

4. ΕΜΜ. ΒΟΓΙΑΤΖΑΚΗΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΔΑΚΗΣ, Γ. ΒΑΣΙΛΙΚΙΩΤΗΣ, Πρακτικά 'Ακαδημίας Αθηνών, τόμος 33 (1958) σ. 284 και σ. 292.
5. H. KOELEMANS, J. TH. G. OVERBEEK, Discussions Faraday Soc. No 18 (1954), 53.

ΦΥΣΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ. — Αίωρηματικότης κόνεων. 4ον Ἀσβεστιομαγνησιούχα όρυκτά. Ἐμπλουτισμός, ὑπὸ Ἐμμ. Βογιατζάκη, Δημ. Γιαννακούδακη, Κωνστ. Σιπητάνου. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἐμμ. Ἐμμανουήλ.

«Μελετάται ὁ ἐμπλουτισμὸς δύο ἀσβεστιομαγνησιούχων ὄρυκτῶν. Εὑρέθη ὅτι ἐκ τῶν δύο μελετηθέντων δειγμάτων μόνον εἰς τὸ ἐν δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐμπλουτισμὸς διὰ συσκευῆς αλειστοῦ κυκλώματος προηγουμένως περιγραφείσης (3) μὲ δυνατότητα πλήρους διαχωρισμοῦ καὶ ἐκμεταλλεύσεως τῶν λαμβανομένων προϊόντων».

«Ως ἀπέδειξαν προηγούμενα πειράματα γενόμενα ὑπὸ τοῦ H. T. S. Britton καὶ τῶν συνεργατῶν του (1), ὁ δολομίτης, ὅπως τὸ ἀνθρακικὸν ἀσβέστιον καὶ τὸ ἀνθρακικὸν μαγνήσιον, κατὰ τὴν θερμικὴν διάσπασιν δίδει στερεά, τὰ ὅποια διαφέρουν κατὰ τὴν δραστικότητα ἀναλόγως τῆς θερμοκρασίας καὶ τῶν ἄλλων συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὅποιας εὑρέθησαν κατὰ τὴν διάσπασιν.

Ἐν προκειμένῳ, ἐκ τῶν δύο δειγμάτων τὰ ὅποια μελετῶμεν, μόνον τὸ ἐν ἔχει τὴν στοιχειομετρικὴν ἀναλογίαν τοῦ δολομίτου εἰς ἀνθρακικὸν ἀσβέστιον καὶ ἀνθρακικὸν μαγνήσιον. Τὸ ἄλλο ἔχει ἀναλογίαν τελείως διάφορον τῆς στοιχειομετρικῆς τοῦ δολομίτου (76 % ἀνθρακικὸν μαγνήσιον, 23 % ἀνθρακικὸν ἀσβέστιον). Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ καταταχθῇ, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ M. καὶ C. Guédras (2) γενομένην ταξινόμησιν, ἡ εἰς τοὺς δολομίτας τοὺς ἀσβεστολιθικοὺς ἢ εἰς τοὺς ἀσβεστολίθους τοὺς μαγνησιούχους, ἐφ' ὅσον δὲν γνωρίζομεν, ἀν τὸ μαγνήσιον τὸ ὅποιον περιέχεται εἶναι ὑπὸ τὴν μορφὴν δολομίτου. Ἡ συμπεριφορά των ἐπίσης ἀπὸ ἀπόψεως αἰωρηματικότητος μετὰ τὴν πύρωσιν εἶναι διάφορος, πρᾶγμα τὸ ὅποιον συνηγορεῖ ὑπὲρ τῆς τελείως διαφόρου κατατάξεως. Ἐν προκειμένῳ τὸ θέμα ἡρευνήθη μόνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐμπλουτισμοῦ, ἀφοῦ προηγουμένως τὸ ἀσβεστιομαγνησιούχον ὄρυκτὸν ὑπέστη θερμικὴν κατεργασίαν εἰς θερμοκρασίαν 1000° C, ἡ ὅποια εὑρέθη ὅτι εἶναι ἡ εύνοϊκωτέρα ἀπὸ ἀπόψεως δραστικότητος¹, καὶ θέρμανσιν ἐπὶ τετράρον, πα-

