



Σχῆμα 2: Ἄπειρος ἰσότροπος λεπτὴ πλὰξ περιέχουσα Μ καμπυλογράμμους ρωγμὰς καὶ Ν λεπτὰ εὐθύγραμμα ἐγκλείσματα (ἐντατῆρας) ἐφελκυομένη εἰς τὸ ἄπειρον ὑπὸ ὀρθῶν τάσεων N_1 καὶ N_2.

$$\lambda\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{+}=Q_j^{\pm}(t)-\lambda\frac{\partial T_0}{\partial n}\qquad j=(\overline{n_1+1,\ n_1+n_2})\tag{41}$$

$$\lambda_s\frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^{+}+T_*)+2\lambda\left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{+}-\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)\right]=2\lambda_s\frac{\partial^2 T_0}{\partial s^2}\tag{42}$$

$$\lambda_s\frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^{+}-T_*)+6\lambda\left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{+}+\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)\right]-12\lambda_n\,(T_*^{+}-(T_*)=-12\lambda\frac{\partial T_0}{\partial n},$$

$$j=(\overline{n_1+n_2+1,\ N+M})$$

Αἱ σχέσεις αὐταὶ ἀποτελοῦν τὴν βάσιν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος θερμοαγωγιμότητος καὶ προσδιορισμοῦ τοῦ θερμικοῦ πεδίου τῆς πλακός.

Τὸ θερμικὸν δυναμικὸν $F(z)$ $[T(x,y) = \mathrm{Re}F(z)]$ τοῦ στασίμου θερμικοῦ πεδίου $T(x,y)$ παρίσταται ὡς:

$$F(z)=\frac{q_\infty}{2}z\,e^{-i\beta_0}-\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\ln(z-a_j)+F_*(z)\tag{43}$$

ὅπου :

$$F_*(z)=\sum_{j=1}^{N+M}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_j(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j^*}\varphi_{2j}(\tau)\,e^{\,i\alpha_j(\tau)}\ln(\tau-z)\,d\tau\right]\tag{44}$$

παριστᾷ τὸ θερμικὸν δυναμικόν, τὸ ἐκφράζον τὸ διαταρασσόμενον θερμικὸν πεδίον, μὲ $\varphi_{1j}(t)$, $\varphi_{2j}(t)$ τὰς πυκνότητας ἐπὶ τῶν συνόρων τῶν ρωγμῶν καὶ τῶν ἐνισχύσεων.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς σχέσεις (40)-(42) τὰς ὁριακὰς τιμὰς τοῦ θερμικοῦ δυναμικοῦ (43) λαμβάνομεν τὸ σύστημα ὁλοκληρο-διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{1k}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\varphi_{1k}e^{\,i\alpha_k(\tau)}\ln(\tau-t)\,d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1,\,j\neq k}^{N+M}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\varphi_{2j}(\tau)\,e^{\,ia_j(\tau)}\ln(\tau-t)\,d\tau\right]\right\}=\tag{45}$$

$$=f_{2k}(t)-\mathrm{Re}\left[\frac{q_\infty}{2}t\,e^{-i\beta_0}+\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\ln(t-a_j)\right]$$

$$t\in L_k^*\qquad k=(\overline{1,n_1})$$

ὅπου :

$$\varphi_{1k}(t)=f_k^+(t)-f_k^-(t)$$

$$f_{2k}(t)=f_k^+(t)+f_k^-(t)$$

$$\lambda e^{ia_k(t)}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{1k}'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{2k}(\tau)\,e^{-ia_k(\tau)}}{\tau-t}d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{1j}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{2j}(\tau)\,e^{-ia_j(\tau)}}{\tau-t}d\tau\right]\right\}= \tag{46}$$

$$=Q_{2k}(t)+\lambda\,\mathrm{Re}\left[e^{ia_k(t)}\left(\frac{q_\infty}{2}e^{-i\beta_0}+\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\frac{1}{t-a_j}\right)\right]$$

$$t\epsilon L_k^* \qquad k=\overline{(n_1+1,\ n_1+n_2)}$$

ὅπου :

$$\varphi_{2k}(t)=-\frac{1}{\lambda}\left[Q_k^+(t)-Q_k^-(t)-i\,e^{ia_k(t)}\varphi_{1k}(t)\right]$$

$$Q_{2k}(t)=-\frac{1}{\lambda}\left[Q_k^+(t)+Q_k^-(t)\right]$$

$$\mathrm{Re}\{\lambda_s e^{2ia_k(t)}\{-ia_k'(t)\left(\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{1k}'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{1j}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{1k}''(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\frac{2}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{1j}(\tau)}{(\tau-t)^3}d\tau\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{L_k^*}\frac{a_k'(\tau)-a_k'(t)}{\tau-t}\varphi_{2k}(\tau)\,e^{-ia_k(\tau)}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{2k}'(\tau)}{\tau-t}e^{-ia_k(\tau)}d\tau+ \tag{47}$$

$$+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\left[\frac{a_k'(t)}{\pi}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{2j}(\tau)}{\tau-t}e^{-ia_j(\tau)}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}\frac{\varphi_{2j}(\tau)}{(\tau-t)^2}e^{-ia_j(\tau)}d\tau\right]\Bigg\}+$$

$$\left.+2\lambda\varphi_{ik}'(t)e^{ia_k(t)}\right\}=-2\lambda_s\mathrm{Re}\left\{e^{2ia_k(t)}\left[\begin{array}{l}ia_k'(t)\left(\dfrac{q_\infty}{2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\frac{1}{t-a_j}\right)-\\ \qquad-\displaystyle\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\frac{1}{(t-a_j)^2}\end{array}\right]\right\}$$

$$\operatorname{Re}\{-\lambda_s e^{2i a_k(t)}\left[i a_k'(t)\,\varphi_{1k}'(t)+\varphi_{1k}''(t)-\varphi_{2k}'(t)\right]+$$

$$+6\lambda\, e^{i a_k(t)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{L_k^*}\frac{\varphi'_{1k}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_k^*}\frac{\varphi_{2k}(\tau)}{\tau-t}e^{-ia_k(\tau)}d\tau+\\ +\displaystyle\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j^*}\frac{\varphi_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N+M}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j^*}\frac{\varphi_{2j}(\tau)}{\tau-t}e^{-ia_j(\tau)}d\tau\end{array}\right]- \qquad (48)$$

