ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 21ΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1999

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΜΗΤΣΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.— **Τάξη καὶ Χάος στὸ Χῶρο τῶν Φάσεων**, ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ *Γ. Κοντόπουλου* καὶ τῶν κ.κ. *Ν. Βόγγλη* καὶ *Χ. Εὐθυμιόπουλου**.

1. Εἰσαγωγὴ

Θ' ἀναφερθῶ στὸ ἔργο τὸ ὁποῖο ἔγινε κατὰ τὸ περασμένο ἔτος μὲ τὴν ἐνίσχυση τῆς Ἐπιτροπῆς Ἐρευνῶν τῆς Ἀκαδημίας. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἔρευνας αὐτῆς εἶναι ὑπὸ δημοσίευση σὲ 6 ἐργασίες:

1. Contopoulos, G. and Voglis, N. (1999),
2. Contopoulos, G., Efthymiopoulos, C. and Voglis, N. (1999).
3. Voglis, N., Contopoulos, G. and Efthymiopoulos, C. (1999).
4. Efthymiopoulos, C., Voglis, N. and Contopoulos, G. (1999).
5. Efthymiopoulos, C., Contopoulos, G. and Voglis, N. (1999).
6. Contopoulos, G., Voglis, N. and Efthymiopoulos C. (1999).

Ἐδῶ θὰ δώσουμε μόνο μία σύνοψη τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν 5 πρώτων ἐργασιῶν, καὶ νεώτερα στοιχεῖα ποὺ δὲν ἔχουν ἀκόμη δημοσιευθεῖ.

Ἐν πρώτοις χῶρος τῶν φάσεων εἶναι ὁ χῶρος ποὺ περιλαμβάνει τὶς συντεταγμένες καὶ τὶς ταχύτητες. Π.χ. ἂν ἔχουμε 2 συντεταγμένες, x καὶ y, ὁ χῶρος τῶν φάσεων εἶναι 4 διαστάσεων γιατὶ περιλαμβάνει καὶ τὶς ταχύτητες u_x, u_y. Θὰ θεωρήσουμε συστήματα διατηρητικά, δηλαδὴ συστήματα ποὺ διατηροῦν τὴν ἐνέργεια. Ἔτσι οἱ διαστάσεις ἐλαττώνονται σὲ 3. Ἂν τώρα πάρουμε μία ἐπιφάνεια τομῆς, ποὺ τέμνει ὅλες τὶς τροχιές, ἔχουμε ἕνα χῶρο 2 διαστάσεων. Αὐτὸς εἶναι ὁ χῶρος τῶν φάσεων ποὺ μελετοῦμε.

---

* G. CONTOPOULOS, N. VOGLIS, C. EFTHYMIOPOULOS, **Order and Chaos in Phase Space.**

Δύο παραδείγματα ἐπιφανειῶν τομῆς δίνονται στὸ σχ. 1 (a,b). Τὸ σχ. 1a ἀντιστοιχεῖ στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + y' \\ y' = y + \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi x \end{array}\right\} \pmod 1 \qquad (1)$$

ὅταν $K = 10$, ἐνῶ τὸ σχ. 1b ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀπεικόνιση τοῦ Hénon

$$\left.\begin{array}{l} x' = 1 - K' x - y \\ y' = x \end{array}\right\} \pmod 1 \qquad (2)$$

ὅταν $K' = 7.407$

2. Ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες καὶ φάσματα διαστολῆς καὶ ἑλικώσεως.

Πάνω στὴν ἐπιφάνεια τομῆς οἱ περιοδικὲς τροχιὲς παρίστανται σὰν σημεῖα. Π.χ. τὸ σημεῖο ($x_o = y_o = 0$) στὴν τυπικὴ ἐπεικόνιση εἶναι μιὰ περιοδικὴ τροχιὰ περιόδου 1. Στὴν ἀπεικόνιση τοῦ Hénon ἡ περιοδικὴ τροχιὰ περιόδου 1 βρίσκεται στὸ σημεῖο ($x_o = y_o = 0.256444$). Οἱ τροχιὲς αὐτὲς εἶναι ἀσταθεῖς. Τὰ σχήματα 1a, 1b δίνουν τὶς ἀσταθεῖς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες ἀπὸ τὶς ἁπλὲς περιοδικὲς τροχιὲς περιόδου 1. Ὅπως βλέπουμε οἱ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες καὶ στὶς δύο περιπτώσεις γεμίζουν ὅλον τὸν χῶρο τῶν φάσεων, ἀλλὰ κατὰ πολὺ διαφορετικὸ τρόπο.

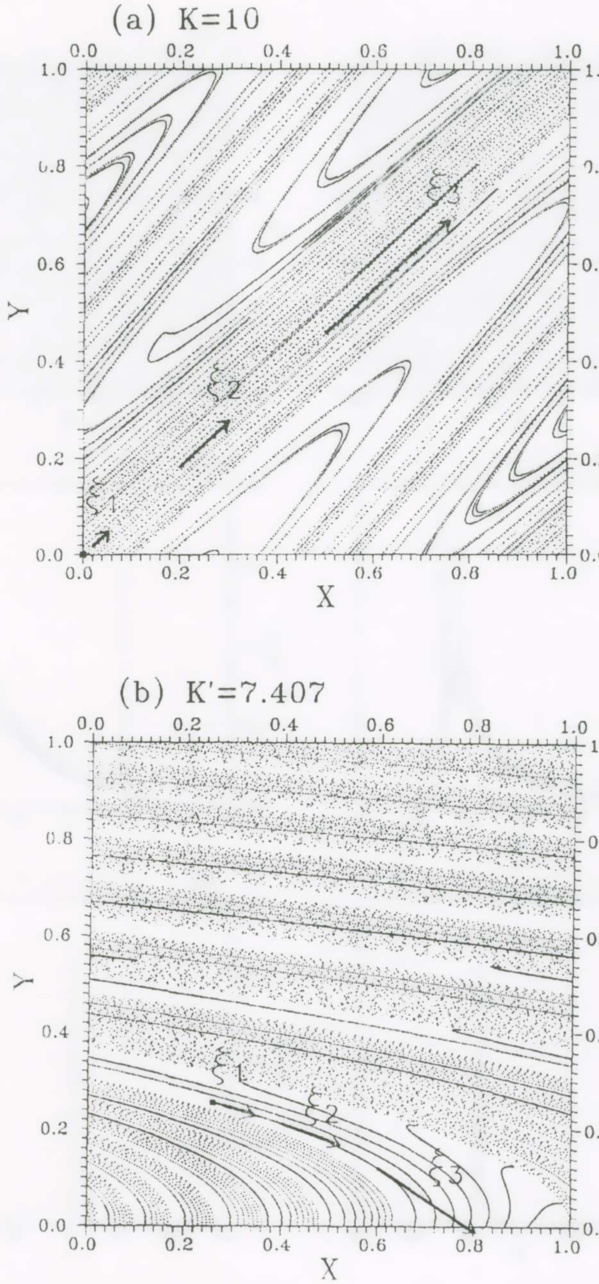
Ἂν πάρουμε ἕνα μικρὸ διάνυσμα ξ_1 πάνω στὴν ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη καὶ κοντὰ στὴν περιοδικὴ τροχιά, οἱ διαδοχικές του εἰκόνες εἶναι ξ_2, ξ_3,.....ξ_n. Ὁρίζουμε τότε δύο βασικὰ ποσά: (α) τὸν «ἀριθμὸ διαστολῆς»

$$\alpha_n = \ln|\xi_{n+1}/\xi_n|\,, \qquad (3)$$

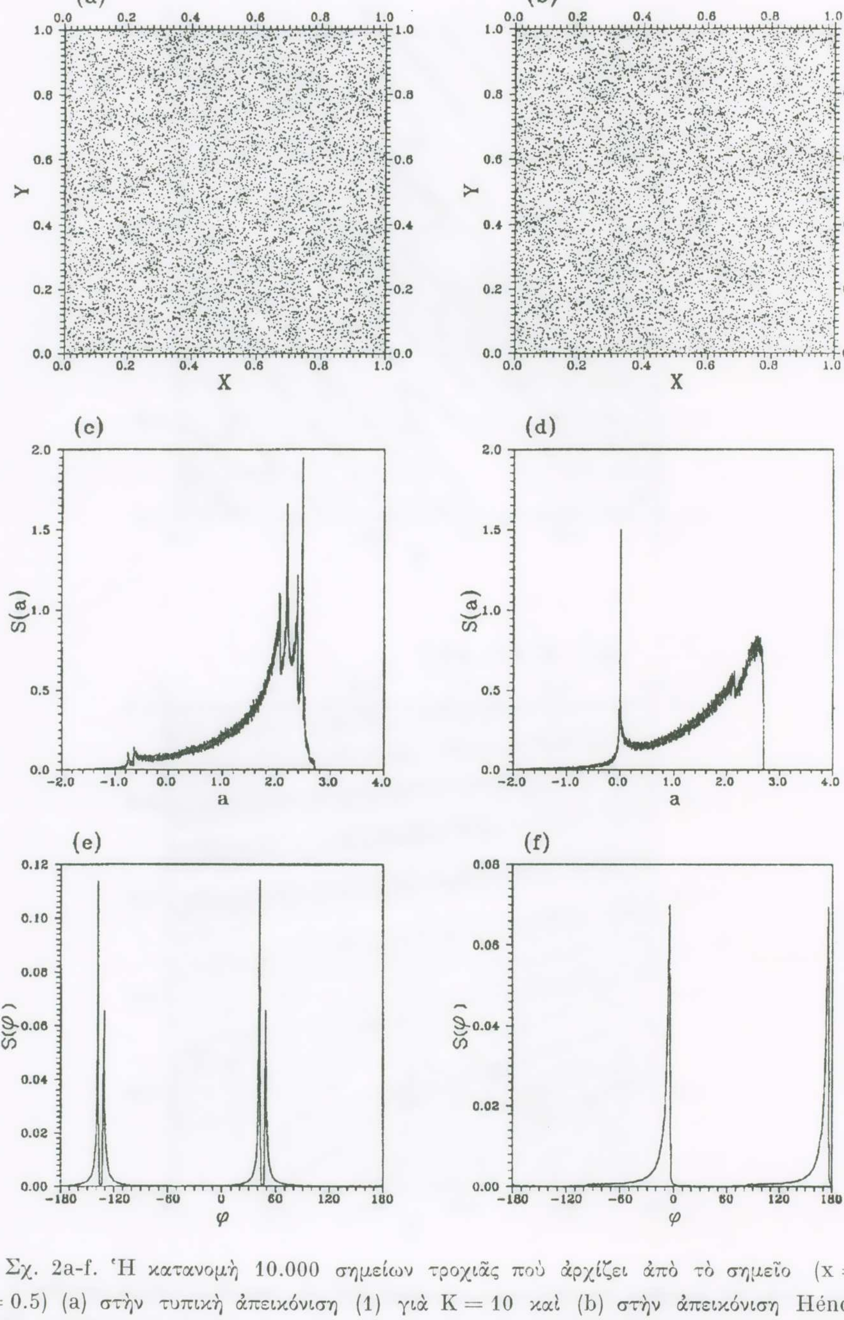
ποὺ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ λόγου τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων ξ_{n+1} καὶ ξ_n, καὶ (β) τὴν γωνία φ_n τοῦ διανύσματος ξ_n με τὸν ἄξονα x, ποὺ λέγεται γωνία ἑλικώσεως.