¹ Μὲ τὴν λέξιν δραστικότης νομίζομεν ὅτι εἶναι σκοπιμώτερον νὰ ἀποδώσωμεν τὸν ὅρον activity, ὡς ἔξηγει τοῦτον δ. S. J. Gregg, προκειμένου περὶ στερεῶν, πρὸς διάκρισιν τοῦ θερμοδυναμικοῦ δροῦ ἐνεργότητος (Activity τοῦ Lewis). (Surface Phenomena in Chemistry and Biology σ. 195, 1958, Pergamon Press).

ρατηρηθέντος ὅτι μόνον κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν εἴχομεν τελείκν σταθερότητα ἀπὸ ἀπόψεως ἀπωλείας βάρους κατὰ τὴν πύρωσιν.

Τοῦτο ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς βεβαιότητος ὅτι θὰ ἐπιτευχθοῦν ἐξ ὀλοκλήρου τὰ δύο δξείδια (MgO , CaO) εἶναι ὄρθον¹.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΝ ΜΕΡΟΣ

Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα συσκευὴ διὰ τὸν ἐμπλουτισμὸν εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν διὰ τὴν εὔρεσιν τῆς κατανομῆς τοῦ μεγέθους τῶν σωματιδίων (3).

Ἄρχικῶς ἐγένοντο πειράματα αἰωρήσεως τοῦ πυρωθέντος δείγματος ἐντὸς ὀγκομετρικοῦ σωλῆνος 350ος 25 ἑκ. καὶ χωρητικότητος 100 κ.έκ. παρουσίᾳ ἀνιονικῶν τασενεργῶν, τῶν ὁποίων ὅμως τὰ ἀποτελέσματα καὶ διὰ τὰ δύο δείγματα δὲν ἦσαν ίκανοποιητικά.

Χρησιμοποιηθέντα δείγματα:

1ον δεῖγμα: Σύστασις 76 % εἰς ἀνθρακικὸν μαγνήσιον
καὶ 23 % εἰς ἀνθρακικὸν ἀσβέστιον

2ον δεῖγμα: Σύστασις 46 % εἰς ἀνθρακικὸν μαγνήσιον
καὶ 53 % εἰς ἀνθρακικὸν ἀσβέστιον

Εἰς τὸ πρῶτον δεῖγμα² ἡ ἀπώλεια βάρους μετὰ τὴν ἐπὶ τετράωρον θέρμανσιν εἰς 1000° C ἀνέρχεται εἰς 49,9 % μὲ σύστασιν τοῦ ἐναπομένοντος 72 % εἰς δξείδιον τοῦ μαγνησίου καὶ 26 % εἰς δξείδιον τοῦ ἀσβέστιου. Εἰς τὸ δεύτερον δεῖγμα ἡ ἀπώλεια βάρους μετὰ τὴν ἐπὶ τετράωρον θέρμανσιν εἰς 1000° C ἀνέρχεται εἰς 47,4 % μὲ σύστασιν τοῦ ἐναπομένοντος 41 % εἰς δξείδιον τοῦ μαγνησίου καὶ 56,5 % εἰς δξείδιον τοῦ ἀσβέστιου.

Ἡ τεχνικὴ συνίσταται εἰς τὴν λῆψιν 2 γρ. πυρωθέντος προηγουμένως δείγματος εἰς τοὺς 1000° C, ἐπὶ τετράωρον, λειτοτρίβησιν καὶ κοσκίνισιν αὐτοῦ διὰ κοσκίνου ἀλευροποιίας No 11. Ἀφήνετο πρὸς σβέσιν ἐντὸς ὕδατος 7,5 φορᾶς περισσοτέρου τοῦ θεωρητικῶς ἀπαιτούμενου διὰ τὴν σβέσιν καὶ ἐπὶ εἰκοσιτετράωρον. Ὁ χρόνος οὗτος εὑρέθη πειραματικῶς ὁ εὐνοϊκῶτερος ἀπὸ ἀπόψεως διαρκείας σβέσεως διὰ τὸν ἐμπλουτισμόν. Τὸ αἰώρημα τοῦτο ρίπτεται ἐκ τοῦ ἀνω ἀκρου τῆς συσκευῆς καὶ τὰ καταπί-