$$-12\lambda_n\,\varphi_{1k}(t)\}=-12\lambda\operatorname{Re}\left[e^{ia_k(t)}\left(\frac{q_\infty}{2}e^{-i\beta_0}+\sum_{j=1}^{\Lambda}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\frac{1}{t-a_j}\right)\right],$$

$$t\in L_k^* \qquad k=(\overline{n_1+n_2+1,\,N+M})$$

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς θερμικὰς ὁριακὰς συνθήκας (40)-(42) ἐπὶ τῶν συνόρων τῶν ρωγμῶν καὶ τῶν ἐνισχύσεων δίδονται ἐπίσης αἱ ἀκόλουθοι μηχανικαὶ ὁριακαὶ συνθῆκαι [5, 6, 7]:

α) Ἐπὶ τῆς l_j $(j=\overline{1,M})$, αἱ κάθετοι καὶ διατμητικαὶ ἐντάσεις:

$$(\sigma_n^{\pm}-i\sigma_t^{\pm})\,|\,l_j \qquad (49)$$

καὶ

β) ἐπὶ τοῦ συνόρου L_j, $(j=\overline{1,N})$ ἱκανοποιοῦνται αἱ σχέσεις:

$$\sigma_n^+=\sigma_n^-, \qquad \varepsilon_0=\frac{du_t^+}{dt}=\frac{du_t^-}{dt}, \quad u_n^++iu_t^+=u_n^-+iu_t^- \qquad (50)$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας προκύπτει ὅτι:

$$ih\left[(\sigma_n^+-\sigma_n^-)-i(\sigma_t^+-\sigma_t^-)\right]+\frac{E^{(j)}S^{(j)}}{E}\frac{d}{dt}\left[(\sigma_n^++\sigma_s^+)-(1+\nu)\,\sigma_n^+\right]=0 \qquad (51)$$

ὅπου $E^{(j)}$, $S^{(j)}$ ἐκφράζουν τὰ μέτρα ἐλαστικότητος καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῆς διατομῆς τῆς ἐνισχύσεως L_j, E παριστᾶ τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τῆς πλακὸς καὶ $(\sigma_n, \sigma_t, \sigma_s)$ ἐκφράζουν τὰς συνιστώσας τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων.

Διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (49)-(51) τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος τὰ μιγαδικὰ δυναμικὰ Φ(z) καὶ Ψ(z) ὁρίζονται ὡς:

$$\Phi_0(z) = \Gamma' - \sum_{j=1}^{K^*} \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{z - z_j^*} + \frac{\beta}{1+\varkappa} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln (z - a_j) + \Phi(z) \tag{52}$$

$$\Psi_0(z) = \Gamma' + \sum_{j=1}^{K^*} \left[\frac{\varkappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{z - z_j} - \frac{\bar{z}_j^* (P_j + iQ_j)}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{(z - z_j^*)^2} \right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{K^{**}} \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(z - z_j^{**})^2} - \frac{\beta}{1-\varkappa} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \frac{\overline{a_j}}{z - a_j} + \Psi(z) \tag{53}$$

ὅπου :

$$\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \qquad \Gamma = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)$$

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{G_{1j}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{G_{2j}(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{54}$$

μὲ $G_{1j}(t)$, $G_{2j}(t)$ τὰς πυκνότητας ἐπὶ τῶν L_j καὶ I_j ἀντιστοίχως.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ὁριακὰς συνθήκας (49)-(50) καὶ τοὺς τύπους (20), εὑρίσκομεν τὴν κατωτέρω ὁλοκληρωτικὴν ἔκφρασιν τῆς $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\bar{\tau} G_{1j}(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{q_{1j}(\tau)}{\tau - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\bar{\tau} G_{2j}(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right] + \tag{55}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\beta}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\varphi_{1j}(\tau)}{\tau - z} d\bar{\tau}$$

ὅπου :

$$q_{1j}(\tau) = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-) \qquad \tau \in I_j \qquad j = (\overline{1, M}) \tag{56}$$

Αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι (49) καὶ (51), βάσει τῶν τύπων (20), καὶ τῶν τύπων τοῦ Plemelj διὰ τὰς ὁλοκληρωτικὰς ἐκφράσεις τῶν $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ καὶ $F_*(z)$ δίδουν τὸ κατωτέρω σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{I_k}\frac{G_{2k}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{I_k}\frac{\overline{G_{2k}(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\overline{d\tau}\,\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{I_k}\frac{\overline{G_{2k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{I_k}\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}G_{2k}(\tau)d\tau\right]+$$

$$+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{M}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{G_{2j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\overline{d\tau}-\frac{\overline{dt}}{dt}\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}G_{2j}(\tau)d\tau\right]\right\}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{G_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\overline{d\tau}-\frac{\overline{dt}}{dt}\times\right.$$

$$\left.\left[-\frac{\varkappa}{\pi i}\int_{I_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}G_{1j}(\tau)d\tau\right]\right\}=$$

$$=A_{1k}(t,\bar t)-\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{I_k}\frac{q_{1k}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{M}\frac{1}{\pi i}\int_{I_j}\frac{q_{1j}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}\right],\quad t\epsilon I_k\quad k=\overline{1,M}\qquad(57)$$

$$ih\left[(\varkappa+1)\,G_{1k}(t)+\beta\varphi_{1k}(t)\right]+\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Re}\left\{\frac{3-\nu-\varkappa(1+\nu)}{2}G_{1k}(t)-\right.\right.$$

$$-\frac{\beta(1+\nu)}{2}\varphi_{1k}(t)+\frac{1-\nu}{2}\int_{L_k}\frac{G_{1k}(\tau)}{\tau-t}d\tau-(1+\nu)\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{G_{1k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}G_{1k}(\tau)d\tau+\frac{\beta}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\varphi_{1k}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}\right]+$$

$$+\sum_{j=1_{j\neq k}}^{N}\left[\frac{1-\nu}{\pi i}\int_{L_j}\frac{G_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-(1+\nu)\frac{\overline{dt}}{dt}\left(\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\right.\right.$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{(\tau - t)^2} G_{1j}(\tau) d\tau + \frac{\beta}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\varphi_{1j}(\tau)}{\tau - t} \overline{d\tau} \Bigg) \Bigg] + \qquad (58)$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \Bigg[\frac{1-\nu}{\pi i} \int_{l_j} \frac{G_{2j}(\tau)}{\tau - t} d\tau + (1+\nu) \frac{\overline{dt}}{dt} \Bigg(\frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau - t} \overline{d\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{(\tau - t)^2} G_{2j}(\tau) d\tau \Bigg) \Bigg] \Bigg] \Bigg\} = A_{2k}(t, \overline{t}), \quad t \in L_k \quad k = \overline{1, N}$$