Οἱ κατανομὲς τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς καὶ τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως δίνουν τὰ ἀντίστοιχα φάσματα. Στὰ σχήματα 2 δίνουμε τὴν κατανομὴ 10.000 εἰκόνων τοῦ ἰδίου ἀρχικοῦ σημείου ($x = 0.1$, $y = 0.5$) στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση καὶ στὴν ἀπεικόνιση Hénon (σχ. 2a,b), καὶ τὰ ἀντίστοιχα φάσματα τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς (σχ. 2c,d) καὶ τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως (σχ. 2e,f).

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν σημείων στὰ σχήματα 2a καὶ b εἶναι πολὺ ὅμοια καὶ μάλιστα μοιάζει πολὺ μὲ μία τυχαία κατανομή. Ὅμως τὰ φάσματα τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς καὶ τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως τῶν δύο ἀπεικονίσεων εἶναι πολὺ διαφορετικά. Εἶναι γνωστὸ (Voglis and Contopoulos 1994) ὅτι ἡ μέση τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ διαστολῆς εἶναι ἴση μὲ τὸν χαρακτηριστικὸ ἀριθμὸ Lyapunov τοῦ συστή-



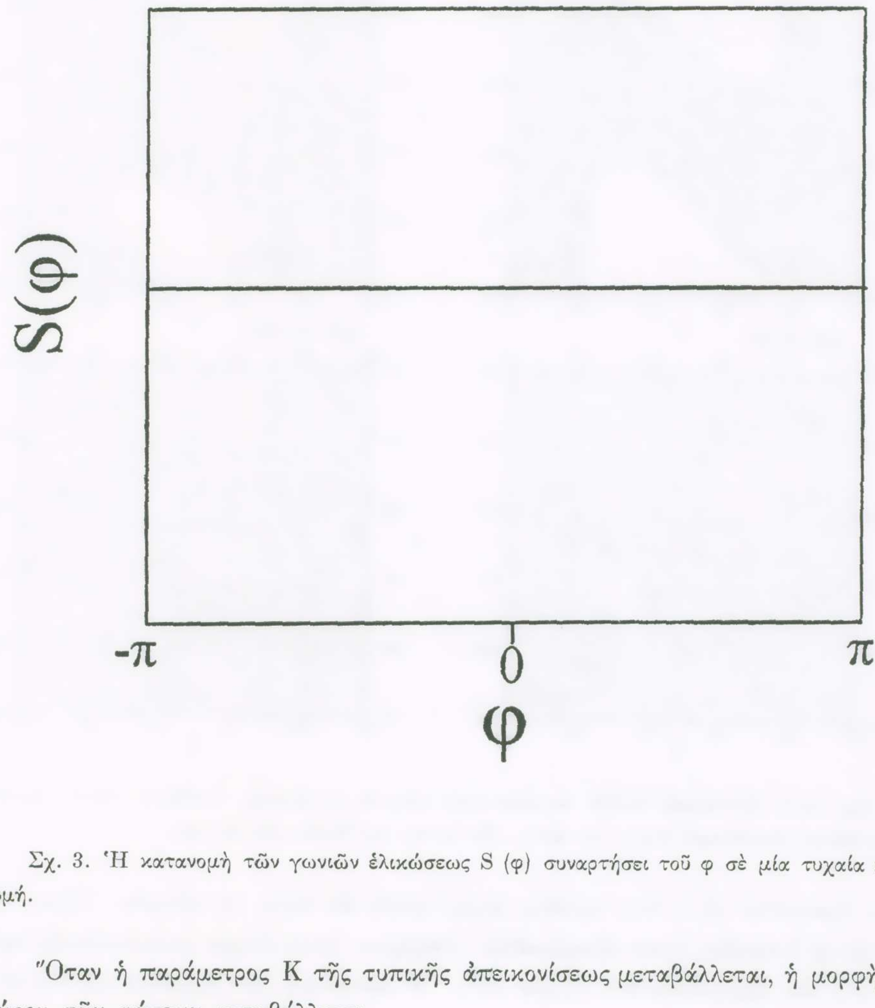
Σχ. 1a-b. Οἱ ἀσταθεῖς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες ἀπὸ τὴν περιοδικὴ τροχιὰ περιόδου 1 στὶς περιπτώσεις (a) τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως (1) γιὰ $K = 10$, καὶ (b) τῆς ἀπεικονίσεως Hénon (2) γιὰ $K' = 7.407$.



Σχ. 2a-f. Ἡ κατανομὴ 10.000 σημείων τροχιᾶς ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ σημεῖο (x = 0.1, y = 0.5) (a) στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση (1) γιὰ K = 10 καὶ (b) στὴν ἀπεικόνιση Hénon (2) γιὰ K′ = 7.407, καθὼς καὶ τὰ ἀντίστοιχα φάσματα ἀριθμῶν διαστολῆς (c καὶ d) καὶ γωνιῶν ἑλικώσεως (e καὶ f).

ματος. Στὶς δύο περιπτώσεις ποὺ μελετοῦμε $K = 10$ καὶ $K' = 7.407$ ὁ ἀριθμὸς Lyapunov εἶναι ὁ ἴδιος LCN=1.620. Ἐν τούτοις ἡ κατανομὴ τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς γύρω ἀπὸ τὴν τιμὴ LCN εἶναι πολὺ διαφορετική.

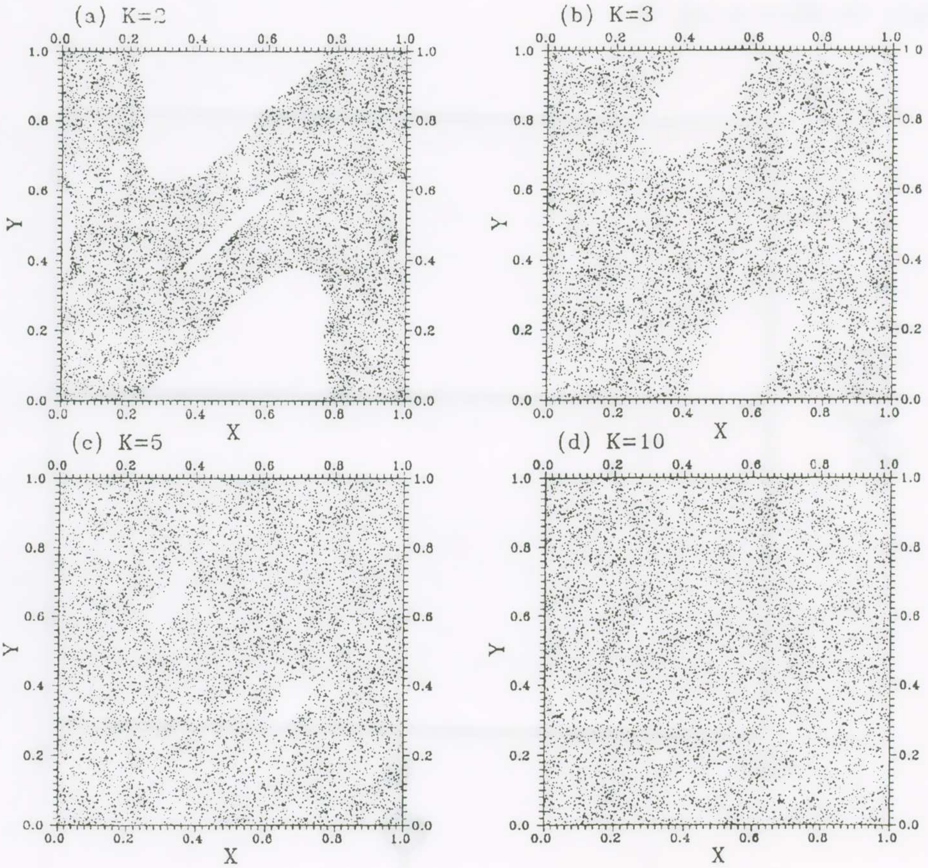
Ἐξ ἄλλου τὰ φάσματα μιᾶς τυχαίας κατανομῆς εἶναι ἐντελῶς διαφορετικὰ καὶ ἀπὸ τὶς δύο κατανομὲς 2c,d καὶ 2e,f. Πράγματι ὁ χαρακτηριστικὸς ἀριθμὸς Lyapunov μιᾶς τυχαίας κατανομῆς εἶναι ἄπειρος, ἐνῶ οἱ γωνίες ἑλικώσεως εἶναι τυχαῖες, καὶ κατὰ συνέπεια τὸ φάσμα τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως εἶναι μία εὐθεία παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα φ (σχ. 3).



Σχ. 3. Ἡ κατανομὴ τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως S (φ) συναρτήσει τοῦ φ σὲ μία τυχαία κατανομή.

Ὅταν ἡ παράμετρος K τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως μεταβάλλεται, ἡ μορφὴ τοῦ χώρου τῶν φάσεων μεταβάλλεται.