¹ Ἀπὸ ἀπόψεως δραστικότητος τῆς ἐπιφανείας τὰ πειράματα πρέπει νὰ συμπληρωθοῦν εἰς ἔλλας θερμοκρασίας καὶ ἔλλα χρονικὰ διαστήματα πυρώσεως, τὰ δποῖα πρέπει λδιαιτέρως νὰ στραφοῦν εἰς τὸ δεῖγμα, τὸ εύρισκομενον εἰς τὴν στοιχειομετρικὴν ἀναλογίαν τοῦ δολομίτου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὰς παρούσας συνθήκας δὲν εἴχομεν ίκανοποιητικὸν ἐμπλουτισμόν, ἐνῷ ἀντιθέτως εἰς τὸ δεῖγμα τὸ μὴ εύρισκόμενον εἰς τὴν στοιχειομετρικὴν ἀναλογίαν δὲ μπλουτισμὸς εἶναι ίκανοποιητικός.

² Τὰ λαμβανόμενα δείγματα δεξηραίνοντο προηγουμένως ἐπὶ τρίωρον εἰς τοὺς 100° C.

πτοντα σωματίδια συλλέγονται εἰς χωνευτήρια κενοῦ Jena glas № 4. Ὡς μέσον αἰωρήσεως χρησιμοποιεῖται κεκορεσμένον ὑδατικὸν διάλυμα ἐξ ὑδροξειδίου τοῦ μαγνησίου καὶ ὑδροξειδίου τοῦ ἀσβεστίου πρὸς ἀποφυγὴν τῆς μερικῆς διαλύσεως τῶν σχηματιζομένων ὑδροξειδίων.

Τὰ λαμβανόμενα κλάσματα κατακαθίσεως τῶν χωνευτηρίων μετὰ τὴν θέρμανσίν των διὰ τὴν μετατροπήν των πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ὁξείδια τοῦ μαγνησίου καὶ τοῦ ἀσβεστίου ζυγίζονται καὶ ὑποβάλλονται εἰς ἀνάλυσιν διὰ τὴν εὔρεσιν τῆς περιεκτικότητος αὐτῶν εἰς ὁξείδιον τοῦ ἀσβεστίου. Ἐγένοντο ἐν συνόλῳ τρεῖς διαδοχικαὶ αἰωρήσεις.

Αἰώρησις 1η.

1ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 46,5% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 8,1% CaO.

2ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 21,5% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 9,6% CaO.

3ον Χωνευτήριον, χρόνος 45', κατακάθισμα 9,0% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 10,5% CaO.

Εἰς τὸ 4ον χωνευτήριον ἡ ἀναλογία εἰς ὁξείδιον τοῦ ἀσβεστίου ἦτο μεγαλύτερα. Εἰς τὰ τρία πρῶτα χωνευτήρια κατέπεσσαν τὰ 76,7% ἐπὶ τοῦ συνόλου (τῶν 2 γρ.) μὲ μέσην περιεκτικότητα 9% εἰς ὁξείδιον τοῦ ἀσβεστίου ἔναντι τῶν 26% τοῦ ἀρχικοῦ δείγματος. Τὰ τρία ταῦτα κλάσματα κατακαθίσεως ἀναμειγνύονται καὶ ὑποβάλλονται ὡς σύνολον εἰς δευτέραν αἰώρησιν.

Αἰώρησις 2α.

1ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 45,25% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 0,9% CaO.

2ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 40,25% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 1,2% CaO.