ὅπου :

$$A_{1k}(t, \overline{t}) = (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-) - 2 \left(\Gamma + \overline{\Gamma} + \frac{\overline{dt}}{dt} \Gamma' \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{K^*} \Bigg\{ 2\mathrm{Re} \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{t - z_j^*} - \frac{\overline{dt}}{dt} \Bigg[\frac{\varkappa(P_j + iQ_j)}{\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\varkappa)} \frac{\overline{t} - \overline{z_j^*}}{(t - z_j^*)^2} \Bigg] \Bigg\} -$$

$$- i \sum_{j=1}^{K^{**}} \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{M_j}{\pi} \frac{1}{(t - z_j^{**})^2} - \frac{\beta}{1+\varkappa} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \Bigg[\mathrm{Re} \ln(t - a_j) + \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{\overline{t} - \overline{a_j}}{t - a_j} \Bigg],$$

$$A_{2k}(t, \overline{t}) = \frac{E^{(k)} S^{(k)}}{E} \frac{d}{dt} \mathrm{Re} \Bigg\{ \frac{\overline{dt}}{dt} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\pi i} \int_{l_j} \frac{q_{1j}(\tau)}{\tau - t} \overline{d\tau} + \Bigg\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{K^*} (1-\nu) \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{t - z_j^*} - \frac{\overline{dt}}{dt} \Bigg(\frac{\varkappa(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{\overline{t} - \overline{z_j^*}}{(t - z_j^*)^2} \Bigg) -$$

$$- i \sum_{j=1}^{K^*} \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{M_j}{2\pi} \frac{1}{(t - z_j^{**})^2} - \frac{\beta}{1+\varkappa} \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \Bigg[2(1-\nu) \ln(t - a_j) + \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{\overline{t} - \overline{a_j}}{t - a_j} \Bigg]$$

Τὸ σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (57)-(58) πρέπει νὰ συμπληρωθῇ μὲ τὰς συνθήκας μονοσημάντων μετατοπίσεων ἐπὶ τῶν ρωγμῶν:

$$\int_{l_k} G_{2k}(t) dt = \frac{1}{1+\varkappa} \int_{l_k} \overline{q_{1k}(t)}\, dt - \frac{\beta}{1+\varkappa} \int_{l_k} \varphi_{1k}(t) dt, \quad t \in l_k \quad k = (\overline{1, M}) \qquad (59)$$

Αἱ ἐκφράσεις τῶν πυκνοτήτων $G_{1\varkappa}(t)$, $G_{2\varkappa}(t)$ ἐπὶ τῶν ἐνισχύσεων καὶ τῶν ρωγμῶν λαμβάνουν ἀντιστοίχως τὰς κατωτέρω μορφάς:

$$G_{1k}(t)=\frac{i(\sigma_t^+-\sigma_t^-)}{1+\varkappa}-\frac{\beta}{1+\varkappa}\varphi_{1k}(t), \qquad t\epsilon L_k \quad k=(\overline{1, N})$$

$$G_{2k}(t)=\frac{q_{1k}(t)}{1+\varkappa}+g_k(t)-\frac{\beta}{1+\varkappa}\varphi_{1k}(t), \qquad t\epsilon l_k \quad k=(\overline{1, M})$$

ὅπου :

$$g_k(t)=\frac{2\mu}{1+\varkappa}\frac{d}{dt}[(u^+(t)-u^-(t))+i(v^+(t)-v^-(t))]$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (57)-(59) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς ὁλοκληρο-διαφορικὰς ἐξισώσεις (45)-(48) δίδει τὴν δυνατότητα περιγραφῆς τοῦ ἐντατικοῦ καὶ τοῦ θερμικοῦ πεδίου τῆς ἐξεταζομένης ρηγματωμένης τμηματικῶς μὴ ὁμογενοῦς ἀπείρου ἰσοτρόπου πλακός.

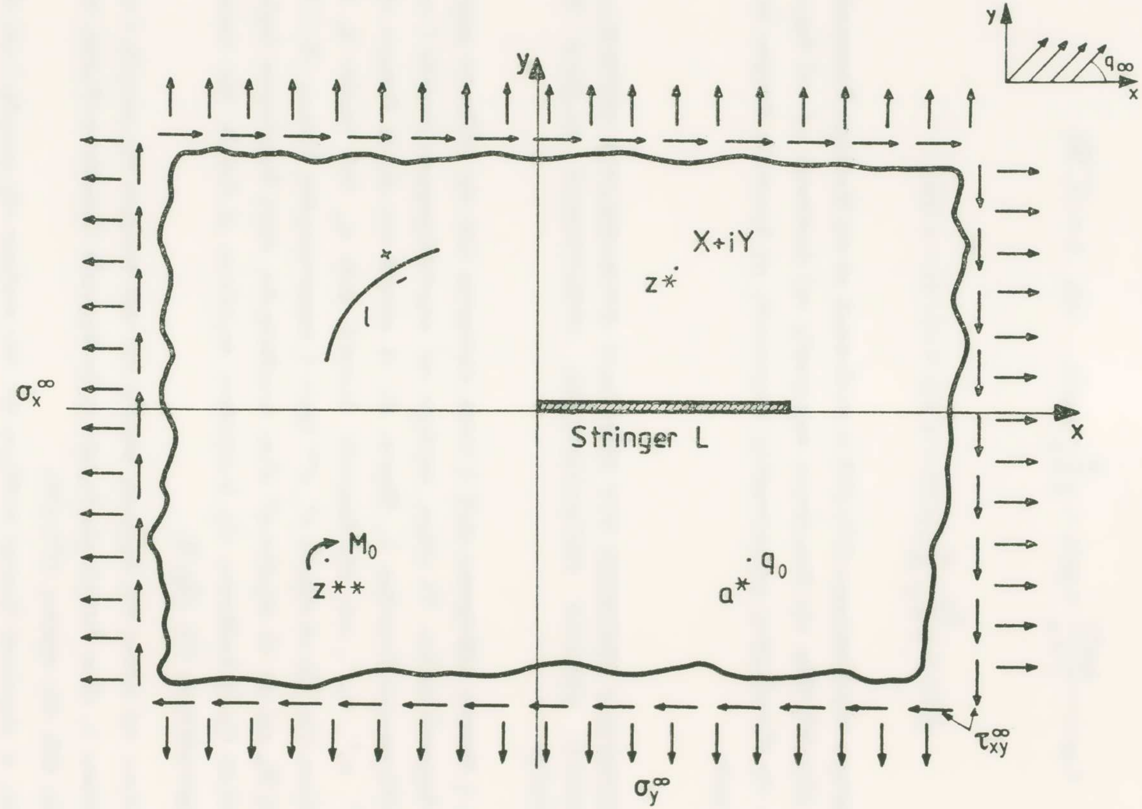
4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΟΡΘΟΤΡΟΠΟΥ ΠΛΑΚΟΣ ΜΕ ΕΝΙΣΧΥΣΕΙΣ