Στὸ σχ. 4 συγκρίνουμε τὶς κατανομὲς τῶν 10.000 σημείων μιᾶς χαοτικῆς τροχιᾶς μὲ τὶς ἴδιες ἀρχικὲς συνθῆκες ($x = 0.1$, $y = 0.5$) καὶ K=2,3,5 καὶ 10. Γιὰ σχετικῶς μικρὰ K ὑπάρχουν μεγάλες λευκὲς περιοχὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ νησίδες εὐσταθείας στὶς ὁποῖες ἡ χαοτικὴ τροχιὰ δὲν μπορεῖ νὰ εἰσέλθει. Καθὼς τὸ K μεγαλώνει οἱ νησίδες μικραίνουν. Π.χ. γιὰ K = 3 ὑπάρχει μία μόνον νησίδα (ἡ μισὴ φαίνεται στὸ κάτω μέρος ἐνῶ ἡ ἄλλη μισὴ στὸ ἐπάνω μέρος). Γιὰ K=5 ἡ νησίδα



Σχ. 4a-d. Κατανομὴ 10.000 σημείων μιᾶς τροχιᾶς μὲ ἀρχικὲς συνθῆκες ($x=0.1, y=0.5$) στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση ὅταν: (a) K=2, (b) K=3, (c) K=5, (d) K=10.

αὐτὴ διασπᾶται σὲ 2 ἴσες νησίδες, συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸ κέντρον. Τέλος γιὰ K=10 οἱ 2 νησίδες ἔχουν ἐξαφανισθεῖ. Ὑπάρχουν ὅμως ἀκόμη μικροσκοπικὲς νησίδες ποὺ δὲν ξεχωρίζουν στὸ σχῆμα αὐτό. Ἡ κατανομὴ τῶν σημείων πάντως εἶναι σχεδὸν τυχαία.

Γιὰ μεγαλύτερα Κ ἡ κατανομὴ τῶν σημείων τῆς χαοτικῆς τροχιᾶς εἶναι πολὺ ὅμοια πρὸς τὴν περίπτωση Κ=10.

Γιὰ νὰ ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα τὸν χῶρο τῶν φάσεων δίνουμε στὸ σχ. 5 τὶς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς (x = y = 0) γιὰ διάφορες τιμὲς τοῦ Κ. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ καμπύλες αὐτὲς ἀλλάζουν καθὼς τὸ Κ αὐξάνει. Π.χ. γιὰ Κ=2 οἱ καμπύλες αὐτὲς ἀφήνουν μεγάλα κενά, τὰ ὁποῖα μικραίνουν καθὼς τὸ Κ μεγαλώνει.

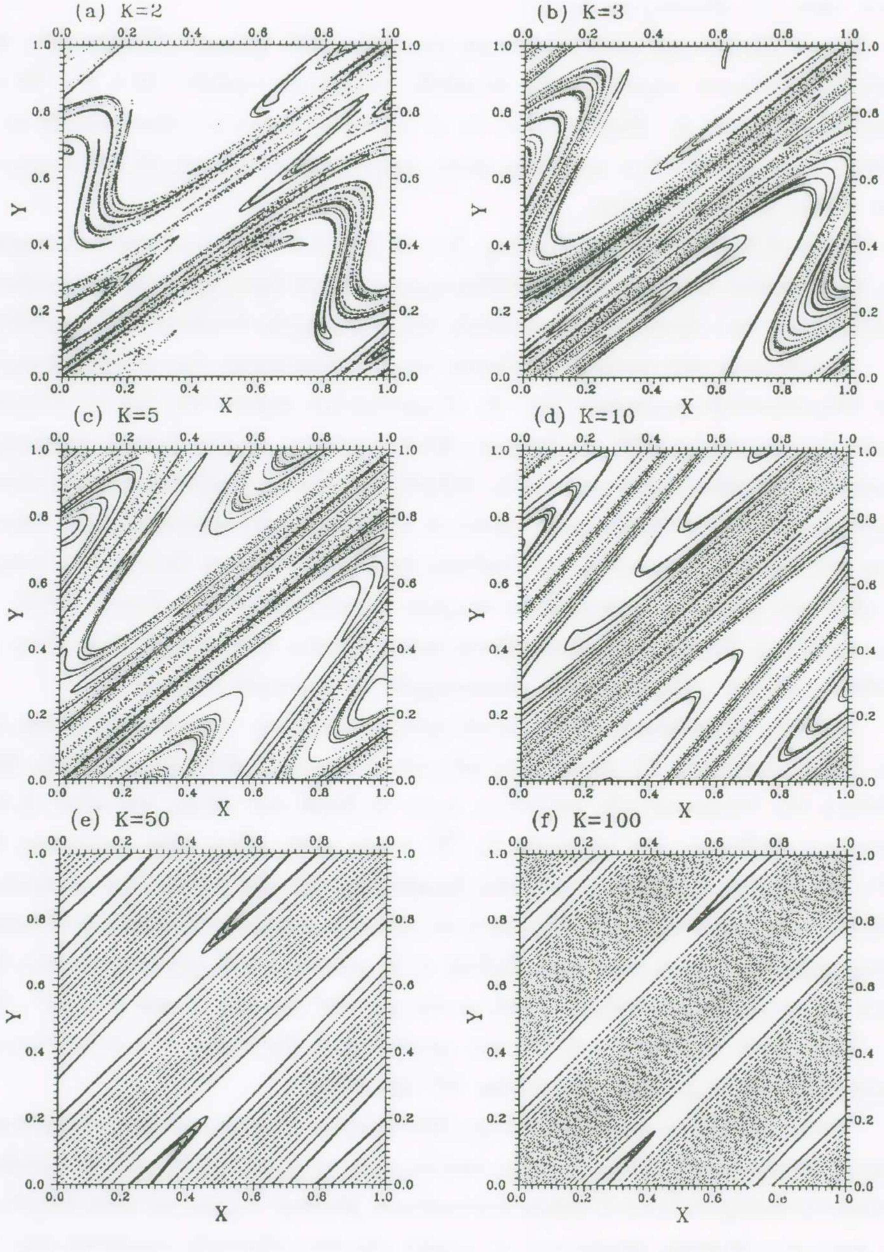
Ὅταν τὸ Κ γίνει πολὺ μεγάλο (π.χ. Κ = 50 ἢ Κ = 100), οἱ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες ἔχουν πολλὰ τμήματα σχεδὸν εὐθύγραμμα, πάντοτε ὅμως ἔχουν σημεῖα μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, ποὺ προκαλοῦν ἀντιστροφὴ τῆς πορείας τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης.

Τὰ φάσματα τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως (σχ. 6) προκύπτουν ἄμεσα ἀπὸ τὴ μορφὴ τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν (σχ. 5). Παρατηροῦμε πρῶτον ὅτι ὅλα τὰ φάσματα ἔχουν μία συμμετρία 180° ὡς πρὸς φ. Αὐτὴ ὀφείλεται σὲ ἕνα βασικὸ χαρακτηριστικὸ τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν, δηλαδὴ στὸ ὅτι οἱ ἀναδιπλώσεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν δημιουργοῦν, κοντὰ σὲ κάθε τόξο μιᾶς καμπύλης, τόξα παράλληλα ποὺ διαγράφονται κατὰ τὴν ἀντίθετη διεύθυνση. Αὐτὴ ἡ ἰδιότης δὲν ὑπάρχει ἐν γένει στὰ φάσματα ὀργανωμένων τροχιῶν (Contopoulos and Voglis 1999). Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐμφανίζεται στὰ φάσματα τῶν σχημάτων 6 εἶναι μία ἀπόδειξη ὅτι τὰ φάσματα αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν σὲ χαοτικὲς τροχιές.