Εἰς τὸ 3ον χωνευτήριον ἐλήφθη μικρὰ ποσότης μὲ μεγαλυτέραν περιεκτικότητα εἰς ὁξείδιον τοῦ ἀσβεστίου.

Ἐπομένως εἰς τὴν δευτέραν αἰώρησιν ἐλήφθησαν εἰς τὰ δύο χωνευτήρια τὰ 85,5% τῆς χρησιμοποιηθείσης διὰ τὴν δευτέραν αἰώρησιν ποσότητος μὲ μέσην περιεκτικότητα εἰς ὁξείδιον τοῦ ἀσβεστίου περίπου 1%. Τὰ δύο ταῦτα κλάσματα τῆς δευτέρας αἰωρήσεως ἀντιστοιχοῦν εἰς 65,6% τῆς ἀρχικῆς ποσότητος τῆς χρησιμοποιηθείσης διὰ τὸν ἐμπλουτισμόν. Ταῦτα ὑποβάλλονται εἰς τρίτην αἰώρησιν.

Αἰώρησις 3η.

1ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 48,6 % τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 0% CaO.

2ον Χωνευτήριον, χρόνος 20', κατακάθισμα 43,4 % τῆς ἀρχικῆς ποσότητος μὲ 0% CaO.

Εἰς τὸ τρίτον χωνευτήριον ἐλήφθη μικρὰ ποσότης μὲ μικρὰν περιεκτικότητα εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου. Τὰ δύο ταῦτα κλάσματα τῆς τρίτης αἰωρήσεως ἀντιστοιχοῦν εἰς 60 % τῆς ἀρχικῶς χρησιμοποιηθείσης ποσότητος διὰ τὸν ἐμπλουτισμόν, ἥτοι τῶν 2 γραμμαρίων τοῦ δείγματος.

Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἐπομένως ποσότητος λαμβάνονται τὰ 60 % αὐτῆς ἀντιστοιχοῦντα εἰς καθαρὸν ὀξείδιον τοῦ μαγνησίου. Δεδομένου ὅτι εἰς τὸ ἀρχικὸν δεῖγμα ὑπάρχει ὀξείδιον τοῦ μαγνησίου εἰς 72 %, ἔπειται ὅτι ἐκ τῆς συνολικῆς ποσότητος τοῦ ὀξείδιου τοῦ μαγνησίου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ πυρωθὲν ἀσβεστιομαγνησιοῦχον δρυκτόν, ἐλήφθησαν διὰ τοῦ ἐμπλουτισμοῦ περίπου τὰ 83 %.

Εἰς τὰ ὑπόλοιπα 40 % τῆς ἀρχικῶς χρησιμοποιηθείσης ποσότητος τῶν 2 γραμμαρίων τοῦ δείγματος ἡ ἀναλογία εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου εὑρέθη ἀνερχομένη εἰς 68,5 %. Ταῦτα ὑποβάλλονται εἰς νέαν αἰώρησιν διαρκείας 15'. Τὸ αἰώρημα μετὰ διήθησιν, ἔγραψαντα καὶ πύρωσιν εὑρέθη 0,5 γρ., μὲ ἀναλογίαν 90 % εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου. Ταῦτα ὑποβάλλονται εἰς ἑτέραν αἰώρησιν διαρκείας καὶ πάλιν 15'. Τὸ ὑπερκείμενον αἰώρημα μετὰ τὴν ἔγραψαντα εὑρέθη 0,4 γρ. μὲ ἀναλογίαν 94 % εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου.

Τὰ 0,4 γρ. ταῦτα ἀντιστοιχοῦν εἰς 20 % τῆς ἀρχικῶς χρησιμοποιηθείσης ποσότητος τῶν δύο γραμμαρίων τοῦ δείγματος. Ἐπομένως ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ πρὸς ἐμπλουτισμὸν δείγματος τῶν δύο γραμμαρίων ἐλήφθησαν τελικῶς: 60 % αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦντα εἰς καθαρὸν ὀξείδιον τοῦ μαγνησίου, 20 % μὲ περιεκτικότητα εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου 94 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα 20 % μὲ περιεκτικότητα περίπου ἵσην πρὸς τὴν τοῦ ἀρχικοῦ (δυναμενα ὡς ἐκ τούτου νὰ ἐπιχειρηθούν εἰς τὸ κύκλωμα αἰωρήσεως πρὸς ἐμπλουτισμόν).