Ἔστω ἡ ἄπειρος ὀρθότροπος πλὰξ ἡ ὁποία εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μηχανικοῦ καὶ θερμικοῦ πεδίου. Τὸ σῶμα, περιέχον καὶ καμπυλόγραμμον ρωγμὴν l καθὼς καὶ εὐθύγραμμον ἐντατῆρα L, δέχεται εἰς τὰ σύνορά του εἰς τὸ ἄπειρον τὰς τάσεις σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞, καὶ τὴν θερμικὴν ὁμογενῆ ροὴν q_∞ ὑπὸ γωνίαν β_0 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox. Εἰς τὰ σημεῖα z*, z** δροῦν ἡ συγκεντρωμένη δύναμις (X+iY) καὶ ἡ ροπὴ M_0 καὶ εἰς τὸ σημεῖον a* εἶναι τοποθετημένη πηγὴ θερμότητος ἰσχύος q_0. Θεωροῦμεν ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς ἐνισχύσεως συμπίπτει μὲ ἕνα ἐκ τῶν κυρίων ἀξόνων ἐλαστικότητος Ox (Σχ.3).

Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς θερμικῆς ἐπαφῆς ἐπὶ τῶν συνόρων τῆς ρωγμῆς l καὶ τῆς ἐνισχύσεως L, εἶναι δυνατὴ μία ἐκ τῶν τριῶν θερμικῶν ὁριακῶν συνθηκῶν, ποὺ ἐκφράζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις (37)-(39).

Ἐπίσης, αἱ μηχανικαὶ ὁριακαὶ συνθῆκαι ἐπὶ τῶν συνόρων τῆς ρωγμῆς l καὶ τῆς ἐνισχύσεως L εἶναι ἀνάλογοι τοῦ ἰσοτρόπου μέσου (49) καὶ (50), ἡ δὲ σχέσις (51), ὅταν τὸ σῶμα εἶναι ὀρθότροπον, λαμβάνει τὴν μορφὴν [8]:

$$ih[(\sigma_n^+-i\sigma_t^+)-(\sigma_n^--i\sigma_t^-)]+E_0S_0\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{E_x}\sigma_s^+-\frac{v_y}{E_y}\sigma_n^+\right]=0 \qquad (60)$$



Σχῆμα 3: Ἄπειρος ὀρθότροπος λεπτὴ πλὰξ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μηχανικοῦ καὶ θερμικοῦ πεδίου, περιέχουσα καμπυλόγραμμον ρωγμὴν καὶ εὐθύγραμμον ἐντατῆρα ὑποβαλλομένη εἰς τὰς συνιστώσας τῶν τάσεων σx^{∞}, σy^{∞}, καὶ τxy^{∞}, καθὼς καὶ θερμικὴν ροπὴν q_{∞} ὑπὸ γωνίαν β_0 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox.

Τὰ μιγαδικὰ δυναμικὰ $\Phi_0(z_1)$, $\Psi_0(z_2)$, καὶ $F(z_3)$, διὰ τῶν ὁποίων θὰ περιγραφοῦν οἱ μηχανικαὶ ὁριακαὶ συνθῆκαι ἐπὶ τῶν l καὶ L, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν σχέσεων (21), δίδονται ὑπὸ τὴν μορφὴν [8]:

$$\Phi_0(z_1)=\Gamma+\frac{C_{11}X+C_{12}Y}{z_1-\xi_1^*}-i\frac{M_0}{8\pi}\frac{1}{(z_1-\xi_1^{**})^2}+a_0'[1+\ln(z_1-a_1^*)]+\Phi(z_1) \tag{61}$$

$$\Psi_0(z_2)=\Gamma'+\frac{C_{21}X-C_{22}Y}{z_2-\xi_2^*}-i\frac{M_0}{8\pi}\frac{1}{(z_2-\xi_2^{**})^2}+b_0'[1+\ln(z_2-a_2^*)]+\Psi(z_2) \tag{62}$$

$$F(z_3)=m_0[1+\ln(z_3-a_3^*)]+\frac{(\cos\beta_0+\overline{\mu_3}\sin\beta_0)z_3}{2\sqrt{k_{11}k_{22}}\,\mathrm{Im}\,\mu_3}q^\infty+F_*(z_3) \tag{63}$$