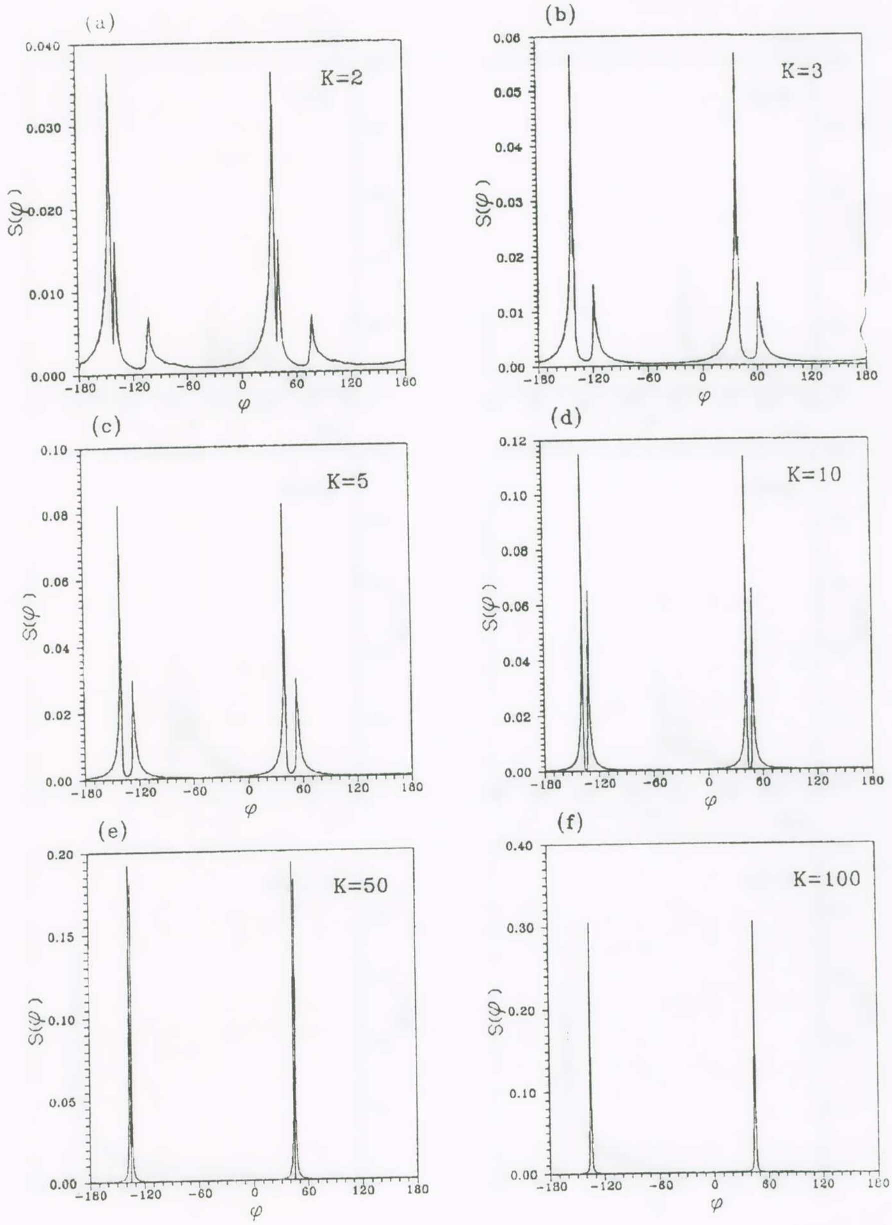
Δεύτερη παρατήρηση εἶναι ὅτι τὰ φάσματα τοῦ σχ. 6 χαρακτηρίζονται ἀπὸ δύο ζεύγη μεγίστων. Τὸ μεγαλύτερο μέγιστο ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀρχικὴ γωνία διευθύνσεως τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πάνω, ποὺ εἶναι ἡ ἐπικρατοῦσα διεύθυνση στὰ σχήματα 5. Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι λίγο μικρότερη ἀπὸ 45°. Τὸ δεύτερο (μικρότερο) μέγιστο ἐμφανίζεται σὲ μία γωνία λίγο μεγαλύτερη ἀπὸ 45°, καὶ ἀντιστοιχεῖ στὰ τόξα κατὰ τὰ ὁποῖα ἐπιστρέφουν οἱ καμπύλες οἱ παράλληλες πρὸς τὴν ἀρχικὴ διεύθυνση. Καθὼς τὸ Κ αὐξάνει, τὰ 4 μέγιστα γίνονται ὀξύτερα καὶ πλησιάζουν ἑκατέρωθεν στὴ γωνία φ = 45° καὶ στὴ γωνία φ = 45° - 180° = -135°. Αὐτὸ ὀφείλεται στὸ ὅτι γιὰ μεγάλα Κ ἡ διεύθυνση τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν πλησιάζει πρὸς τὶς γωνίες 45° καὶ –135°.

Ὅταν τὸ Κ εἶναι μικρὸ (Κ = 2, σχ. 6a) τὰ κύρια μέγιστα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν ἀρχικὴ διεύθυνση τῆς ἀσυμπτωτικῆς καπύλης καὶ τὴν ἀντίθεσή της, ἐξακολουθοῦν νὰ ὑπάρχουν, ὑπάρχουν ὅμως 2 ἀκόμη δευτερεύοντα μέγιστα Ὅμως καὶ αὐτὰ ἐξηγοῦνται ἂν παρακολουθήσουμε προσεκτικὰ τὴ μορφὴ τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης (σχ. 5a).

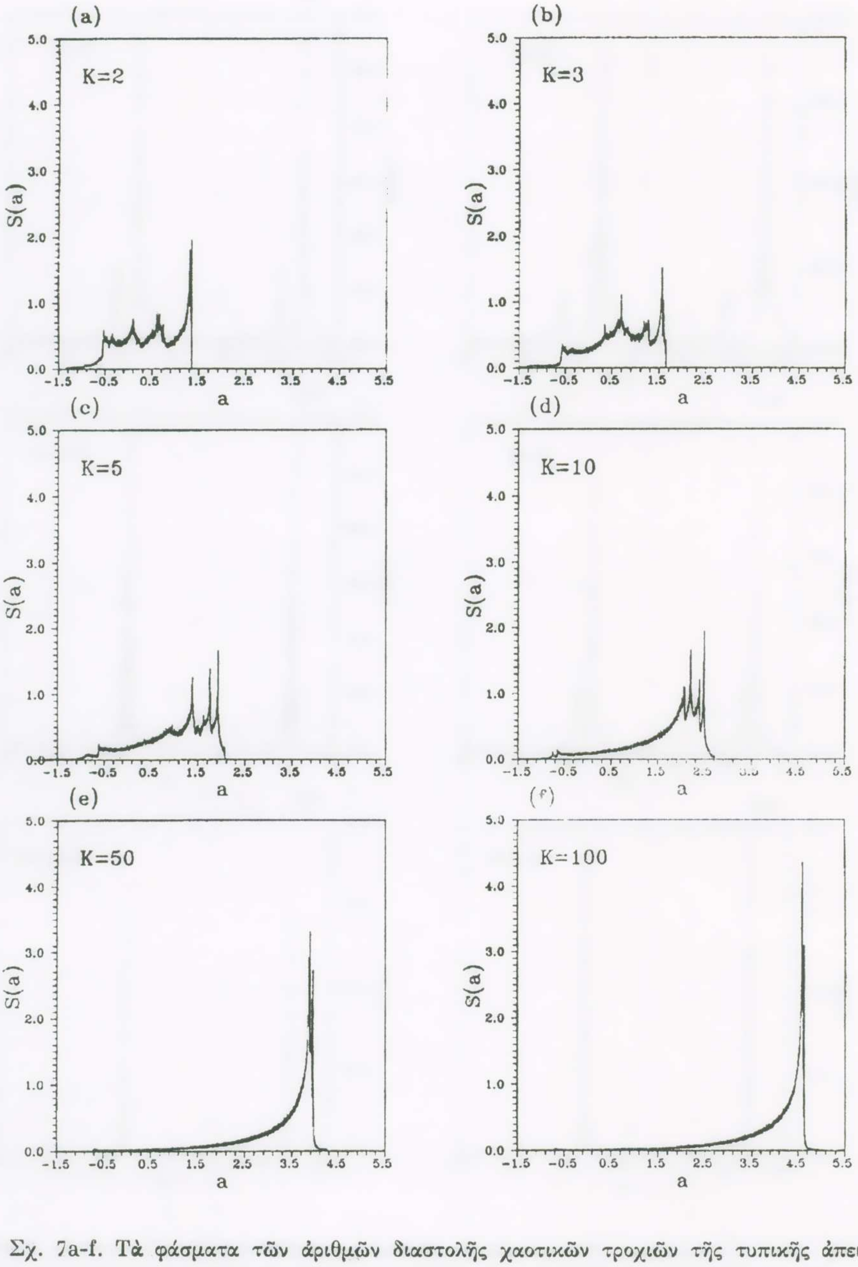
Τὰ φάσματα τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς δίνονται στὸ σχ. 7. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ μεγάλα Κ (σχ. 7e,f) ἔχουμε δύο βασικὰ μέγιστα γιὰ μεγάλα θετικὰ a καὶ πολὺ κοντὰ μεταξύ τους. Γιὰ μικρότερα Κ ἔχουμε περισσότερα μέγιστα (σχ. 7a,b,c,d).



Σχ. 5a-f. Οἱ ἀσταθεῖς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς περιοδικῆς τροχιᾶς (x=y=0) τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως ὅταν: (a) K = 2, (b) K = 3, (c) K=5, (d) K=10 (e) K=50, (f) K=100.



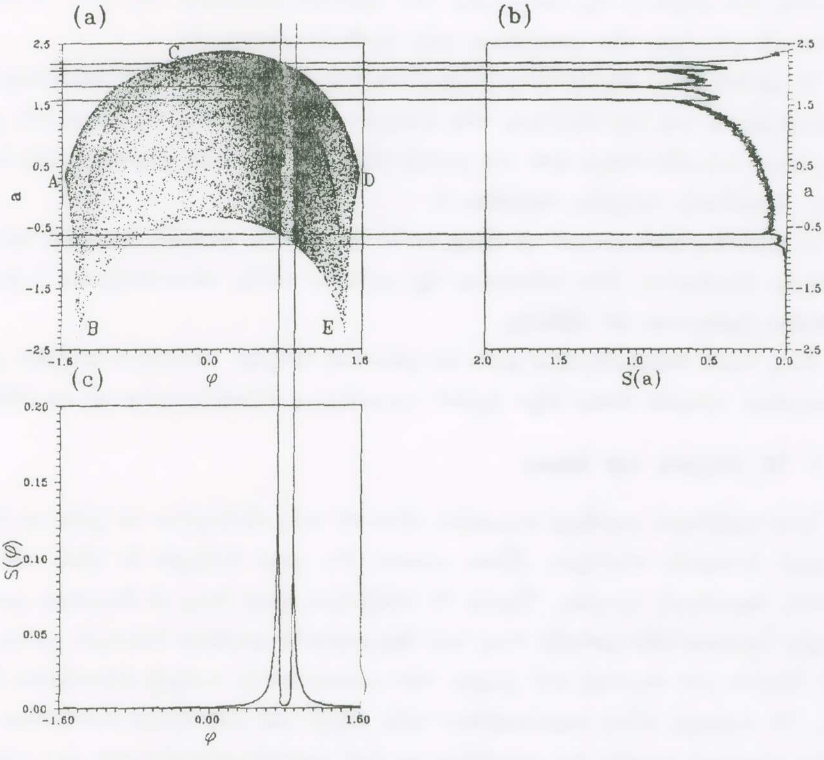
Σχ. 6a-f. Τὰ φάσματα τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως χαοτικῶν τροχιῶν τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως ὅταν (a) K=2, (b) K=3, (c) K=5, (d) K=10, (e) K=50, (f) K=100.



Σχ. 7a-f. Τὰ φάσματα τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς χαοτικῶν τροχιῶν τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως ὅταν (a) K=2, (b) K=3, (c) K=5, (d) K=10, (e) K=50, (f) K=100.