Οὕτως εἰς μὲν τὰ κλάσματα κατακαθίσεως ἔχομεν πλήρη ἐμπλουτισμὸν εἰς ὀξείδιον τοῦ μαγνησίου, εἰς δὲ τὰ κλάσματα τοῦ αἰωρήματος ἵκανοποιητικώτατον ἐμπλουτισμὸν εἰς ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου.

Τὰ αὐτὰ πειράματα ἐπανελήφθησαν καὶ διὰ τὸ δεύτερον δείγμα, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν στοιχειομετρικὴν ἀναλογίαν τοῦ δολομίτου, παρατηρηθέντος ὅτι τοῦτο δὲν ὑφίσταται ἵκανοποιητικὸν ἐμπλουτισμόν.

ΣΥΖΗΤΗΣΙΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα πειραματικὴ διάταξις βασιζομένη εἰς τὴν διάφορον ταχύτητα κατακαθίσεως τῶν συνιστώντων τὸ δεῖγμα ὀξειδίων ἐντὸς κεκορεσμένου ὑδατικοῦ διαλύματος διὰ τῶν ἀντιστοίχων ὑδροξειδίων [Ca(OH)₂, Mg(OH)₂] παρέχει ἐν προκειμένῳ τρόπον διαχωρισμοῦ τοῦ ἀσβεστίου καὶ μαγνησίου ὑπὸ μορφὴν ὀξειδίων καὶ ὑδροξειδίων.

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη διὰ τῶν γενομένων πειραμάτων ὅτι ἡ ὄλη ἔργασία τοῦ ἐμπλούτισμοῦ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γίνεται ἐντὸς κεκορεσμένου διὰ τῶν ὑδροξειδίων τοῦ ἀσβεστίου καὶ μαγνησίου ὑδατικοῦ διαλύματος, δύναται ἡ ὥς ἀνω διάταξις νὰ προταθῇ ὡς συσκευὴ ταξινομήσεως, οὐχὶ μόνον ἐν προκειμένῳ ἀλλὰ καὶ εἰς ὄλας τὰς περιπτώσεις ὁρυκτῶν, εἰς τὰς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ὑπαρξία κλειστοῦ κυκλώματος λόγω ἐπιδράσεως τοῦ μέσου διασπορᾶς ἐπὶ τῶν στερεῶν. Τοῦτο προϋποθέτει νέα πειράματα ἀπὸ ἀπόψεως ὕψους καὶ εὔρους τῆς ὑδατίνης στήλης ὡς ἐπίσης ποσότητος καὶ μεγέθους σωματιδίων, τὰ ὅποια προτιθέμεθα νὰ διεξαγάγωμεν ἀργότερον.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ἐμελετήθησαν δύο δείγματα ἀσβεστιομαγνησιούχων ὁρυκτῶν περιοχῆς Δυτικῆς Μακεδονίας. Εὑρέθη ὅτι μετὰ τὴν ἐπὶ τετράωρον εἰς τοὺς 1000° C πύρωσιν καὶ σβέσιν ἐπὶ εἰκοσιτετράωρον τῶν λαμβανομένων ὀξειδίων, τὸ ἐν μὲ περιεκτικότητα εἰς μαγνήσιον μεγαλυτέρων τῆς τοῦ ἀλλού ὑφίσταται εἰκανοποιητικὸν ἐμπλούτισμόν διὰ διαδοχικῶν αἰωρήσεων. Εἰς τὸ ἄλλο δεῖγμα συστάσεως δολομίτου ὁ ἐμπλούτισμὸς δὲν εἶναι εἰκανοποιητικός.