ὅπου αἱ σταθεραὶ C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, Γ καὶ Γ' προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$C_{11}=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_2+\overline{\mu_2}+\overline{\mu_1}+\mu_2\overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}\frac{\nu_x E_y}{E_x}}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\overline{\mu_1})\left(1-\frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1}\right)}$$

$$C_{12}=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_2\overline{\mu_2}+\overline{\mu_1}\mu_2+\overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}+\nu_x}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\overline{\mu_1})\left(1-\frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1}\right)}$$

$$C_{21}=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_1+\overline{\mu_1}+\overline{\mu_2}+\mu_1\overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}\frac{\nu_x E_y}{E_x}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\overline{\mu_2})\left(1-\frac{\overline{\mu_1}}{\mu_2}\right)}$$

$$C_{22}=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_1\overline{\mu_1}+\overline{\mu_2}\mu_1+\overline{\mu_2}\,\overline{\mu_1}+\nu_x}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\overline{\mu_2})\left(1-\frac{\overline{\mu_1}}{\mu_2}\right)}$$

$$\Gamma-\overline{\Gamma}=0$$

$$\mu_1^2\Gamma+\overline{\mu_1^2}\,\overline{\Gamma}+\mu_2^2\Gamma'+\overline{\mu_2^2}\,\overline{\Gamma'}=\sigma_x^\infty$$

$$\Gamma + \overline{\Gamma} + \Gamma' + \overline{\Gamma'} = \sigma_y^\infty$$

$$\mu_1 \Gamma + \overline{\mu_1 \Gamma} + \mu_2 \Gamma' + \overline{\mu_2}\, \overline{\Gamma'} = -\tau_{xy}^\infty$$

καί :

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1 \tag{64}$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{y(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 \tag{65}$$

$$F_*(z_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} \frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_3 - z_3} d\tau_3 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} \mu_{12}(\tau_3)\, e^{-ia_1(\tau_3)} \ln(\tau_3 - z_3)\, d\tau_3 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_3} \frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3 - z_3} d\tau_3 + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_3} \mu_{22}(\tau_3)\, e^{-ia_2(\tau_3)} \ln(\tau_3 - z_3)\, d\tau_3 \tag{66}$$

Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς θερμικῆς ἐπαφῆς ἐπὶ τῶν l καὶ L, ἐπιλέγομεν τὴν ἀντίστοιχον συνθήκην ἀπὸ τὰς σχέσεις (37)-(39), ὅπου ἀντικαθιστῶμεν τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῆς F(z). Ἐκ τῆς διαδικασίας αὐτῆς προκύπτει σύστημα ὁλόκληρο-διαφορικῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς $\mu_{11}(t)$, $\mu_{12}(t)$, $\mu_{21}(t)$, $\mu_{22}(t)$, βάσει τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ θερμικοῦ πεδίου T(x,y) τῆς ρηγματωμένης ἀνισοτρόπου πλακὸς ποὺ ἐνισχύεται μὲ ἐνισχύσεις. Τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ σύστημα (45)-(48) τοῦ ἰσοτρόπου μέσου.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς μηχανικὰς ὁριακὰς συνθήκας (49) καὶ (60) ἐπὶ τῶν l καὶ L ἀντιστοίχως, βάσει τῶν τύπων (16) καὶ τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν $\Phi_0(z_1)$, $\Psi_0(z_2)$, $F_0(z_3)$ μετὰ ἀπὸ πράξεις, ἀναλόγους πρὸς τὴν ἐργασίαν [8], διαμορφοῦμεν τὸ κατωτέρω σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\pi i} \frac{dt_1}{dt} \left[\int_{l_1} \frac{g(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 \right] - \frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\pi i} \frac{\overline{dt_1}}{dt} \times$$

$$\left[\int_{l_1} \frac{\overline{g(\tau_1)}}{\overline{\tau_1} - \overline{t_1}} \overline{d\tau_1} + \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\overline{\tau_1} - \overline{t_1}} \overline{d\tau_1} \right] + \eta_0 (\mu_3 - \overline{\mu_2}) \frac{dt_3}{dt} \times$$

$$\left[\frac{1}{\pi i} \int_{l_3} \frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3 - t_3} d\tau_3 + \frac{1}{\pi i} \int_{l_3} \mu_{22}(\tau_3)\, e^{-ia_2(\tau_3)} \ln(\tau_3 - t_3)\, d\tau_3 + \right.$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}d\tau_3+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{12}(\tau_3)\,e^{-ia_1(\tau_3)}\ln(\tau_3-t_3)\,d\tau_3\Bigg]-$$

$$-\eta_0(\overline{\mu_3}-\overline{\mu_2})\overline{\frac{dt_3}{dt}}\Bigg[\frac{1}{\pi i}\int_{l_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\overline{\tau_3}-\overline{t_3}}\overline{d\tau_3}+\frac{1}{\pi i}\int_{l_3}\mu_{22}(\tau_3)\,\overline{e^{-ia_1(\tau_3)}\ln(\tau_3-t_3)}\,\overline{d\tau_3}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\overline{\tau_3}-\overline{t_3}}\overline{d\tau_3}+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{12}(\tau_3)\,\overline{e^{-ia_1(\tau_3)}\ln(\tau_3-t_3)}\,\overline{d\tau_3}\Bigg]-$$

$$-\frac{\mu_2-\overline{\mu_2}}{\pi i}\frac{dt_2}{dt}\Bigg[\frac{\mu_1-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{l_1}\frac{g(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1+\frac{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{l_1}\frac{\overline{g(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\overline{d\tau_1}+$$

$$+\eta_0\frac{(\mu_3-\overline{\mu_2})}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{l_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}d\tau_3+\eta_0\frac{(\overline{\mu_3}-\overline{\mu_2})}{(\mu_2-\overline{\mu_2})}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}\overline{d\tau_3}- \qquad (67)$$

$$-\frac{p_1\overline{q_2}-\overline{p_2}q_1}{\overline{p_2}q_1-p_1\overline{q_2}}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1-\frac{\overline{p_1q_2}-\overline{p_2q_1}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{l_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\overline{d\tau_1}-$$

$$-\frac{p_*\overline{q_2}-p_2\overline{q_*}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_2-t_2}d\tau_3+\frac{\overline{p_*q_2}-\overline{p_2q_*}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_2-t_2}\overline{d\tau_1}=$$

$$=q^+(t)+q^+(t)-\frac{dt_3}{dt}\frac{1}{\pi i}\int_{l}\frac{q^+(t)-q^+(t)}{\tau_2-t_2}d\tau,$$