Γενικὰ τὰ φάσματα μετατοπίζονται πρὸς μεγαλύτερα a ὅταν τὸ K αὐξάνει. Αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ σὲ μεγαλύτερους χαρακτηριστικοὺς ἀριθμοὺς Lyapunov καὶ σὲ μεγαλύτερες ἰδιοτιμὲς τῆς περιοδικῆς τροχιᾶς ($x_o = y_o = 0$). Οἱ αὐξήσεις αὐτὲς εἶναι ἀναμενόμενες διότι γιὰ μεγαλύτερα K ἡ μὴ γραμμικότης τοῦ συστήματος καὶ τὸ ἀντίστοιχο χάος εἶναι μεγαλύτερα.

Γιὰ νὰ ἐξηγήσουμε τὰ ἐπὶ μέρους μέγιστα τοῦ φάσματος τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς χρησιμοποιήσαμε ἕνα διάγραμμα (a,φ) ποὺ δίνει τὸν ἀριθμὸ διαστολῆς a συναρτήσει τῆς γωνίας ἑλικώσεως φ (σχ. 8). Τὰ σημεῖα τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ εἶναι



Σχ. 8a-c (a) Ἡ κατανομὴ 40.000 σημείων μιᾶς χαοτικῆς τροχιᾶς στὸ διάγραμμα (φ,a) καὶ τὰ φάσματα (b) τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς καὶ (c) τῶν γωνιῶν ἑλικώσεως. Οἱ εὐθεῖες γραμμὲς ποὺ συνδέουν τὰ σχήματα (b) καὶ (c) μὲ τὸ (a) δείχνουν τὶς ἀντιστοιχίες τῶν μεγίστων τῶν φασμάτων μὲ τὰ μέγιστα πυκνότητος στὸ σχῆμα (a).

συγκεντρωμένα σὲ μία ζώνη ποὺ περιορίζεται ἀπὸ ὁρισμένες ὁριακὲς καμπύλες, μία κάτω (BE) μία δεξιὰ (ED), μία ἀριστερὰ (AB) καὶ δύο ἐπάνω (AC) καὶ (CD). Οἱ καμπύλες αὐτὲς δίνονται ἀναλυτικὰ καὶ ἔχουν τὶς ἰδιότητες τῶν καυστικῶν καμπυλῶν (Contopoulos et al 1999). Οἱ δύο καμπύλες τοῦ μεγίστου (AC) καὶ (CD) τέμνονται καὶ συνεχίζουν μέσα στὴν περιοχὴ ποὺ καλύπτεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τροχιᾶς.

Ἡ πυκνότης τῶν σημείων εἶναι μέγιστη (α) κοντὰ στὶς καυστικὲς καὶ (β) κυρίως κατὰ μῆκος τῶν διευθύνσεων φ ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ μέγιστα τοῦ φάσματος ἑλικώσεως (γραμμὲς ποὺ ἀποτελοῦν ἐπέκταση τῶν εὐθειῶν τῶν μεγίστων ἀπὸ τὸ σχ. 8c μέσα στὸ σχ. 8a).

Ἐκεῖ ποὺ οἱ γραμμὲς τῶν μεγίστων πυκνότητος τέμνονται στὸ σχ. 8a ἔχουμε μέγιστα στὴν τοπικὴ συγκέντρωση τῶν σημείων καὶ αὐτὰ ἀκριβῶς τὰ μέγιστα προβάλλονται στὰ μέγιστα τῆς κατανομῆς τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς (σχ. 8b). Ἔτσι ἐξηγοῦνται τὰ μέγιστα τῶν φασμάτων τῶν ἀριθμῶν διαστολῆς.

Ἡ μέθοδος ποὺ περιγράψαμε ἐξηγεῖ τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῶν φασμάτων. Ἡ πληροφορία γιὰ τὴν ἐξήγηση τῶν φασμάτων δίνεται ἀπὸ τὴν δομὴ τοῦ χώρου τῶν φάσεων καὶ εἰδικότερα ἀπὸ τὴν μορφὴ τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης τῆς ἁπλούστερης περιοδικῆς τροχιᾶς περιόδου 1.

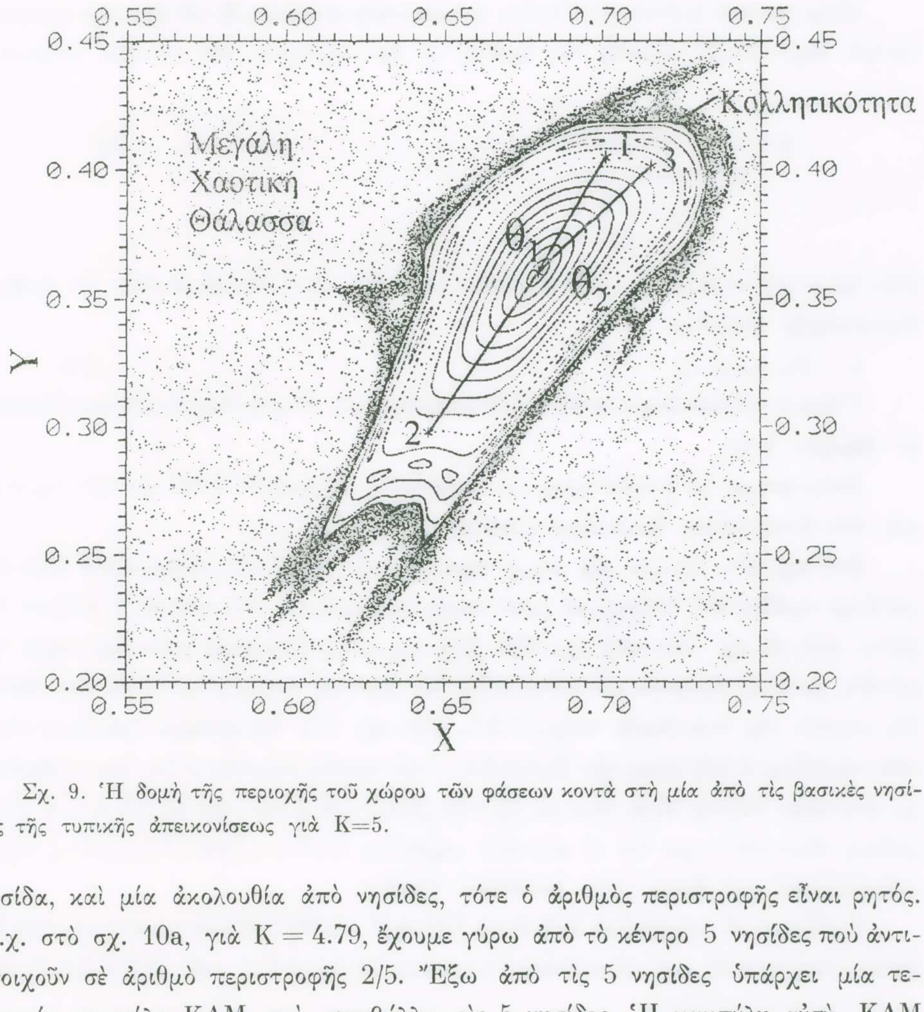
Ἡ μέθοδος αὐτὴ μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ γενικώτερα σὲ κάθε δυναμικὸ σύστημα 2 βαθμῶν ἐλευθερίας. Μία ἐπέκταση τῆς μεθόδου αὐτῆς σὲ συστήματα 3 βαθμῶν ἐλευθερίας βρίσκεται σὲ ἐξέλιξη.

Ἕως τώρα ἀναφερθήκαμε μόνο σὲ χαοτικὲς τροχιές. Ἀνάλογα ἰσχύουν καὶ σὲ ὀργανωμένες τροχιὲς ὅπως εἶχε βρεθεῖ παλαιότερα (Contopoulos et al 1997).

3. **Ἡ Αὔξηση τοῦ Χάους**

Ἕνα πρόβλημα μεγάλης σημασίας εἶναι τὸ πῶς εἰσέρχεται τὸ χάος σὲ ἕνα μὴ γραμμικὸ δυναμικὸ σύστημα. Εἶναι γνωστὸ ὅτι χάος ὑπάρχει ἐν γένει κοντὰ σὲ ἀσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές. Ὅμως τὸ πρόβλημα εἶναι πῶς οἱ διάφορες χαοτικὲς περιοχὲς ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους καὶ δημιουργοῦν μεγάλες περιοχὲς χάους. Στὸ σχ. 9 δίνεται μία περιοχὴ τοῦ χώρου τῶν φάσεων στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση (1) μὲ $K=5$. Ἡ περιοχὴ αὐτὴ περιλαμβάνει τρία μέρη: (α) μία νησίδα εὐσταθείας γύρω ἀπὸ ἕνα κεντρικὸ σημεῖο ποὺ περιβάλλεται ἀπὸ κλειστὲς ἀμετάβλητες καμπύλες καὶ διάφορες δευτερεύουσες νησίδες, (β) μία μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα ποὺ ἐκτείνεται σὲ μεγάλη ἔκταση γύρω ἀπὸ τὴ νησίδα, καὶ (γ) μία περιοχὴ «κολλητικότητος» (stickiness) ὅπου μία τροχιὰ παραμένει γιὰ μεγάλο χρονικὸ διάστημα πρὶν διαφύγει πρὸς τὴν ἐξωτερικὴ χαοτικὴ θάλασσα (σκιερὴ περιοχὴ ποὺ περιβάλλει τὴ νησίδα). Οἱ τροχιὲς αὐτὲς φαίνονται «κολλημένες» στὰ ὅρια τῆς νησίδος, πρὶν φύγουν πρὸς τὰ ἔξω. Τὸ πρόβλημα εἶναι πῶς ἐπικοινωνοῦν οἱ τροχιὲς τῆς περιοχῆς κολλητικότητος μὲ τὴν μεγάλη ἐξωτερικὴ θάλασσα.

Κάθε ἀμετάβλητη καμπύλη (ἢ καμπύλη KAM, ἀπὸ τοὺς Kolmogorov, Arnold καὶ Moser) ἔχει ἕνα ὡρισμένο «ἀριθμὸ περιστροφῆς» ποὺ εἶναι ἴσος μὲ τὴν μέση γωνία στροφῆς τῶν εὐθειῶν ποὺ συνδέουν τὸ κεντρικὸ σημεῖο τῆς νησίδος μὲ τὰ διαδοχικὰ σημεῖα μιᾶς τροχιᾶς πάνω στὴν ἀμετάβλητη καμπύλη (γωνίες ὅπως οἱ θ_1, θ_2 στὸ σχ. 9). Ὅταν ἔχουμε μία δευτερεύουσα περιοδικὴ τροχιὰ μέσα στὴ



Σχ. 9. Ἡ δομὴ τῆς περιοχῆς τοῦ χώρου τῶν φάσεων κοντὰ στὴ μία ἀπὸ τὶς βασικὲς νησίδες τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως γιὰ K=5.