Διὰ τριῶν ἐπανειλημμένων αἰωρήσεων κατὰ τὴν προηγουμένως περιγραφεῖσαν διάταξιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ 60% τοῦ ὄλου ὁρυκτοῦ, ἦτοι τὰ 83% τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ὁρυκτὸν μαγνησίου ὑπὸ μορφὴν ὀξειδίου καὶ τὰ 20% τοῦ ὄλου ὁρυκτοῦ ὡς προϊὸν συνιστάμενον ἐξ 94% εἰς ὀξειδίον τοῦ ἀσβεστίου. Πιθανῶς ἔτι δι' αὐξήσησες τῆς στήλης αἰωρήσεως νὰ ἀρκῇ καὶ μία μόνον αἰώρησις διὰ τὸν ἐμπλούτισμόν. Οὕτω καθίσταται δυνατὴ ἡ ἀξιοπόίησις ἐκτεταμένων ἀσβεστιομαγνησιούχων κοιτασμάτων, ἐφ' ὅσον καὶ ἡ λαμβανομένη ἀσβεστος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ἀσβεστος τελευταίας ἐπιχρίσεως (finishing lime) ἢ ὡς πρώτη ὅλη φυσικοῦ κονιάματος.

RÉSUMÉ

On étudie dans un appareil déjà décrit les suspensions dans des solutions aqueuses saturées avec de la chaux, de deux échantillons dolomiques ayant subit une calcination préalable à la température de 1000° C.

On remarque qu' après avoir effectué trois suspensions successives l'échantillon ne présentant pas la constitution de la dolomie pure, s'enrichit progressivement jusqu' à une teneur 60 pour cent en oxyde de magnésium.

Quant au mineral demeuré en suspension en le traitant comme ci-dessus on obtient un 20 pour cent du produit en suspension ayant une teneur de 94 pour cent en CaO.

Le sédiment, soit le 20 pour cent de l'échantillon primitif présentant la constitution initiale, peut être remis dans le cycle des opérations.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. H. T. S. BRITTON, S. J. GREGG καὶ G. W. WINSOR, *J. Appl. Chem.* 2 (1952) σ. 693.
2. M. καὶ A. GUEDRAS, *La chimie de la dolomie*. Eyrolles Gauthier Villars, (1957) σ. 12.
3. ΕΜΜ. ΒΟΓΙΑΤΖΑΚΗΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΔΑΚΗΣ καὶ Γ. ΒΑΣΙΛΙΚΙΩΤΗΣ, *Πρακτ. Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν*, τόμ. 33 (1958), σ. 292.
4. ROGER'S *Industrial chemistry* (1946) σ. 853.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—The partition theorem of plane curves generalized with its geometrical interpretation by Christos B. Glavas*

The relations $f_1(a_1, b_1)=0$ and $f_2(a_2, b_2)=0$ are analytically equivalent if one can transform one to the other. The latter depends upon the existence of formulae of transformation between the coordinate systems (a_1, b_1) and (a_2, b_2) . Thus the equations $x^2 - y^2 = a^2$ and $r^2 \cos 2\theta = a^2$ are such relations.

The dual principle of geometrical equivalence has been already established in a paper communicated to the Academy of Athens¹.

Briefly, two curves $f(a_1, b_1)=0$ and $f(a_2, b_2)=0$ represented evidently by the same analytical relation are geometrically equivalent if one can transform geometrically one to the other. This is possible if $a_1=a_2$ and $b_1=b_2$, i.e. if the coordinates of the two systems are equal by pairs and if one can

* ΧΡΗΣΤ. Β. ΓΚΛΑΒΑΣ, Τὸ γενικευμένον θεώρημα κατανομῆς τῶν καμπυλῶν τοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς γεωμετρικῆς ἐρμηνείας τού.

¹ C. B. GLAVAS, The principle of geometrical equivalence and some of its consequences to the theory of curves, *Proceedings of the Academy of Athens*, 32 (1957), p. 122-131.