$$t,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \epsilon\ l,\ l_1,\ l_2,\ l_3$$

$$ih\Bigg[(1-i\mu_1)+(1-i\mu_2)\frac{p_1\overline{q_2}-\overline{p_2}q_1}{\overline{p_2}q_2-p_2q_2}+(1-i\overline{\mu_2})\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\Bigg]\frac{dt_1}{dt}\varphi(t_1)+$$

$$+\Bigg[(1-i\overline{\mu_1})+(1-i\mu_2)\frac{\overline{p_1q_2}-\overline{p_2q_1}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}+(1-i\overline{\mu_2})\frac{\overline{p_1}q_2-p_2\overline{q_1}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\Bigg]\overline{\frac{dt_1}{dt}}\,\overline{\varphi(t_1)}+$$

$$+\eta_0\Bigg[(1-i\mu_3)+(1-i\mu_2)\frac{p_*\overline{q_2}-\overline{p_2}q_*}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}+(1-i\overline{\mu_2})\frac{p_*q_2-p_2q_*}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\Bigg]\frac{dt_3}{dt}\mu_{11}(t_3)+$$

$$+\eta_0\left[(1-i\overline{\mu_3})+(1-i\mu_2)\frac{\overline{p_*q_2}-\overline{p_2q_*}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}+(1-i\overline{\mu_2})\frac{\overline{p_*}q_2-p_2\overline{q_*}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\right]\frac{\overline{dt_3}}{dt}\,\overline{\mu_{11}(t_3)}+$$

$$+\frac{E_0S_0}{4}\frac{d}{dt}\left\{\left(B_1+B_3\frac{p_1\overline{q_2}-\overline{p_2}q_1}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\frac{dt_1}{dt_2}+B_4\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt_2}}\right)\varphi(t_1)+\right.$$

$$+\left(B_2+B_3\frac{\overline{p_1q_2}-\overline{p_2q_1}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\frac{\overline{dt_1}}{dt_2}+B_4\frac{\overline{p_1}q_2-p_2\overline{q_1}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt_2}}\right)\overline{\varphi(t_1)}+$$

$$+\left[B_5+B_6+B_3\left(\frac{p_*\overline{q_2}-\overline{p_2}q_*}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\frac{dt_3}{dt_2}+\frac{\overline{p_*q_2}-\overline{p_2q_*}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\frac{\overline{dt_3}}{dt_2}\right)+\right.$$

$$\left.+B_4\left(\frac{p_*q_2-p_2q_*}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\frac{dt_3}{dt_2}+\frac{\overline{p_*}q_2-p_2\overline{q_*}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\frac{dt_3}{dt_2}\right)\right]\mu_{11}(t_3)+$$

$$+\frac{B_1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1-\frac{B_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\overline{\tau_1}-\overline{t_1}}\overline{d\tau_1}+\frac{B_3}{\pi i}\left(\frac{p_1\overline{q_2}-\overline{p_2}q_1}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1+\right.$$

$$+\frac{\overline{p_1q_2}-\overline{p_2q_1}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\,\overline{d\tau_1}+\frac{p_*\overline{q_2}-\overline{p_2}q_*}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_1}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_2-t_2}d\tau_3+$$

$$\left.+\frac{\overline{p_*q_2}-\overline{p_2q_*}}{\overline{p_2}q_2-p_2\overline{q_2}}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_2-t_2}\,\overline{d\tau_3}\right)-\frac{B_4}{\pi i}\left(\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}d\tau_1+\right.$$

$$+\frac{\overline{p_1}q_2-p_2\overline{q_1}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}\,\overline{d\tau_1}+$$

$$\left.+\frac{p_*q_2-p_2q_*}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}d\tau_3+\frac{\overline{p_*}q_2-p_2\overline{q_*}}{p_2\overline{q_2}-\overline{p_2}q_2}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}d\tau_3\right)+$$

$$+B_5\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}d\tau_3+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{12}e^{-ia_1(\tau_3)}\ln(\tau_3-t_3)\,d\tau_3+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}d\tau_3+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{22}(\tau_3)\,e^{-ia_2(\tau_3)}\ln(\tau_3-t_3)\,d\tau_3\Bigg]-B_6\Bigg[\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{11}(\tau_3)}{\overline{\tau_2}-\overline{t_3}}\,\overline{d\tau_3}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{12}(\tau_3)\,\overline{e^{-ia_1(\tau_3)}}\;\overline{\ln(\tau_3-t_3)}\;\overline{d\tau_3}+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\overline{\tau_3}-\overline{t_3}}\,\overline{d\tau_3}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{L_3}\mu_{22}(\tau_3)\,\overline{e^{-ia_2(\tau_3)}}\;\overline{\ln(\tau_3-t_3)}\;\overline{d\tau_3}\Bigg]+$$

$$+\frac{B_1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{g(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1-\frac{B_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{g(\tau_1)}}{\overline{\tau_1}-\overline{t_1}}\,\overline{d\tau_1}-\frac{B_3}{\pi i}\Bigg[\frac{\mu_1-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{L_1}\frac{g(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1+$$

$$+\frac{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{L_1}\frac{\overline{g(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\,\overline{d\tau_1}+\eta_0\frac{\mu_3-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}d\tau_3+$$

$$+\eta_0\frac{\overline{\mu_3}-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\tau_3-t_3}\,\overline{d\tau_3}\Bigg]+\frac{B_4}{\pi i}\Bigg[\frac{\overline{\mu_1}-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\int_{L_1}\frac{\overline{g(\tau_1)}}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}\,\overline{d\tau_1}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\int_{L_1}\frac{g(\tau_1)}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}d\tau_1+\eta_0\frac{\overline{\mu_3}-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\overline{\tau_3}-\overline{t_3}}\,\overline{d\tau_3}+$$

$$+\eta_0\frac{\mu_3-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\int_{L_3}\frac{\mu_{21}(\tau_3)}{\overline{\tau_3}-\overline{t_3}}\,\overline{d\tau_3}\Bigg]\Bigg\}= \tag{68}$$

$$=A(t,\overline{t})-\frac{E_0S_0}{4}\frac{d}{dt}\Bigg[\frac{B_3}{\pi i(\mu_2-\overline{\mu_2})}\int_{L}\frac{q^+(\tau)-q^-(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau-$$

$$-\frac{B_4}{\pi i(\overline{\mu_2}-\mu_2)}\int_{L}\frac{\overline{q^+(\tau)-q^-(\tau)}}{\overline{\tau_2}-\overline{t_2}}\,\overline{d\tau}\Bigg],$$