νησίδα, καὶ μία ἀκολουθία ἀπὸ νησίδες, τότε ὁ ἀριθμὸς περιστροφῆς εἶναι ρητός. Π.χ. στὸ σχ. 10a, γιὰ $K = 4.79$, ἔχουμε γύρω ἀπὸ τὸ κέντρο 5 νησίδες ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἀριθμὸ περιστροφῆς 2/5. Ἔξω ἀπὸ τὶς 5 νησίδες ὑπάρχει μία τελευταία καμπύλη KAM ποὺ περιβάλλει τὶς 5 νησίδες. Ἡ καμπύλη αὐτὴ KAM ὁρίζει τὰ ὅρια τῆς μεγάλης νησίδος καὶ δὲν ἐπιτρέπει τὴν ἐπικοινωνία τῆς ἐξωτερικῆς χαοτικῆς θάλασσας μὲ τὸ ἐσωτερικὸ τῆς νησίδος. Ἔτσι, παρ' ὅλον ὅτι μεταξὺ τῶν 5 νησίδων ὑπάρχει μία πενταπλὴ ἀσταθὴς περιοδικὴ τροχιὰ ποὺ συνοδεύεται ἀπὸ 5 μικρὲς χαοτικὲς περιοχές, δὲν ὑπάρχει ἐπικοινωνία μεταξὺ τῶν χαοτικῶν αὐτῶν περιοχῶν καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ χάους.

Ὅταν ὅμως τὸ K μεγαλώσει λίγο (σχ. 10b γιὰ K=4.8), ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη KAM ποὺ περιβάλλει τὶς 5 νησίδες ἔχει καταστραφεῖ καὶ τὸ ἐξωτερικὸ χάος διεισδύει στὶς 5 περιοχὲς μεταξὺ τῶν 5 νησίδων. Τότε ἡ τελευταία καμπύλη KAM ποὺ ὁρίζει τὰ ὅρια τῆς κεντρικῆς νησίδος εἶναι μέσα ἀπὸ τὶς 5 νησίδες καὶ ἄρα πολὺ μικρότερη ἀπὸ τὴν τελευταία καμπύλη KAM τῆς περιπτώσεως τοῦ σχ. 10a.

Εἶναι γνωστὸ (Greene 1979) ὅτι ἡ τελευταία καμπύλη KAM ἔχει ἕνα «εὐγενὴ» ἀριθμὸ περιστροφῆς δηλαδὴ ἕνα ἀριθμό, a, ποὺ γράφεται σὰν συνεχὲς κλάσμα

$$a = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} \tag{4}$$

ὅπου τὰ a_i γιὰ μεγάλα i (i > N γιὰ κάποιο δοθὲν N) εἶναι ἴσα μὲ μονάδα. Ὁ ἀριθμὸς περιστροφῆς γράφεται

$$a = [a_1, a_2, a_3, \dots] \tag{5}$$

Ὅταν ἡ τελευταία καμπύλη KAM καταστραφεῖ, γίνεται ἕνας δακτύλιος Cantor* μὲ ἄπειρες ὀπές.

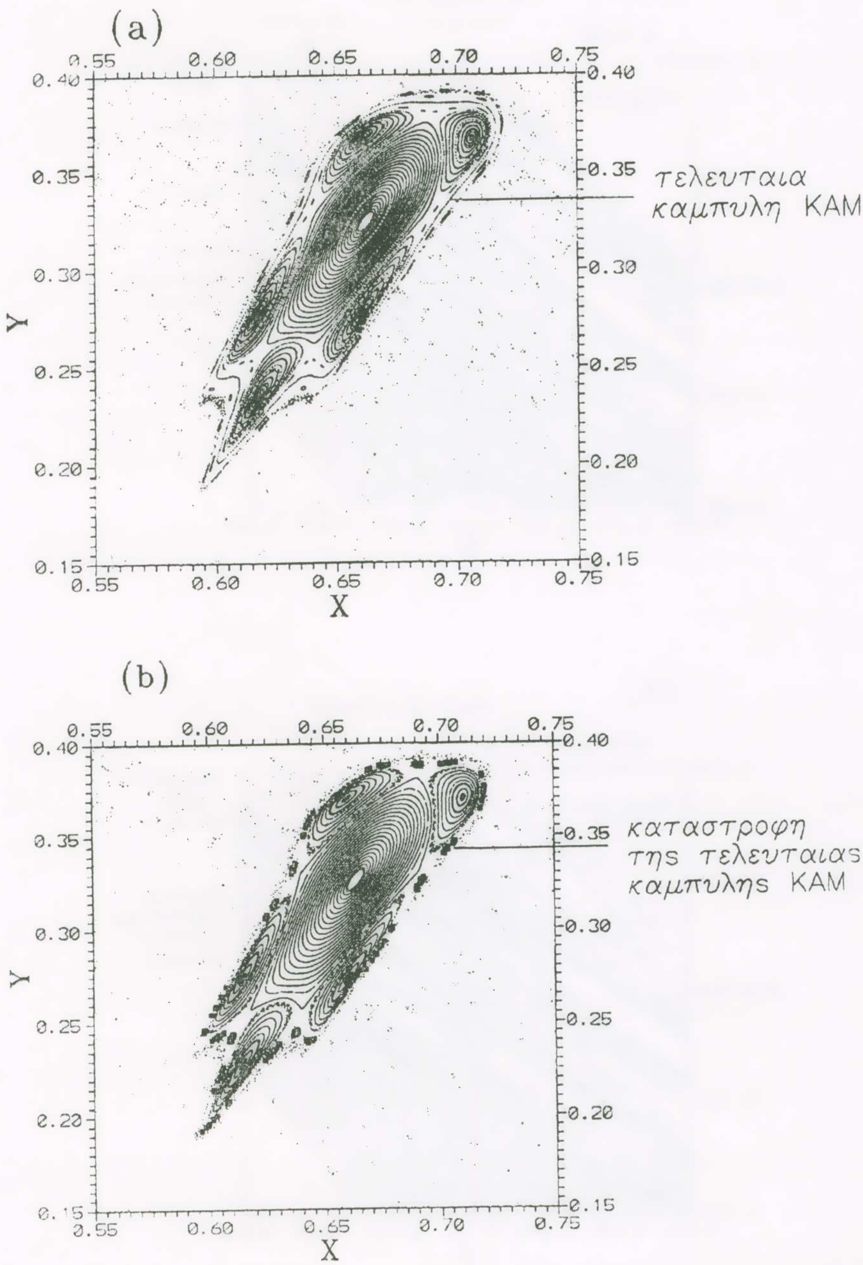
Μελετήσαμε τὴν καταστροφὴ τῶν «εὐγενῶν» καμπυλῶν KAM καὶ τὴν δημιουργία τῶν ἀντιστοίχων δακτυλίων Cantor.

Στὸ σχ. 11a ἔχουμε μία μικρὴ περιοχὴ τοῦ χώρου τῶν φάσεων στὰ ὅρια τῆς μεγάλης νησίδος ποὺ δείχνει μὲ μεγαλύτερη λεπτομέρεια πῶς γίνεται ἡ αὔξηση τοῦ χάους ἀπὸ τὸ σχ. 10a στὸ σχ. 10b. Στὸ σχ. 11a,b βλέπουμε πάνω ἀριστερὰ τὴν μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα καὶ κάτω δεξιὰ μία χαοτικὴ περιοχὴ κοντὰ σὲ ἕνα ἀσταθὲς σημεῖο τῆς περιοδικῆς τροχιᾶς 2/5. Στὸ σχ. 11a διακρίνουμε διάφορες εὐγενεῖς καμπύλες KAM ὅπως τὴν [2,1,1,2,1...] (οἱ τελεῖες σημαίνουν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ a_i, ἀνωτέρας τάξεως εἶναι ἴσοι μὲ 1), τὴν [2,1,1,3,1..] καὶ τὴν [2,1,1,4,1..]. Συγχρόνως διαπιστώνουμε ὅτι οἱ εὐγενεῖς καμπύλες [2,1,1....] καὶ [2,1,1,5,1..] ἔχουν καταστραφεῖ καὶ ἔχουν γίνει δακτύλιοι Cantor.

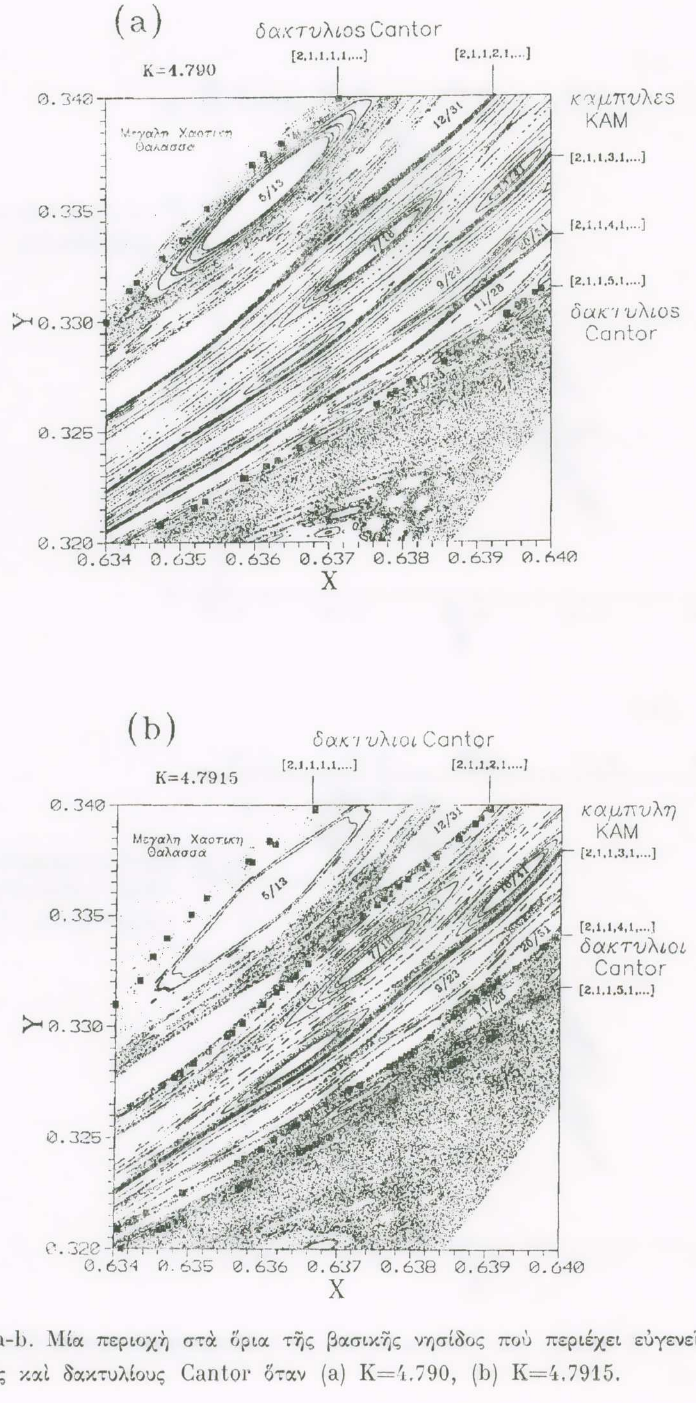
Καθὼς τὸ K μεγαλώνει ἀπὸ K=4.790 σὲ K=4.7915 βλέπουμε στὸ σχ. 11b ὅτι ἔχουν καταστραφεὶ καὶ οἱ εὐγενεῖς καμπύλες [2,1,1,2,1..] καὶ [2,1,1,4,1..] ἀπὸ

---

* Ἡ καμπύλη KAM ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα δακτύλιο (torus) σὲ 3 διαστάσεις. Ὅταν καταστραφεῖ ὁ δακτύλιος, ἔχει μία ἀπειρία ἀπὸ ὀπές, μένει ὅμως ἕνας ἀμετάβλητος δακτύλιος Cantor (cantorus). Ὀνομάζεται ἐπίσης cantorus τὸ ἀμετάβλητο σύνολο στὴν ἐπιφάνεια τομῆς μὲ ἄπειρες ὀπές.



Σχ. 10a-b. Ἡ περιοχὴ μιᾶς βασικῆς νησίδος μὲ 5 δευτερεύουσες νησίδες ὅταν (a) K=4.79 καὶ (b) K=4.8.



Σχ. 11a-b. Μία περιοχὴ στὰ ὅρια τῆς βασικῆς νησίδος ποὺ περιέχει εὐγενεῖς ἀμετάβλητες καμπύλες καὶ δακτυλίους Cantor ὅταν (a) K=4.790, (b) K=4.7915.

τὴν ἔξω καὶ τὴν μέσα πλευρὰ ἀντίστοιχα. Ἑπομένως τὸ χάος αὐξάνει τόσο ἔξω ἀπὸ τὴν τελευταία καμπύλη ΚΑΜ [2,1,1,3,1...] ὅσο καὶ μέσα ἀπὸ αὐτή. Τέλος ὅταν K=4.792 καὶ ἡ τελευταία εὐγενὴς καμπύλη (τελευταία ΚΑΜ) ἔχει καταστραφεῖ καὶ τὸ ἐξωτερικὸ χάρος ἐπικοινωνεῖ μὲ τὸ χάος γύρω ἀπὸ τὴν ἀσταθῆ τροχιὰ 2/5.

Ἕνα τελευταῖο σημεῖο ποὺ διευκρινήσαμε εἶναι τὸ πῶς γίνεται ἡ διέλευση τῶν τροχιῶν ἀπὸ τὰ χάσματα τῶν cantori ὅταν καταστραφεῖ καὶ ἡ τελευταία καμπύλη ΚΑΜ σὲ μία περιοχή. Μέχρι τώρα ἡ διάχυση διὰ μέσου τῶν cantori ἀντιμετωπίζονταν σὰν ἕνα στατιστικὸ φαινόμενο, ποὺ ἐθεωρεῖτο τυχαῖο. Ἐν τούτοις βρήκαμε ὅτι στὴν διάχυση μέσω τῶν δακτυλίων Cantor ὑπάρχει αὐστηρὴ νομοτέλεια.

Συγκεκριμένα μελετήσαμε τὴν δίοδο τροχιῶν διὰ μέσου τοῦ δακτυλίου Cantor a=[2,4,1,1..] ὅταν K=5. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἂν διακόψουμε τὸν εὐγενῆ ἀριθμὸ

$$a = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\dots}}} \tag{6}$$

σὲ διάφορα ἐπίπεδα ἔχουμε τοὺς ἀριθμοὺς

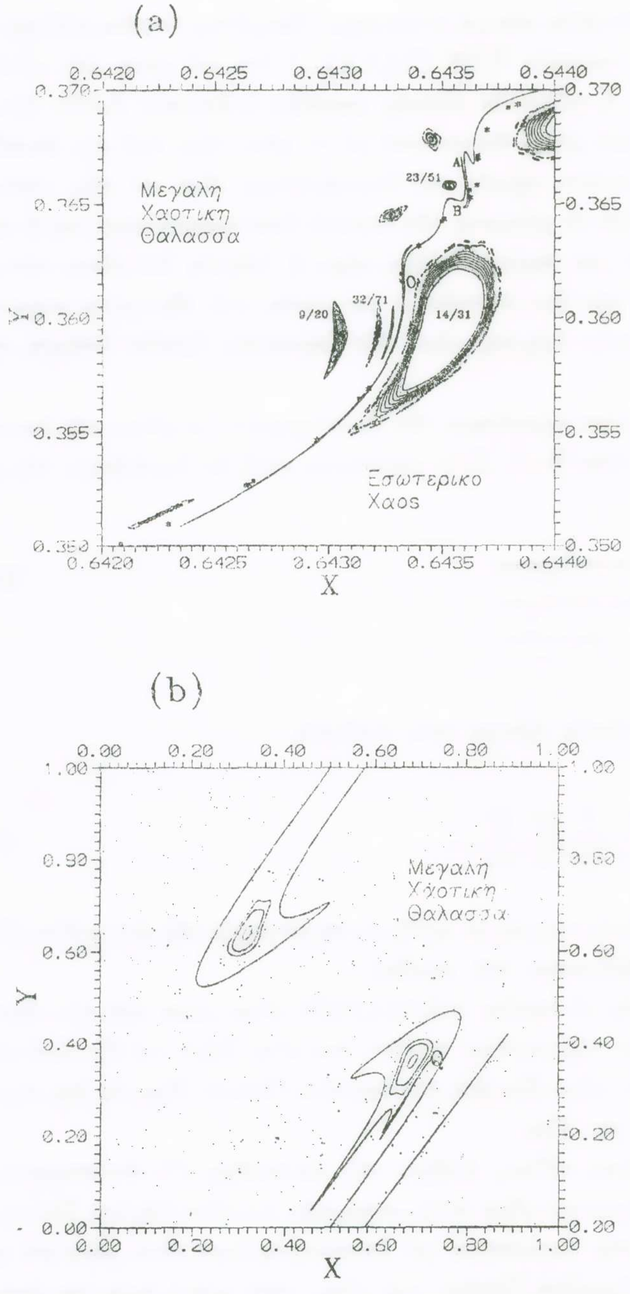
$$\frac{1}{2},\frac{4}{9},\frac{5}{11},\frac{9}{20},\frac{14}{31},\frac{23}{51},\dots\dots\dots \tag{7}$$

Οἱ περιοδικὲς τροχιὲς μὲ ἀριθμοὺς περιστροφῆς τῆς ἀκολουθίας (7) εἶναι εὐσταθεῖς καὶ περιβάλλονται ἀπὸ νησίδες.

Ἀπὸ αὐτὲς οἱ νησίδες 1/2,5/11,14/31 εἶναι μέσα ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor (πρὸς τὸ κέντρο τῆς μεγάλης νησίδος, ποὺ εἶναι δεξιὰ καὶ ἔξω ἀπὸ τὸ σχῆμα), ἐνῶ οἱ ἄλλες νησίδες εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor. Μερικὲς ἀπὸ τὶς νησίδες αὐτὲς φαίνονται στὸ σχ. 12a.

Οἱ ἀνωτέρας τάξεως ἀριθμοὶ τῆς ἀκολουθίας (7) ἀντιστοιχοῦν σὲ ἀσταθεῖς περιοδικὲς τροχιὲς ποὺ εἶναι πολὺ κοντὰ στὸν δακτύλιο Cantor. Στὸ σχ. 12a δύο ἀπὸ τὶς τροχιὲς αὐτὲς παρίστανται μὲ ἀστερίσκους ὅταν εἶναι μέσα καὶ μὲ τετράγωνα ἔξω ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor καὶ εἶναι τόσο κοντὰ πρὸς τὸν δακτύλιο Cantor ὥστε ὁρίζουν κατὰ προσέγγιση τὰ ὅρια τῶν χασμάτων του.

Γιὰ νὰ δοῦμε τώρα πῶς μία τροχιὰ διασχίζει τὸν δακτύλιο Cantor δὲν ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσουμε μία τυχαία τροχιὰ ποὺ ἀρχίζει μέσα ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor καὶ



Σχ. 12 a,b (a) Ἡ δίοδος διὰ μέσου τῶν χασμάτων ἑνὸς δακτυλίου Cantor ἀπὸ τὴν ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη μιᾶς ἐσωτερικῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς γιὰ K = 5. (b) Ὅταν ἐπεκταθεῖ ἡ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη φθάνει σὲ μεγάλες ἀποστάσεις μέσα στὴν μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα ποὺ περιβάλλει τὶς νησίδες εὐσταθείας.