$t,\ t_1,\ t_2,\ t_3 \in,\ L,\ L_1,\ L_2,\ L_3$

ὅπου :

$$q^{\pm}(t) = -i(1 - i\overline{\mu_2})\, f^{\pm}(t) + i\, \frac{\overline{dt}}{dt}\, (1 + i\overline{\mu_2})\, \overline{f^{\pm}}\, (t)$$

$$f^{\pm}(t) = \sigma_n^{\pm} + i\sigma_t^{\pm} - \frac{1}{2}\left\{ 2\mathrm{Re}\left[(1+\mu_1^2)A_{11} + (1+\mu_2^2)A_{12} + \eta_0(1+\mu_3^2)A_{13} \right] \right.$$

$$+ \frac{\overline{dt}}{dt}\left[(1+i\mu_1)^2 A_{11} + (1+i\mu_2)^2 A_{12} + \eta_0(1+i\mu_3)^2 A_{13} + \right.$$

$$\left.\left. + (1+i\overline{\mu_1})^2\, \overline{A_{11}} + (1+i\overline{\mu_2})^2\, \overline{A_{12}} + \eta_0(1+i\overline{\mu_3})^2\, \overline{A_{13}} \right] \right\}$$

$$A_{11} = \Gamma + \frac{C_{11}X + C_{12}Y}{t_1 - \xi_1^*} - i\,\frac{M_0}{8\pi}\, \frac{1}{(t_1 - \xi_1^{**})^2} + a_0' \left[1 + \ln(t_1 - a_1^*) \right]$$

$$A_{12} = \Gamma' + \frac{C_{21}X - C_{22}Y}{t_2 - \xi_2^*} - i\,\frac{M_0}{8\pi}\, \frac{1}{(t_2 - \xi_2^{**})^2} + b_0' \left[1 + \ln(t_2 - a_2^*) \right]$$

$$A_{13} = m_0 \left[1 + \ln(t_3 - a_3^*) \right]$$

$$A(t, \overline{t}) = -\frac{E_0 S_0}{2}\, \frac{d}{dt} \left\{ B_1 A_{21} + B_2 \overline{A_{21}} + B_3 A_{22} + B_4 \overline{A_{22}} + B_5 A_{23} + B_6 \overline{A_{23}} \right\}$$

$$A_{21} = A_{11} - \Gamma, \quad A_{22} = A_{12} - \Gamma', \quad A_{13} = A_{23}$$

$$B_1 = \frac{1}{E_x} \left(2 + 2\mu_1^2 - (1+\mu_1)\, \frac{dt_1}{dt} - (1 - i\mu_1)\, \frac{\overline{dt_1}}{dt} \right) -$$

$$- \frac{\nu_y}{E_y} \left[(1+i\mu_1)\, \frac{dt_1}{dt} + (1 - i\mu_1)\, \frac{\overline{dt_1}}{dt} \right],$$

$$B_3 = \frac{1}{E_x}\left(2 + 2\mu_2^2 - (1+\mu_2)\frac{dt_2}{dt} - (1-i\mu_2)\frac{dt_2}{dt}\right) -$$

$$- \frac{\nu_y}{E_y}\left[(1+i\mu_2)\frac{dt_2}{dt} + (1-i\mu_2)\frac{dt_2}{dt}\right],$$

$$B_5 = \frac{\eta_0}{E_x}\left(2 + 2\mu_3^2 - (1+i\mu_3)\frac{dt_3}{dt} - (1-i\mu_3)\frac{dt_3}{dt}\right) -$$

$$- \frac{\eta_0\nu_y}{E_y}\left[(1+i\mu_3)\frac{dt_3}{dt} + (1-i\mu_3)\frac{dt_3}{dt}\right],$$

$$B_2 = \overline{B_1}, \quad B_4 = \overline{B_3}, \quad B_6 = \overline{B_5}$$

Τὸ σύστημα (67)-(68) εἶναι ἀνάγκη νὰ συμπληρωθῇ μὲ τὴν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ἐπὶ τῆς ρωγμῆς 1, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὡς ἀκολούθως:

$$\left[(p_1+iq_1) - (p_2+iq_2)\frac{\mu_1-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}} - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\mu_1-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\right]\int_{I_1} g(t_1)dt_1 +$$

$$+\left[(\overline{p_1}+i\overline{q_1}) - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}} - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\overline{\mu_1}-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\right]\int_{I_1} \overline{g(t_1)}\,\overline{dt_1} +$$

$$+\eta_0\left[(p_*+iq_*) - (p_2+iq_2)\frac{\mu_3-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}} - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\mu_3-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\right]\int_{I_3} \mu_{21}(t_3)dt_3 + \tag{69}$$

$$+\eta_0\left[(\overline{p_*}+i\overline{q_*}) - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\overline{\mu_3}-\overline{\mu_2}}{\mu_2-\overline{\mu_2}} - (\overline{p_2}+i\overline{q_2})\frac{\overline{\mu_3}-\mu_2}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\right]\int_{I_3} \mu_{21}(t_3)\overline{dt_3} =$$

$$= -\frac{p_2+iq_2}{\mu_2-\overline{\mu_2}}\int_{I}\left[q^+(t)-q^-(t)\right]dt - \frac{\overline{p_2}+i\overline{q_2}}{\overline{\mu_2}-\mu_2}\int_{I}\left[\overline{q^+(t)}-\overline{q^-(t)}\right]dt$$

Τὸ σύστημα ἐξισώσεων (67)-(69), ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς ὁλοκληρο-διαφορικὰς ἐξισώσεις θερμοαγωγιμότητος, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὰς συνθήκας (37)-(39), δύναται νὰ περιγράψῃ πλήρως τὸ ἐντατικὸν καὶ θερμικὸν πεδίον τοῦ ἐπιπέδου προβλήματος ἀνισοτρόπου ρηγματωμένης ἀπείρου πλακός, ποὺ ἐνισχύεται μὲ εὐθύγραμμον ἐνίσχυσιν.

Διὰ τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ διεύθυνσις τοῦ ἐνισχυτοῦ δὲν συμπίπτει μὲ κανένα ἀπὸ τοὺς κυρίους ἄξονας, ἀλλὰ ὅμως εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλαστικῆς συμμετρίας τῆς πλακός, ἡ σχέσις (60) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\mathrm{ih}\left[(\sigma_n^+ - \mathrm{i}\sigma_t^+) - (\sigma_n - \mathrm{i}\sigma_t)\right] + E_0 S_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{E'_x}\sigma_s^+ - \frac{\nu'_y}{E'_y}\sigma_n^+ + \alpha_1 \sigma_t^+\right] = 0 \tag{70}$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν συνάγεται ἀνάλογος τῆς (68) ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτικὴ ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς ἐνισχύσεως L. Αἱ νέαι ἐλαστικαὶ σταθεραί της (70) προκύπτουν ἀπὸ τὰς σχέσεις [4] αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ἐλαστικὰς σταθερὰς ὡς πρὸς δύο ὀρθογώνια συστήματα, ὅταν τὸ κύριον σύστημα συντεταγμένων ἔχῃ περιστραφῇ περὶ τὴν ἀρχήν του κατά τινα γωνίαν.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως συνάγεται ὅτι ἡ ἐξέτασις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν πεπερασμένου ἀριθμοῦ ρωγμῶν καὶ ἐνισχύσεων τυχαίου προσανατολισμοῦ, συγκεντρωμένων δυνάμεων, ροπῶν καὶ πηγῶν θερμότητος, μὲ μιὰ μόνον προϋπόθεσιν, ὅτι αἱ ρωγμαὶ καὶ αἱ ἐνισχύσεις δὲν ἀλληλοτέμνονται.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων διετυπώθη γενικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως ἐπιπέδων προβλημάτων θερμοαγωγιμότητος καὶ θερμοελαστικότητος διὰ ρηγματωμένα ἰσότροπα καὶ ἀνισότροπα σώματα ποὺ ἐνισχύονται ἐπίσης μὲ εὐθυγράμμους ἐνισχύσεις.

Ἡ λογικὴ καὶ ἡ διαδικασία τῆς προτεινομένης μεθόδου δύναται νὰ ἐπεκταθῇ εἰς μεγάλην κατηγορίαν ἐπιπέδων προβλημάτων γραμμικῆς ἐλαστικότητος καὶ θερμοελαστικότητος, ὅπως π.χ. διὰ πολλαπλῶς συνεκτικὰ σώματα, σώματα μὲ περιοδικὴν καὶ κυκλικῶς συμμετρικὴν διάταξιν τῶν ρωγμῶν, ἐνισχύσεων, ἐγκλεισμάτων κλπ. καθὼς καὶ διὰ ἐπίπεδα προβλήματα ἐπαφῆς δύο ρηγματωμένων καὶ μὴ σωμάτων.

Ἡ προτεινόμενη μέθοδος εἶναι χρήσιμος, διότι δίδει τὴν δυνατότητα ὑπὸ τὸ πρῖσμα τῆς γενικῆς εἰκόνος τοῦ προβλήματος νὰ ἐξετάζῃ τὸ ἐντατικὸν καὶ τὸ θερμικὸν πεδίον εἰς ἐπίπεδα ἐλαστικὰ σώματα τυχαίας γεωμετρίας, καὶ νὰ ὑπολογίζῃ τὴν συμπεριφοράν των εἰς τὰς ἐνυπαρχούσας ἰδιομορφίας. Ἡ δυνατότης αὐτὴ καθιστᾶ τὴν μέθοδον πάρα πολὺ χρήσιμον καὶ πολύτιμον ἀπὸ ἐρευνητικῆς καὶ πρακτικῆς πλευρᾶς.

SUMMARY

Plane problems of the theory of elasticity, thermoelasticity and thermoconductivity for cracked isotropic or anisotropic bodies with reinforcements.

Based on the method of complex functions and the theory of singular integral equations a new general method has been developed for the solution of plane problems in the thermoconductivity and thermoelasticity for cracked isotropic and anisotropic bodies containing also linear stringers.

The principles and the procedures of the method proposed may be extended to a large category of plane problems of linear elasticity, such as for multiply connected bodies with periodic linear and circularly symmetric arrays of cracks and stringers, as well as bodies with inclusions and compound bodies in contact containing or not a series of cracks.

The proposed method yields the possibility, by the consideration of the general aspect of the problem, to examine the stress and the thermal field in plane elastic problems of a generic geometry and to calculate their behavior under the influence of the existing singularities inside these fields. This possibility makes the method useful as an instrumental tool for solving difficult and complicated problems of applications.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Muskhelishvili N. I., «Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity», P. Noordhoff Groningen, 1965.
2. Muskhelishvili N. I., «Singular Integral Equations», Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1958.
3. Gakhov F. D., «Boundary Value Problems», Oxford, Pergamon 1966.
4. Prusov I. A., «Some Problems of Thermoelasticity», Minsk, Izd. Beloruskogo In-ta, 1971 (in Russian).
5. Theocaris P. S., Bardzokas D., «The Influence of a Finite Stringer on the Stress Intensities around Cracks in Plates», Eng. Fract. Mech. 14, pp. 493-507, 1981.
6. Theocaris P. S., Bardzokas D., «Reinforcement of a Cracked Plate by a Loaded Strip-Inclusion», Ing. Archiv., Vol. 55, pp. 45-56, 1985.
7. Bardzokas D., Parton V. Z., Theocaris P. S., «Inregral Equations of the Theory of Elasticity for the Multiply Connected Bodies with Inclusions», P.M.M., t. 53, N. 3, pp. 485-495, 1989 (in Russian).
8. Bardzokas D., Parton V. Z., Theocaris P. S., «Plane Problem of the Theory of Elasticity for Orthotropic Bodies with Defects», D. A. N. U. S. S. R., t. 309, N. 5, pp. 1072-1077, 1989 (in Russian).