καταλήγει ἔξω ἀπὸ αὐτόν, γιατὶ κατὰ τὴ στιγμὴ ποὺ ἡ τροχιὰ διασχίζει ἕνα χάσμα τοῦ δακτυλίου Cantor ἐν γένει τὸ σημεῖο τῆς τροχιᾶς εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τομῆς.

Ἔτσι ὑπολογίσαμε τὴν ἀμετάβλητη καμπύλη μιᾶς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς (τῆς 97/215) ποὺ εἶναι μέσα ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor. Τὸ ἀρχικὸ σημεῖο εἶναι τὸ O, καὶ ἡ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη ἀρχικὰ διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀριστερά. Ἡ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη κάνει μερικὲς ταλαντώσεις, ἀριστερὰ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ O ποὺ εἶναι σαφῶς ἀπὸ τὴν ἐσωτερικὴ πλευρὰ τοῦ δακτυλίου Cantor. Κατόπιν ὅμως διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ δεξιὰ κάνοντας ἐπίσης μερικὲς ταλαντώσεις καὶ βγαίνει σαφῶς ἀπὸ τὴν ἔξω πλευρὰ τοῦ δακτυλίου Cantor.

Ἂν συνεχίσουμε τὸν ὑπολογισμὸ τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης γιὰ μεγαλύτερο χρόνο (δηλαδὴ μεγαλύτερο μῆκος), βλέπουμε ὅτι ἡ καμπύλη κάνει πολλὲς ταλαντώσεις μέσα καὶ ἔξω ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor, τελικὰ ὅμως πηγαίνει σὲ μεγάλες ἀποστάσεις ἔξω ἀπὸ αὐτόν. Ὑπολογίσαμε ὅτι ἕνα μῆκος $\Delta S = 10^{-10}$ κοντὰ σὲ μία ἀσταθῆ περιοδικὴ τροχιὰ μέσα ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor χρειάζεται 6 περιόδους γιὰ νὰ φθάσει στὴν ἐξωτερικὴ χαοτικὴ θάλασσα.

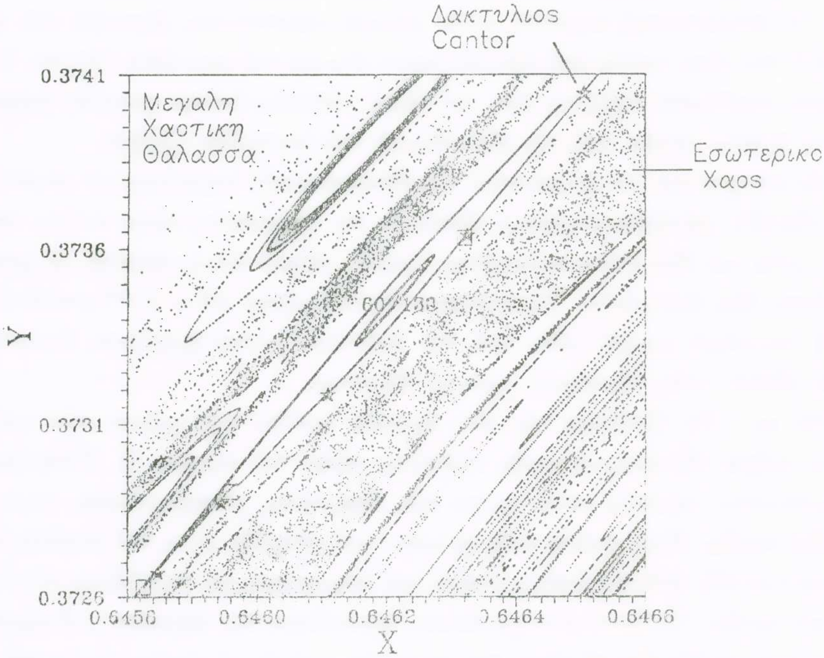
Στὸ σχ. 12b βλέπουμε τὶς δύο βασικὲς νησίδες τοῦ χώρου τῶν φάσεων καὶ ἕνα τμῆμα τῆς ἀσυμπτωτικῆς καμπύλης πέραν τοῦ σημείου Q. Βλέπουμε ὅτι ἡ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη κάνει πρῶτα μία περιστροφὴ μὲ ταλαντώσεις γύρω ἀπὸ τὴν δεξιὰ νησίδα. Μετὰ φεύγει πρὸς τὰ κάτω καὶ συνεχίζει λόγω τοῦ modulo 1 τῆς ἀπεικονίσεως (1), ἀπὸ τὴν ἐπάνω πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ περιβάλλει τὴν ἐπάνω ἀριστερὰ νησίδα. Ἂν ὑπολογίσουμε ἀκόμη περισσότερο τὴν ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη, αὐτὴ τελικὰ γεμίζει ὅλο τὸ χῶρο τοῦ τετραγώνου χωρὶς νὰ τμήσει τὸν ἑαυτόν της.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ἔχουμε τὸ πρῶτο παράδειγμα τῆς διασχίσεως ἑνὸς δακτυλίου Cantor, ποὺ ὁδηγεῖ στὴν διάχυση τῶν τροχιῶν καὶ στὴν ἑνοποίηση τοῦ χάους μέσα ἀπὸ τὸν δακτύλιο Cantor μὲ τὴ μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα ἔξω ἀπὸ τὸν δακτύλιο.

Ὅταν τὸ K μικραίνει, φθάνουμε σὲ μία κρίσιμη τιμὴ $K = 4.9974$ ποὺ ὁ δακτύλιος Cantor (cantorus) γίνεται κανονικὸς δακτύλιος (torus) δηλαδὴ κλειστὴ καμπύλη KAM. Γιὰ K μικρότερα ἀπὸ K_c δὲν ὑπάρχει καμμία διάχυση τροχιῶν πρὸς τὰ ἔξω. Ὅταν τὸ K εἶναι λίγο μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ K_c ὑπάρχει διάχυση πρὸς τὰ ἔξω, ἀλλὰ αὐτὴ εἶναι πολὺ βραδεῖα. Ὅταν $K = 4.998$ (σχ. 13) παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη διασχίζει τὸν δακτύλιο Cantor μετὰ ἀπὸ 9 περιόδους, ἀλλὰ θέλει 10^4 περιόδους γιὰ νὰ φθάσει στὴν χαοτικὴ θάλασσα, δηλαδὴ πολὺ μεγαλύτερο χρόνο ἀπ' ὅ,τι στὴν περίπτωση $K = 5$.

Τὸ παράδειγμα αὐτὸ μᾶς δείχνει ὅτι εἶναι δυνατὸν σὲ κάθε μὴ γραμμικὸ δυναμικὸ σύστημα νὰ παρακολουθήσουμε τὴν μορφὴ τοῦ χάους καὶ τὴν ἐξέλιξη τῶν χαοτικῶν τροχιῶν ὅταν τὸ χάος αὐξάνει καθὼς αὐξάνει ἡ μὴ γραμμικότης τοῦ συστήματος.

Τὰ συμπεράσματα τῆς μελέτης αὐτῆς ἔχουν ἐφαρμογὲς σὲ διάφορους κλάδους τῆς Ἀστρονομίας, ἀπὸ τὸ πλανητικό μας σύστημα μέχρι τοὺς γαλαξίες καὶ τὸ Σύμ-



Σχ. 13. Δίοδος διὰ μέσου τῶν χασμάτων ἑνὸς δακτυλίου Cantor ἀπὸ τὴν ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη μιᾶς ἐσωτερικῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς γιὰ $K = 4.998$.

παν ὁλόκληρο. Ἔχουν ὅμως ἀκόμη ἐφαρμογὲς στὴν Φυσικὴ τοῦ πλάσματος καὶ στὴ Φυσικὴ τῶν ἐπιταχυντῶν ἀλλὰ καὶ σὲ ἄλλους κλάδους τῆς ἐπιστήμης, ὅπως στὴν Χημεία καὶ τὴ Βιολογία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Contopoulos, G. and Voglis, N.: 1999, «Dynamical Spectra», in Steves, B.A. and Roy, A.E. (Eds) «The Dynamics of Small Bodies in the Solar System», Kluwer Academic Publishers 429.

Contopoulos, G., Voglis, N., Efthymiopoulos, C., Froeschlé, C., Gonczi, R., Lega, E., Dvorak, R. and Lohinger, E.: 1997, Cel. Mech. Dyn. Astron. 67, 293.

Contopoulos, G., Efthymiopoulos, C. and Voglis, N.: 199, «The Form and Significance of Dynamical Spectra», in Dvorak, R. et al. (Eds) «Modern Astrometry and Astrophysics», Austrian Academy of Sciences 171.

Contopoulos, G., Voglis, N. and Efthymiopoulos, C.: 1999, «Chaos in Relativity and Cosmology», Cel. Mech. Dyn. Astron. (in press).

Efthymiopoulos, C., Voglis, N. and Contopoulos, G.: 1999, «Angular Dynamical Spectra and their Applications», in Steves, B.A., and Roy, A. E. (Eds), «The Dynamics of small Bodies in the Solar System», Kluwer Academic Publishers 455.

Efthimiopoulos, C., Contopoulos, G. and Voglis, N.: 1999 «Cantori and Asymptotic Curves, in the Stickiness Region», Cel. Mech. Dyn. Astron. (in press).

Greene, J.M.: 1979, J. Math. Phys. 20, 1183.

Voglis, N. and Contopoulos, G.: 1994, J. Phys. A27, 4899.

Voglis, N., Contopoulos, G. and Efthymiopoulos, C.: 1999, «Detection of Ordered and Chaotic Orbits using Dynamical Spectra», Cel. Mech. Dyn. Astron. (in press).

S U M M A R Y

Order and Chaos in Phase Space

We study the relations between the asymptotic curves of simple periodic orbits of a dynamical system and the spectra of stretching numbers and helicity angles. As examples we consider the standard map and the Hénon map. The main characteristics of the spectra are explained by the form of the asymptotic curves. When the nonlinearity parameter is large these systems appear as random; however their spectra are very different from the spectra of a random system. Then we study the increase of chaos by the joining of various chaotic domains. We give for the first time figures that show the crossing of destroyed invariant tori (cantori), by asymptotic curves of periodic orbits, that lead to a large degree of chaos.